ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXI.

1883-84

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME XIX.

ROMA

COI TIPI DEL SALVIUCCI

1884

Intorno alla cariocinesi nella segmentazione dell' ovo di Axolotl.

Nota del prof. G. BELLONCI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia

nella seduta del 3 febbraio 1884.

(Con una tavola).

Hertwig [1] (irudinei e batraci) e Fol [2] (echini) descrissero, nella fase ricostitutiva della cariocinesi ovulare, la trasformazione degli elementi cromatici in vescichette destinate, fondendosi fra loro, a formare il nucleo figlio. Così riceveva una giusta interpretazione il fatto, già veduto da altri, della presenza di cumuli di vescichette, in luogo dei nuclei, nei blastomeri dei vertebrati inferiori. I due citati osservatori non videro però la struttura della piastra equatoriale, rivelata dalle recenti ricerche sulla segmentazione delle cellule dei tessuti.

Trinchese [3] descrisse e figurò le stelle cromatiche figlie nelle cellule direttrici degli eolididei (l. c. tav. III fig. 21, 22, 23).

Ciascun filo cromatico, secondo Trinchese, per la congiunzione de' suoi due capi, diventa un anello; e gli anelli aderiscono fra loro e coll'aggiunta di nuova sostanza nucleare formano il nuovo nucleo.

Flemming [4] ha studiato la segmentazione dell' ovo degli echini, colla scorta delle nuove idee e coll'aiuto dei mezzi ottici più perfetti (ob. $^1/_{18}$ di Zeiss e illuminatore Abbe); ed ha acquistato la convinzione che anche questo caso non offre eccezione veruna al ciclo cariocinetico da lui stabilito, e che la trasformazione degli elementi cromatici in vescichette non avviene: invece si ha, come nelle cellule dei tessuti, la fase di gomitolo, che precede immediatamente la ricostituzione del nucleo figlio.

Studiando la segmentazione nell' ovo di Axolotl, mi apparve così chiaramente la formazione di vescichette, nella ricostituzione dei nuclei, che stimai cosa importante farne oggetto speciale di studio, per stabilire con sicurezza questa notevole eccezione al ciclo schematico inverso di Flemming. E volli vedere anche se le precedenti fasi cariocinetiche sono identiche a quelle delle cellule dei tessuti.

Per indurire le ova adoperai or l'acido picrico-solforico di Kleinenberg, or l'acido

(1) O. Hertwig, *Beiträge z. Kenntniss d. Bildung, Befruchtung u. Theilung d. thier. Eies.* Morphologisches Jahrbuch, 1877.

(2) H. Fol, *Recherches sur la fécondation et le commencement de l'hénogénie* etc. Mémoires de la Soc. de phis. et d'histoire nat. de Genève, 1879.

(3) Trinchese, *I primi momenti dell'evoluzione nei molluschi.* Atti della r. Accademia dei Lincei, 1879.

(4) Flemming, *Beiträge zur Kenntniss d. Zelle u. ihrer Lebenserscheinungen.* Theil III. Archiv f. mikr. Anat. 1881. — *Id. Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung.* Leipzig, 1882.

cromico-acetico di Hertwig; nel primo caso colorai col carminio borico di Grenacher, nel secondo caso col carminio acido di Schweigger-Seidel: quello ha squisita facoltà elettiva per la cromatina nucleare, questo invece colora di preferenza il succo nucleare e la sostanza cellulare attiva. L'ematossilina e l'eosina non mi hanno dato migliori risultati.

Ho studiato i miei preparati coll'obbiettivo a immersione omogenea $^1/_{18}$ di Zeiss e coll'aiuto dell'illuminatore Abbe.

Le fasi di segmentazione che ho osservato sono comprese fra la divisione in 4 blastomeri e la blastula omai a termine.

Il nucleo in quiete è elissoidale e generalmente presenta un' insenatura da un lato (fig. 1). La cromatina è relativamente poca e trovasi nella parete, nello stroma e nei granuli interni (nucleoli?). Lo stroma è fatto di filamenti e setti irregolari: così almeno esso appare nei preparati fatti coll'acido picrico-solforico.

Allorchè comincia la cariocinesi la cromatina si dispone in filamenti che formano il noto gomitolo (fig. 2, 3, 4). La membrana acromatica si vede allora distintamente (fig. 2, 3); e appariscono anche filamenti acromatici nell'interno (fig. 3, 4). Non si deve però credere con ciò dimostrato che la cromatina e l'acromatina fossero già distinte nella parete e nello stroma: è possibile anzi che vi fossero mescolate o più intimamente unite.

Non ho potuto vedere con sicurezza se, in un certo momento, tutto il gomitolo di cromatina sia formato da un solo filo. In molti casi invece ho veduto chiaramente i fili piegati e disgiunti e irregolarmente disposti. Dipoi i filamenti acromatici formano il fuso di segmentazione, nel tempo stesso che i fili piegati di cromatina si ordinano nell'equatore di quello per formarvi la stella madre (fig. 5, 7). Il fuso acromatico si vede molto più chiaramente nei preparati fatti coll'acido cromico-acetico e colorati col carminio acido di Schweigger-Seidel; poichè i suoi elementi si colorano un poco e diventano molto rifrangenti, mentre i filamenti cromatici si colorano poco più. Credo che avvenga il fenomeno della scissione longitudinale dei fili cromatici della stella, benchè non lo abbia potuto osservare bene. La stella riprodotta esattamente nella fig. 6, sembrami abbia appunto i filamenti sdoppiati, come nelle fig. 19 e 20 di Retzius [1]: in essa i filamenti sono l'un dentro l'altro a due a due e in alcuni punti sono ancor riuniti nella piega; inoltre essi sono più sottili di quelli del gomitolo e delle stelle madri ordinarie e in maggior numero che in queste.

In seguito all'ordinamento dicentrico, i fili piegati delle due stelle figlie si dispongono quasi parallelamente ai fili acromatici del fuso (fig. 8) e si portano, nel modo già conosciuto, ai poli di questo (fig. 23).

Nello stadio avanzato di blastula, la sostanza cromatica dei nuclei è prevalente sopra gli altri elementi nucleari e i filamenti suoi sono lunghissimi, sicchè il fuso di segmentazione sembri tutto cromatico.

Giunti ai poli del fuso, i fili cromatici si retraggono alquanto, e alcuni di essi si piegano ad arco (fig. 9) [2]. Poi rapidamente avviene, negli estremi del fuso, la formazione di vescichette, che si colorano in rosso.

[1] G. Retzius, *Studien über die Zelltheilung*. Biologische Untersuchungen heraug. v. G. Retzius, 1881.

[2] In alcuni punti di questa figura notasi la struttura moniliforme di Pfitzner.

Come si formano queste vescichette? In alcuni casi sembra che dapprima i fili cromatici curvati diventino anelli, nel modo descritto da Trinchese (fig. 9, 10) e che poi la sostanza cromatica di ciascun anello si diffonda in superficie sferica e formi una vescichetta. In molti casi però sembra che la sostanza cromatica dei fili passi direttamente alla forma vescicolare (fig. 11, 14).

Certo è che trattasi di vere vescichette sferoidali: coll'obiettivo $^1/_{18}$ Zeiss e illuminatore Abbe, se ne può vedere anche la parete perpendicolare al raggio visivo. Esse sono piene di succo nucleare che, nei preparati fatti coll'acido cromico-acetico, si colora in rosso col carminio di Schweigger-Seidel (fig. 15).

Nella parete di queste vescichette, la sostanza cromatica non è uniformemente distribuita, ma a brevi intervalli accumulata (fig. 12, 13), a punti e tratti più o meno regolari: talvolta essa dà alla sezione ottica della parete l'apparenza d'una punteggiatura (fig. 14, 18), come si ha spesso nelle membrane dei nuclei (v. Flemming, *Zellsubstanz* etc. p. 166). Non si può affermare che gl'intervalli fra i punti cromatici siano occupati esclusivamente da acromatina. Egli è però quasi certo che questa sostanza entra insieme alla cromatina, non sappiamo come, a formar le vescichette. Difatti, una parte della parete di queste diventa la parete nucleare, in cui la parte acromatica si rende evidente ne' primi momenti della cariocinesi.

Le vescichette aderiscono fra loro, si fondono a poco a poco insieme, e formano così il nuovo nucleo (fig. 16, 17, 20): dalle pareti giunte a contatto si formano i tratti dello stroma nucleare, dalle pareti rimaste esterne e libere si ha la membrana del nucleo. In corrispondenza dell'astro di sostanza cellulare, rimane nel nucleo la nota insenatura caratteristica (fig. 1, 20).

Tutto ciò mi fa sospettare che i nuclei strozzati, bernoccoluti, moriformi ecc., spesso indicati come nuclei in segmentazione diretta, altro non siano che nuclei figli in ricomposizione.

La sostanza cellulare attiva si raccoglie, prima della cariocinesi (non ho potuto determinar bene in qual momento), intorno a due poli del nucleo opposti e situati nel piano dell'insenatura nucleare ed ivi forma due astri (fig. 21). Intorno ad essa e intorno al nucleo, nelle cellule pigmentate, si dispongono radialmente granulazioni di pigmento. Cotesta sostanza si colora in rosso col carminio acido, nei preparati all'acido cromico-acetico; più intensamente ancora si colora, collo stesso trattamento, il succo nucleare. Il fuso di segmentazione invece, cogli stessi reagenti, si colora poco (fig. 22, 23). Ciò mi fa sospettare che il succo nucleare si modifichi (chimicamente?) durante la cariocinesi.

Quando il fuso è presso a scindersi, il pigmento lo riveste (fig. 11, 23), poi lo invade, mascherando e poi sostituendo i fili connettivi (fig. 19). Si forma intanto (talvolta quando il fuso è ancor giovine) una piastra cellulare (*Zellplatte* Stras.), che si manifesta con deposito di pigmento nel piano di segmentazione (fig. 11, 22, 23, 19). E questo deposito è spesso più forte nell'equatore del fuso che verso la periferia della cellula. Non si può, io credo, dubitare che l'apparenza di piastra sia un' illusione prodotta dall'osservare per traverso o obliquamente lo strozzamento di segmentazione (v. Flemming, *Zellsubstanz* etc. p. 248); poichè questo non si vede mai molto profondo; e d'altronde queste cellule sono abbastanza grosse per poter vedere bene la formazione

del piano pigmentato. Così si forma il nuovo strato periferico di sostanza cellulare, il quale, nelle cellule pigmentate si distingue appunto per la presenza di numerosi cristalli di pigmento nero.

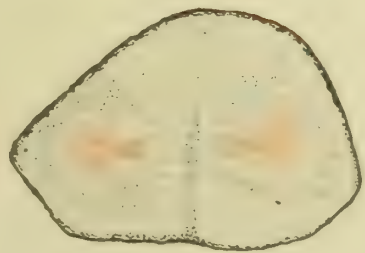
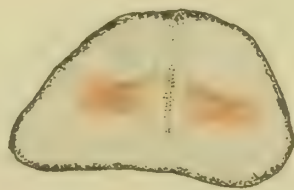
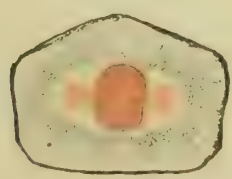
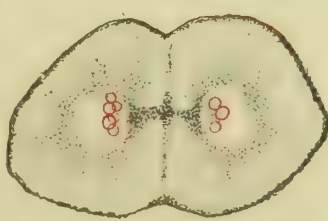
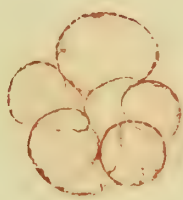
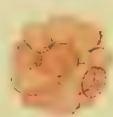
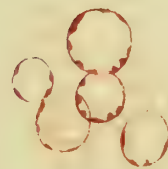
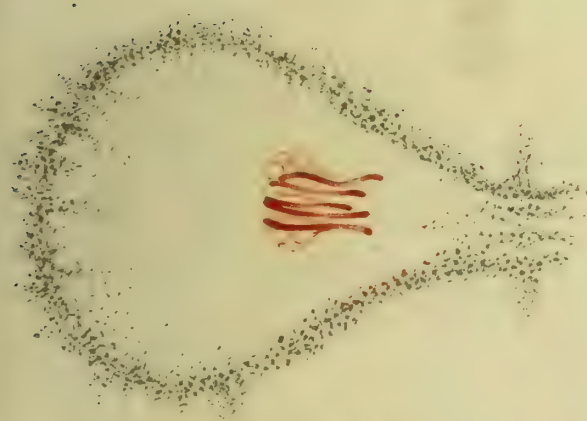
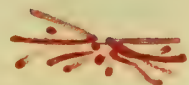
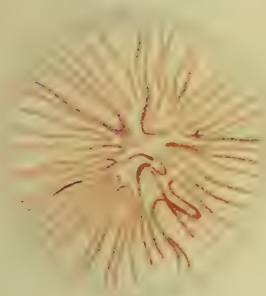
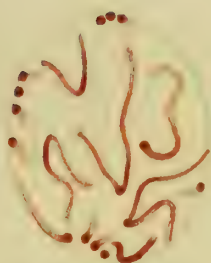
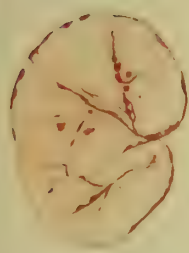
Adunque nella segmentazione dell'ovo di Axolotl (e fors'anche di molti altri animali) la prima parte del ciclo cariocinetico presenta gli stessi fenomeni che si osservano nelle cellule dei tessuti; la seconda parte invece devia dal ciclo schematico di Flemming, non ripete cioè inversamente i fenomeni della prima. Si formano, difatti, ai poli del fuso presso a scindersi, dai fili cromatici e col probabile concorso di acromatina, delle vescichette piene di succo nucleare, le quali, fondendosi fra loro, rigenerano il nucleo.

In questo fenomeno non c'è, in fondo, nulla di essenzialmente diverso dalla corrispondente fase della cariocinesi cellulare: mentre in questa tutti insieme gli elementi cromatici concorrono a formare direttamente lo stroma e la parete, nelle sfere di segmentazione invece si formano dapprima tanti elementi separati (vescichette) della parete e dello stroma.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. Nucleo in riposo (ac. picrico-solforico, carminio borico di Grenacher).
» 2, 3, 4. Formazione dei fili cromatici e acromatici (ac. picr.-solf. ecc.).
» 5. Stella madre (ac. picr.-solf. ecc.).
» 6. Stella madre i cui fili sono longitudinalmente divisi (id.).
» 7. Fuso di segmentazione con stella madre nell'equatore (id.).
» 8. Fuso di segmentazione colle due stelle figlie migranti verso i poli (id.).
» 9. Fuso di segmentazione poco prima della formazione delle vescichette (id.).
» 10. Fuso di segmentazione nel momento di formazione delle vescichette (id.).
» 11. Metà d'un fuso di segmentazione nel momento i cui si formano direttamente le vescichette; al polo si vede la sostanza cellulare attiva, finamente granulare, e intorno ad essa vi sono le granulazioni vitelline e di pigmento (id.).
» 12, 13. Gruppi di vescichette nucleari (id.).
» 14. Due metà cromatiche d'un fuso, in via di trasformazione vescicolare (id.).
» 15. Gruppo di vescichette nucleari (ac. cromico-acetico, carminio di Schweigger-Seidel).
» 16. Vescichette in via di fondersi fra loro (ac. picr.-solf. ecc.).
» 17. Nucleo figlio ormai completamente formato per la unificazione delle vescichette (id.).

Ho disegnato tutte queste figure coll'aiuto dell'obiettivo $^1/_{18}$ Zeiss, Oc. 1 e illuminatore Abbe.

» 18. Cellula in segmentazione con due gruppi di vescichette punteggiate nel luogo dei futuri nuclei (ac. picr.-solf. ecc.). Seibert e Kraft $\frac{I}{V}$.
» 19. Cellula nello stadio della precedente, nella quale si vede bene la distribuzione del pigmento (id.). Seibert e K. $\frac{II}{II}$.
» 20. Nucleo ricostituito, col corrispondente astro di sostanza cellulare attiva (ac. cromico-acetico, carminio ac. di Schweigger-Seidel). Seibert e K. $\frac{II}{V}$.
» 21. Cellula prima della cariocinesi (ac. crom.-ac. ecc.). Seibert e K. $\frac{I}{V}$.
» 22, 23. Cellule con fuso nucleare e piastra cellulare di pigmento (ac. crom.-ac. ecc.). Seibert e K. $\frac{I}{V}$.

La sestica binaria.

Memoria del dott. GIOVANNI MAISANO

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia

nella seduta del 3 febbraio 1884.

Nella presente Memoria ci proponiamo lo studio dei casi più notevoli della sestica binaria e dei suoi principali covarianti. Noi supponiamo che il lettore abbia sott' occhio il celebre trattato del sig. Clebsch: *Theorie der binären algebraischen Formen*, nel quale trovasi il sistema completo delle forme binarie di sesto ordine, ed una completa discussione dei casi nei quali è impossibile la loro rappresentazione tipica.

Dividiamo il nostro lavoro nei seguenti capitoli:

I. Teoremi relativi alle forme binarie di ordine qualunque.

II. Teoremi relativi alla forma binaria del 6.° ordine e dei suoi principali covarianti.

III. Forme particolari che assume la sestica binaria, supponendo identicamente nulli alcuni suoi covarianti.

IV. Discriminanti e risultanti della forma binaria del 6.° ordine e di alcuni suoi covarianti.

V. Casi più notevoli dell' equazione:

$$f = 0.$$

VI. Casi più notevoli dell' equazione:

$$j = 0.$$

VII. Radici multiple dell' essiano.

CAPITOLO I.

Teoremi relativi alle forme binarie di ordine qualunque.

Indicando simbolicamente con

$$f = a_x^n = b_x^n = \dots\dots$$

una forma binaria dell' ordine n, ci serviremo in seguito delle seguenti notazioni:

$$\mathrm{H} = (ab)^2 a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}, \qquad i = (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}, \qquad r = (ab)^6 a_x^{n-6} b_x^{n-6},$$

$$\mathrm{T} = (a\mathrm{H})\, a_x^{n-1}\, \mathrm{H}_x^{2n-5}, \qquad p = (ai)^2 a_x^{n-2}\, i_x^{2n-10}, \qquad j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 a_x^{n-4} b_x^{n-4} c_x^{n-4},$$

$$s = (ab)^2 (cd)^2 (ac)\, (bd)\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} d_x^{n-3}.$$

Il covariante s, fatta eccezione del caso $n=3$, si esprime in funzione razionale ed intera delle forme f, i, j, H.

In virtù dell'identità:

$$(bd)\,c_x=(bc)\,d_x+(cd)\,b_x\,,$$

si ha:

$$s=(ab)^2(cd)^2(ac)(bc)\,a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-4}d_x^{n-2}$$

$$+(ab)^2(cd)^3(ac)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-4}d_x^{n-3}=U_1+U_2\,.$$

Scambiando c con d e prendendo la metà della somma dei termini che si ottengono, la forma U_2 dà:

$$\frac{1}{2}(cd)^3c_x^{n-4}d_x^{n-4}.\,(ab)^2a_x^{n-3}b_x^{n-2}\left\{(ac)\,d_x-(ad)\,c_x\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}(cd)^4c_x^{n-4}d_x^{n-4}.\,(ab)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}=-\frac{1}{2}i.\,H\,.$$

Per calcolare U_1 sviluppiamo prima in serie il covariante $F=(ab)^2\,(ac)\,(bc).\,a_x{}^{n-3}b_x{}^{n-3}c_x{}^{n-4}c_y{}^2$ con due serie di variabili $(x_1\,x_2)$, $(y_1\,y_2)$, giusta la formula:

$$F=\Delta^2\varphi+\frac{2\,(2n-10)}{3n-8}(xy)\,\Delta\varphi_1+\frac{3n-11}{3\,(n-3)}(xy)^2.\,\varphi_2\,,$$

in cui le forme φ, φ_1, φ_2 provengono dalla forma F, applicandole 0, 1, 2 volte l'operazione $\left(\frac{\partial^2F}{\partial x_1\,\partial y_2}-\frac{\partial^2F}{\partial x_2\,\partial y_1}\right)$ e ponendo quindi le y uguali alle x. Applicando successivamente questa operazione si ottiene:

$$(ab)^2(ac)(bc)\,a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-4}c_y^2\,,$$

$$\frac{2\,(n-3)}{3n-10}(ab)^2(ac)(bc)^2\,a_x^{n-3}b_x^{n-4}c_x^{n-4}c_y=$$

$$=\frac{n-3}{3n-10}(ab)^2(ac)\,(bc)^2a_x^{n-4}b_x^{n-4}c_x^{n-4}(a_xc_y-a_yc_x)=\frac{n-3}{3n-10}j.\,(xy)\,,$$

$$\frac{n-3}{3n-11}j\,,$$

epperò:

$$\varphi=(ab)^2(ac)\,(bc)\,a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-2}=$$

$$=\frac{1}{3}(ab)\,(ac)\,(bc)\,a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-3}\left\{(ab)\,c_x-(ac)\,b_x+(bc)\,a_x\right\}=0,$$

$$\varphi_1=0\,,\qquad\qquad \varphi_2=\frac{n-3}{3n-11}j\,;$$

donde:

$$F=\frac{1}{3}(xy)^2.\,j,$$

e ponendo $y_1=d_2$, $y_2=-d_1$ e moltiplicando per $d_x{}^{n-2}$:

$$U_1=(ab)^2(cd)^2(ac)\,(bc)\,a_x^{n-3}b_x^{n-3}c_x^{n-4}d_x^{n-2}=\frac{1}{3}j.f.$$

Si ha dunque la formula:

$$s=\frac{1}{3}j.f-\frac{1}{2}i.\,H\,. \tag{1}$$

Sviluppando in serie il covariante $(ab)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-3} a_y b_y$ si ha:

$$(ab)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-3} a_y b_y = \mathrm{H}_x^{2n-6} \mathrm{H}_y^2 - \frac{n-3}{2(2n-5)} i.(xy)^2, \qquad (2)$$

e prendendo i discriminanti delle quadratiche in y, che formano il 1° e 2° membro:

$$s = (\mathrm{HH}')^2 \mathrm{H}_x^{2n-6} \mathrm{H}_x'^{2n-6} - \frac{n-3}{2n-5} i.\mathrm{H},$$

e giusta la formula (1):

$$(\mathrm{HH}')^2 \mathrm{H}_x^{2n-6} \mathrm{H}_x'^{2n-6} = \frac{1}{3} j.f - \frac{1}{2(2n-5)} i.\mathrm{H}. \qquad (3)$$

L'essiano dell'essiano si esprime dunque in funzione razionale ed intiera delle forme f, H, i, j.

La forma j può esprimersi in funzione razionale intera delle forme f, p, r.

Sviluppando in serie il covariante a due serie di variabili $(ab)^4 a_x^{n-5} b_x^{n-5} a_y b_y$, ponendo in seguito $y_1 = c_2$, $y_2 = -c_1$ e moltiplicando per c_x^{n-2}, trovasi facilmente:

$$(ab)^4 (ac)(bc) a_x^{n-5} b_x^{n-5} c_x^{n-2} = p - \frac{n-5}{2(2n-9)} f \cdot r;$$

epperò: $$j = \frac{1}{3} (ab)(bc)(ca) a_x^{n-5} b_x^{n-5} c_x^{n-5} \left\{ (ab)^3 c_x^3 + (bc)^3 a_x^3 + (ca)^3 b_x^3 \right\} =$$

$$= -(ab)^4 (ac)(bc) a_x^{n-5} b_x^{n-5} c_x^{n-2} = -p + \frac{n-5}{2(2n-9)} f.r;$$

donde la formula:

$$j = -p + \frac{n-5}{2(2n-9)} f.r. \qquad (4)$$

Dalla stessa formula (2) si ha:

$$(ab)^2 (ac)(bc) a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-2} = (a\mathrm{H})^2 a_x^{n-2} \mathrm{H}_x^{2n-6} - \frac{n-3}{2(2n-5)} i.f.$$

Intanto il 1° membro è uguale a

$$\frac{1}{3} (ab)(ac)(bc) a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} \left\{ (ab) c_x - (ac) b_x + (bc) a_x \right\} = 0,$$

epperò:

$$(a\mathrm{H})^2 a_x^{n-2} \mathrm{H}_x^{2n-6} = \frac{n-3}{2(2n-5)} i.f. \qquad (5)$$

« La 2ª sovrapposizione (¹) di f sopra H non differisce dal prodotto $i.f$ che « per un fattor numerico ».

Mediante le formule (3) e (5) si può esprimere il quadrato del covariante T in funzione di f, H, i j.

Indicando con χ il determinante funzionale di due forme $\varphi = \varphi_x{}^n$, $\psi = \psi_x{}^m$, si ha (²):

$$\chi^2 = -\frac{1}{2} \left\{ (\varphi\varphi')^2 \varphi_x^{n-2} \varphi_x'^{n-2} . \psi^2 - 2(\varphi\psi)^2 \varphi_x^{n-2} \psi_x^{m-2} . \varphi\psi + (\psi\psi')^2 \psi_x^{m-2} \psi_x'^{m-2} . \varphi^2 \right\},$$

(¹) Traduciamo così la *Ueberschiebung* del sig. Gordan.

(²) Vedi Clebsch, op. cit. pag. 119.

e ponendo $\varphi = f$, $\psi = \mathrm{H}$, epperò $\chi = \mathrm{T}$:

$$\mathrm{T}^2 = -\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{HH}')^2 \mathrm{H}_x^{2n-6} \mathrm{H'}_x^{2n-6} . f^2 - 2(\mathrm{H}a)^2 \mathrm{H}_x^{2n-6} a_x^{n-2} . f\mathrm{H} + (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} . \mathrm{H}^2\right\},$$

ovvero, per le formule (3) e (5):

$$\mathrm{T}^2 = -\frac{1}{2}\left\{\mathrm{H}^3 - \frac{i}{2}\mathrm{H}f^2 + \frac{j}{3}f^3\right\}. \tag{6}$$

Da quest'ultima formula si ottiene per differenziazione:

$$-12(n-2)\mathrm{T}.\mathrm{T}_x^{3n-7}\mathrm{T}_y = 6(n-2)\mathrm{H}^2.\mathrm{H}_x^{2n-5}\mathrm{H}_y - (n-2)if^2.\mathrm{H}_x^{2n-5}\mathrm{H}_y -$$

$$-(n-4)\mathrm{H}f^2.i_x^{2n-9}i_y - ni\mathrm{H}f.a_x^{n-1}a_y + njf^2.a_x^{n-1}a_y + (n-4)f^3.j_x^{3n-13}j_y, \tag{7}$$

dalla quale, ponendo $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$ e moltiplicando per b_x^{n-1}, si ha:

$$-12(n-2)\mathrm{T}.(\mathrm{T},f) = -6(n-2)\mathrm{H}^2\mathrm{T} + (n-2)if^2.\mathrm{T} - (n-4)\mathrm{H}f^2(i,f) + (n-4)f^3(j,f).$$

Intanto, facendo uso della formula (5) di questo capitolo e servendosi della formula (5) della citata opera del Clebsch a pag. 117, trovasi:

$$(\mathrm{T},f) = -\frac{n-3}{6(n-2)}i.f^2 + \frac{1}{2}\mathrm{H}^2; \tag{8}$$

cosicchè si ha:

$$i.\mathrm{T} + \mathrm{H}(i,f) - f(j,f) \equiv 0, \tag{9}$$

la quale, paragonata coll'equazione identica:

$$i.\mathrm{T} + \mathrm{H}(i,f) - f(i,\mathrm{H}) \equiv 0,$$

fornisce la notevole relazione:

$$(i,\mathrm{H}) - (j,f) \equiv 0. \tag{10}$$

Dalla stessa formula (7), ponendo $y_1 = \mathrm{H}_2$, $y_2 = -\mathrm{H}_1$ e moltiplicando per H_x^{2n-5}, si ottiene:

$$-12(n-2)\mathrm{T}.(\mathrm{T},\mathrm{H}) = -(n-4)\mathrm{H}f^2(i,\mathrm{H}) + (n-4)f^3(j\mathrm{H}) - ni\mathrm{H}f\mathrm{T} + njf^2\mathrm{T}.$$

Servendosi delle formule (3) e (5) di questo capitolo e applicando la citata formula del Clebsch si trova:

$$(\mathrm{T},\mathrm{H}) = \frac{n}{12(n-2)}i\mathrm{H}f - \frac{1}{6}j.f^2, \tag{11}$$

la quale sostituita nella precedente fornisce la relazione:

$$j.\mathrm{T} = f.(j,\mathrm{H}) - \mathrm{H}.(i,\mathrm{H}). \tag{12}$$

Servendosi di quest'ultima formula si può esprimere il covariante T dell'essiano, che vogliamo indicare con T_H, per mezzo dei covarianti f, T, j e del determinante funzionale (j,H). Differenziando infatti i due membri della formula (3) di questo capitolo rispetto alle x, sostituendo le differenziali per le y e ponendo in seguito $y_1 = \mathrm{H}_2$, $y_2 = -\mathrm{H}_1$ e moltiplicando per H_x^{2n-5} si ottiene, facendo uso della formula (12):

$$-2(2n-5)\mathrm{T}_\mathrm{H} = (n-4)f.(j,\mathrm{H}) + \frac{n+2}{3}j.\mathrm{T}. \tag{13}$$

Teorema I. — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f rappresenti la n^{ma} potenza di una forma lineare sono compendiate nell'equazione identica:

$$\mathrm{H} = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \equiv 0. \tag{14}$$

Infatti l'equazione precedente dice, che i centri armonici di second' ordine di un polo qualunque x rispetto alla forma f coincidono in un solo elemento, nel quale dunque coincidono i centri armonici di terz' ordine, quelli di quarto ecc.; e finalmente gli n elementi *fondamentali* dati dall'equazione $f=0$.

Teorema II. — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f rappresenti la $\left(\frac{n}{2}\right)^{ma}$ (n pari) potenza di una forma quadratica sono espresse dall'equazione identica:

$$\mathrm{T}=(a\mathrm{H})\, a_x^{n-1}\, \mathrm{H}_x^{2n-5}\equiv 0\,. \qquad (15)$$

Infatti l'equazione precedente dice, che il centro armonico di un polo qualunque x rispetto ad f coincide col centro armonico dello stesso polo rispetto ad H; se x è un elemento fondamentale, il centro armonico di prim' ordine di x rispetto ad f, cioè il polo, coincide col centro armonico di prim' ordine di x rispetto ad H, epperò x appartiene ad H. Nello stesso modo si dimostra, che ogni elemento di H appartiene ad f, cosicchè gli elementi di f devono essere tutti multipli. Siccome poi un elemento n^{plo} di f è $(2n-2)^{plo}$ di H, ponendo:

$$f=x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots\ldots x_r^{n_r},\quad n_1+n_2+\ldots.n_r=n,$$

segue:

$$\mathrm{H}=x_1^{2n_1-2}x_2^{2n_2-2}\ldots.x_r^{2n_r-2},\, 2\,(n_1+n_2+\ldots.n_r)-2r=2n-4,$$

epperò, supponendo che non si annulli identicamente H:

$$r=2\,,\ f=x_1^{n_1}x_2^{n_2},\ \mathrm{H}=x_1^{2n_1-2}x_2^{2n_2-2},$$

$$\mathrm{T}=\frac{n_2-n_1}{n\,(n-2)}\,x_1^{3n_1-3}\,x_2^{3n_2-3},\quad n_2=n_1=\frac{n}{2}\,,\quad f=x_1^{\frac{n}{2}}\,x_2^{\frac{n}{2}}.$$

Se poi n è dispari, f riducesi alla n^{ma} potenza di una forma lineare, cosicchè per n dispari le due equazioni identiche:

$$\mathrm{H}\equiv 0,\qquad \mathrm{T}\equiv 0,$$

sono l'una conseguenza dell'altra.

Teorema III. — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f ammetta un elemento $(n-2)^{plo}$ sono compendiate nella identica equazione:

$$i^3-6j^2\equiv 0\,. \qquad (16)$$

Infatti l'elemento $(n-2)^{plo}$ della forma f è $(n-3)^{plo}$ pei centri armonici di ordine $n-1$ di un polo qualunque rispetto ad f, $(n-4)^{plo}$ pei centri armonici di ordine $(n-2)$ di un polo qualunque rispetto ad f, e così di seguito, e finalmente doppio pei centri armonici di quart' ordine; dunque il discriminante della forma costituita dai centri armonici di quart' ordine di un polo qualunque x rispetto ad f si annulla qualunque sia x, epperò:

$$i^3-6j^2\equiv 0\,. \qquad (17)$$

Reciprocamente, verificandosi l'equazione (10), i centri armonici di un polo qualunque rispetto ad f hanno un elemento doppio, il quale sarà triplo pei centri armonici di quint' ordine ecc., e finalmente $(n-2)^{plo}$ pei punti fondamentali, e $2n-6$

per l'essiano. Questo elemento allora, giusta la formula (5) di questo capitolo, diventerà multiplo secondo $2n-8$ pel covariante i, cioè questo covariante diviene la $(2n-8)^{ma}$ potenza di una forma lineare, e il covariante j diviene la $(3n-12)^{ma}$ potenza della stessa forma, giusta la formula (3).

Si può dunque enunciare il teorema:

« Se la forma fondamentale ammette un elemento multiplo secondo il numero « $n-2$, lo stesso elemento diventa multiplo pei covarianti i e j risp. secondo i « numeri $2n-4$ e $3n-12$ ».

Teorema IV. — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f ammetta un elemento $(n-2)^{plo}$ e un altro elemento doppio sono compendiate nelle identiche equazioni:

$$i^3-6j^2\equiv 0, \quad (18) \qquad niH-2(n-2)jf\equiv 0. \quad (19)$$

Infatti, assumendo come punti coordinati nella rappresentazione geometrica gli elementi multipli di f, possiamo scrivere:

$$f=\frac{n(n-1)}{2}x_1^{n-2}x_2^2; \quad (20)$$

donde:

$$H=-(n-1)(n-2)x_1^{2n-6}x_2^2, \quad i=6x_1^{2n-8}, \quad j=-6x_1^{3n-12},$$

$$i^3-6j^2\equiv 0, \qquad nH-2(n-2)jf\equiv 0.$$

Reciprocamente per le condizioni (18) e (19) gli elementi di f appartengono anche ad H, epperò f non può ammettere che elementi multipli, dei quali uno dev'essere $(n-2)^{plo}$ per la condizione (18), epperò f assumerà la forma (20).

Teorema V. — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f ammetta un elemento $(n-1)^{plo}$ sono compendiate nelle due identiche equazioni:

$$i\equiv 0, \qquad j\equiv 0. \quad (21)$$

Infatti, assumendo come punti coordinati l'elemento $(n-1)^{plo}$ e l'elemento semplice di f, si può porre:

$$f=nx_1^{n-1}x_2,$$

donde:

$$i\equiv 0, \qquad j\equiv 0.$$

Reciprocamente, se verificansi le condizioni (21), si annullano i due invarianti dei centri armonici di quart'ordine di un polo qualunque rispetto ad f, epperò tre di quei centri armonici coincidono in un solo, il quale sarà quadruplo pei centri armonici di quint'ordine, quintuplo per quelli di sesto ecc., e finalmente $(n-1)^{plo}$ per la forma fondamentale.

Giusta la formula (4) le condizioni (21) equivalgono a queste altre:

$$i\equiv 0, \qquad r\equiv 0.$$

Il sig. Brioschi ha dimostrato negli *Annali di Matematica pura ed applicata* Vol. VIII, serie II, che per la sola condizione;

$$i\equiv 0,$$

le forme di 4°, 6°, 12° grado rappresentano il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro; mentre, per tutte le altre forme, dalla condizione $i\equiv 0$ segue l'altra $j\equiv 0$.

Teorema VI. — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f per trasformazione lineare riducasi alla forma binomia $f = a_0 x_1^n + a_n x_2^n$ sono espresse dall'identica equazione:

$$j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 a_x^{n-4} b_x^{n-4} c_x^{n-4} \equiv 0 \text{ . } (')$$

Partendo dalla forma:

$$f = a_0 x_1^n + a_n x_2^n$$

trovasi facilmente $j \equiv 0$.

Reciprocamente supponiamo $j \equiv 0$. Per la formula (13) di questo capitolo si ha $T_H \equiv 0$, epperò (Teorema II) l'essiano deve ridursi in questo caso alla potenza $(n-2)^{ma}$ di una forma quadratica. Assumendo come punti coordinati gli elementi di questa quadratica possiamo porre:

$$H = -\sqrt[3]{2}\, x_1^{n-2} x_2^{n-2} .$$

Dalla formula (5) di questo capitolo, supponendo diverso da zero il discriminante di f, si conclude che il covariante i è anch'esso la potenza $(n-4)^{ma}$ della stessa quadratica e si potrà porre:

$$i = -\varkappa \,.\, x_1^{n-4} x_2^{n-4} ,$$

in cui $\varkappa$ indica un coefficiente numerico. Dalla formula (6) si conchiude inoltre che il covariante T ammette gli elementi x_1 e x_2 multipli secondo il numero $n-3$, epperò:

$$T = x_1^{n-3} x_2^{n-3} . t , \qquad t = t_x^n ,$$

$$t^2 - \frac{1}{4} \sqrt[3]{2\varkappa^3} . f^2 = x_1^n x_2^n ,$$

e poichè t ed f non possono avere elementi comuni, avendo supposto diverso da zero il discriminante di f, si deve avere:

$$t + \frac{1}{2} \sqrt[6]{2\varkappa^3} . f = x_1^n ,$$

$$t - \frac{1}{2} \sqrt[6]{2\varkappa^3} . f = x_2^n ,$$

donde:

$$\sqrt[6]{2\varkappa^3} . f = x_1^n - x_2^n ,$$

$$t = \frac{1}{2} (x_1^n + x_2^n) .$$

Teorema VII. — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'essiano rappresenti la potenza $(n-2)^{ma}$ di una forma quadratica sono espresse dall'identica equazione:

$$j \equiv 0 ,$$

e per le forme di grado pari dall'una o dall'altra delle identiche equazioni:

$$j \equiv 0, \qquad T \equiv 0 .$$

Queste condizioni sono sufficienti come si vede facilmente dalla formula (13).

(') Cfr. la mia Memoria, *Sopra due classi di forme binarie*. Atti della Accademia vol. XV, 1883.

Sono poi necessarie. Infatti, supponendo che H ammetta due elementi multipli secondo il numero $n-2$, questi, giusta la formula (5) e supponendo diverso da zero il discriminante di f, diventano multipli pel covariante i secondo il numero $n-4$, e poichè gli stessi elementi devono esser multipli per l'essiano dell'essiano secondo il numero $2n-6$, segue dalla formula (3), $j\equiv 0$. Supponendo invece nullo il discriminante di f, questa forma ammetterà almeno uno degli elementi di H multiplo secondo $\frac{n}{2}$ (n pari), il quale elemento diventa multiplo secondo $n-4$ pel covariante i, giusta la formula (5). L'altro elemento di H, giusta la stessa formula dev'esser multiplo secondo $n-4$ per la forma i e per la formula (3) multiplo secondo $\frac{n}{2}$ per f, supponendo che non si annulli identicamente j. In questo caso adunque f diventa la potenza $\left(\frac{n}{2}\right)^{ma}$ di una forma quadratica, epperò $T\equiv 0$.

Teorema VIII. — Se una forma F è la m^{ma} potenza di una forma φ, l'essiano di F si scompone nel prodotto della $(2m-2)^{ma}$ potenza di φ per l'essiano di φ; il covariante T di F si scompone nel prodotto della $(3m-3)^{ma}$ potenza di φ per il covariante T di φ.

Poniamo infatti:

$$F=\varphi^m, \quad \varphi=\varphi_x^n, \quad \Delta_\varphi=(\varphi\varphi')^2\varphi_x^{n-2}\varphi_x'^{n-2},$$

da cui si ricava:

$$F_x^{mn-2}F_y^2=\varphi^{m-1}.\varphi_x^{n-2}\varphi_y^2-\frac{n(m-1)}{2(mn-1)}\Delta_\varphi.\varphi^{m-2}.(xy)^2,$$

e quindi:

$$H=(FF')^2F_x^{mn-2}.F_x'^{mn-2}=\frac{n-1}{mn-1}\varphi^{2m-2}.\Delta_\varphi,$$

$$T=(FH)F_x^{mn-1}H_x^{2mn-5}=\frac{2(n-1)(n-2)}{mn-1}\varphi^{3m-3}.T_\varphi.$$

Teorema IX. — Il discriminante dell'essiano di una forma binaria f si scompone nel prodotto del discriminante di f per un fattore del discriminante di j.

Infatti, giusta la formula:

$$(HH')^2H_x^{2n-6}H_x'^{2n-6}=\frac{1}{3}j.f-\frac{1}{2(2n-5)}iH,$$

se H ammette un elemento doppio, questo è anche doppio per il suo essiano, epperò deve dividere il prodotto $j.f$. Se questo elemento appartiene ad f è nulla la risultante di f e H, che è uguale al quadrato del discriminante di f. Se l'elemento doppio appartiene ad j si deve annullare il discriminante di j, il quale pertanto deve contenere come fattore la risultante di j ed H.

CAPITOLO II.

Teoremi relativi alla forma binaria del 6° ordine e dei suoi principali covarianti.

Si sa [1], che il sistema completo della sestica binaria consta di 26 forme, alle quali si possono sostituire le seguenti:

$$A=(ab)^6,\quad B=(ii')^4,\quad C=(i\Delta)^4,\quad D=(mm')^2,\quad R=-(lm)(mn)(nl),$$

$$l=(ai)^4a_x^2,\quad m=(il)^2i_x^2,\quad n=(im)^2i_x^2,\quad \lambda=(mn)m_xn_x,\quad \mu=(nl)n_xl_x,$$

$$\nu=(lm)l_xm_x,$$

$$i=(ab)^4a_x^2b_x^2,\quad \Delta=(ii')^2i_x^2i'^2_x,\quad \alpha=(il)i_x^3l_x,\quad \beta=(im)i_x^3m_x,\quad \gamma=(in)i_x^3n_x,$$

$$f=a_x^6,\quad j=(ab)^2(ac)^2(bc)^2a_x^2b_x^2c_x^2,\quad \delta=(al)a_x^5l_x,\quad \varepsilon=(jl)j_x^5l_x,\quad \vartheta=(am)a_x^5m_x,$$

$$H=(ab)^2a_x^4b_x^4,\quad \eta=(ai)a_x^5i_x^3,\quad \theta=(Hl)H_x^7l_x,$$

$$\chi=(Hi)H_x^7i_x^3,$$

$$T=(aH)a_x^5H_x^7.$$

Nell'opera citata del sig. Clebsch trovansi le seguenti relazioni:

$$(ai)^3a_x^3i_x\equiv 0, \tag{1}$$

$$A.i+2(al)^2a_x^4-4(ab)^4(ai)^2b_x^2i_x^2-2(ab)^2(ai)^2(bi)^2a_x^2b_x^2\equiv 0, \tag{2}$$

$$(ab)^4(ai)^2b_x^2i_x^2=\Delta+\frac{1}{3}A.i, \tag{3}$$

$$(al)^2a_x^4-2\Delta-\frac{1}{3}A.i\equiv 0, \tag{4}$$

dalle quali segue:

$$(ab)^2(ai)^2(bi)^2a_x^2b_x^2=\frac{1}{6}A.i. \tag{5}$$

Ponendo inoltre:

$$(\varphi\varphi')^2=A_{\varphi\varphi},\qquad (\varphi\psi)^2=A_{\varphi\psi},$$

si hanno le seguenti relazioni fra gl' invarianti delle tre forme quadratiche l, m, n, e gli invarianti fondamentali di f:

$$\left.\begin{aligned} A_{ll}&=2C+\frac{1}{3}AB, & A_{mn}&=\frac{1}{2}BA_{lm}+\frac{1}{3}CA_{ll},\\ A_{mm}&=D, & A_{ml}&=D,\\ A_{nn}&=\frac{1}{2}BA_{mm}+\frac{1}{3}CA_{lm}, & A_{lm}&=\frac{2}{3}(B^2+AC),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$R=-(lm)(mn)(nl)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln}\\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn}\\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn}\end{vmatrix}, \tag{7}$$

[1] V. Clebsch, op. cit. pag. 296.

$$(a\Delta)^2 a_x^4 \Delta_x^2 = \frac{il}{2} - \frac{Bf}{6}, \qquad (8)[1]$$

$$(Hl)^2 H_x^6 = \frac{Ap - Bf}{3} + \frac{5}{7} il, \qquad (9)[2]$$

$$(pl)^2 p_x^4 = \frac{Bi + A\Delta}{3} - \frac{l^2}{10}, \qquad (10)$$

in cui è posto:

$$p = (ai)^2 a_x^4 i_x^2.$$

Si hanno inoltre le seguenti formule:

$$(am)^2 a_x^4 = \frac{Bi + A\Delta}{3} + \frac{1}{2} l^2, \qquad (11)$$

$$(an)^2 a_x^4 = \frac{B\Delta - Ci}{3} + lm, \qquad (12)$$

$$(al)^2 (al')^2 a_x^2 = \frac{2B}{3} . l + \frac{A}{3} . m + 2n, \qquad (13)$$

$$(al)^2 (am)^2 a_x^2 = \frac{2C}{3} . l + \frac{B}{3} . m + \frac{A}{3} n. \qquad (14)$$

Si ha finalmente la rappresentazione tipica della forma fondamentale f:

$$f^5 . f(y) = \xi^6 + \frac{15}{2} H \xi^4 \eta^2 + 20 T \xi^3 \eta^3 + 15 \left(\frac{i}{2} f^2 - \frac{3}{4} H^2 \right) \xi^2 \eta^4 +$$

$$+ 6 (qf^2 - HT) \xi \eta^5 + \left(\frac{A}{2} f^4 - \frac{15}{4} iHf^2 + \frac{45}{8} H^3 + 10 T^2 \right) \eta^6, \qquad (15)$$

in cui le forme f, i, H, T, q s'intendono scritte colle variabili arbitrarie (x_1, x_2), e le variabili (y_1, y_2), (ξ, η) sono legate dalla trasformazione lineare:

$$\xi = \frac{1}{6} \Big[y_1 f'(x_1) + y_2 f'(x_2) \Big], \quad \eta = x_1 y_2 - x_2 y_1. \qquad (16)$$

Ciò posto, vogliamo studiare le proprietà dei covarianti più importanti che costituiscono il sistema completo di f.

§ 1. *La forma* Δ.

Dalla formula:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} Ai$$

segue:

$$(al)^2 (ab)^3 a_x b_x^3 = 2 (\Delta a)^3 \Delta_x a_x^3.$$

Il primo membro è uguale a

$$\frac{1}{2} (ab)^3 a_x b_x \Big\{ (al)^2 b_x^2 - (bl)^2 a_x^2 \Big\} = \frac{1}{2} (ab)^4 a_x b_x l_x \Big\{ (al) b_x + (bl) a_x \Big\} = (il) i_x^3 l_x = \alpha;$$

epperò:

$$(a\Delta)^3 a_x^3 \Delta_x = -\frac{1}{2} \alpha. \qquad (17)$$

[1] Così deve correggersi la formula (5) a pagina 294 nell'op. cit.

[2] Così deve correggersi la formula (6) a pagina 294 nell'op. cit.

Dalla stessa formula segue, sovrapponendo quattro volte la forma f sopra ciascun membro:

$$(al)^2 (ab)^4 b_x^2 = 2 (a\Delta)^4 a_x^2 + \frac{1}{3} A l .$$

Intanto dalla formula:

$$(ab)^4 a_y^2 b_x^2 = i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{3} A . (xy)^2 \tag{18}$$

segue:

$$(ab)^4 (al)^2 b_x^2 = (il)^2 i_x^2 = \frac{1}{3} A . l = m + \frac{1}{3} A . l ;$$

epperò:

$$(a\Delta)^4 a_x^2 = \frac{1}{2} m . \tag{19}$$

Dalla formula:

$$(ii')^2 i_x^2 i'^2_y = \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{1}{3} B . (xy)^2 \tag{20}$$

segue:

$$(ii')^2 (i' l)^2 i_x^2 = (\Delta l)^2 \Delta_x^2 + \frac{1}{3} B . l ;$$

epperò:

$$(\Delta l)^2 \Delta_x^2 = n - \frac{1}{3} B l . \tag{21}$$

Dalla stessa formula si ha:

$$(i\Delta) i_x^3 \Delta_x^3 = \frac{1}{2} (al)^2 (ia) i_x^3 a_x^3 .$$

Si ha intanto:

$$(al)^2 (ia) i_x^3 a_x^3 = (al) (ia) i_x^2 a_x^3 \left\{ (ai) l_x - (li) a_x \right\} = - (ai)^2 (al) a_x^3 i_x^2 l_x +$$
$$+ (al) (ai) (li) i_x^2 a_x^4 .$$

La prima parte del secondo membro, giusta la formula:

$$(ai)^2 a_x^3 a_y i_x^2 = p_x^5 p_y , \tag{22}$$

è uguale a $-(pl) p_x^5 l_x$, e per la formula (4) cap. I (facendo in essa $n = 6$)

$$j = -p + \frac{1}{6} A . f , \tag{23}$$

segue:

$$-(ai)^2 (al) a_x^3 i_x^2 l_x = (jl) j_x^5 l_x - \frac{1}{6} A . (al) a_x^5 l_x = \varepsilon - \frac{1}{6} A \delta .$$

La 2ª parte è uguale a:

$$-\frac{1}{2} (ai) i_x a_x^3 \left\{ (il)^2 a_x^2 + (al)^2 i_x^2 - (ai)^2 l_x^2 \right\} = \frac{1}{2} (ma) m_x a_x^5 + \frac{1}{2} (al)^2 (ia) i_x^3 a_x^3 ;$$

epperò:

$$(i\Delta) i_x^3 \Delta_x^3 = \varepsilon - \frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{6} A \delta . \tag{24}$$

Dalla teoria delle forme biquadratiche seguono inoltre le seguenti:

$$(i\Delta)^2 i_x^2 \Delta_x^2 = \frac{1}{6} B i , \tag{25}$$

$$(i\Delta)^3 i_x \Delta_x \equiv 0 , \tag{26}$$

$$(i\Delta)^4 = C . \tag{27}$$

§ 2. *La forma j.*

Dalla formula:

$$j = -p + \frac{1}{6} A . f$$

si ricava:

$$(ja)^6 = -(pa)^6 + \frac{1}{6} A^2.$$

Intanto è:

$$(pa)^6 = (ai)^2 (ab)^4 (bi)^2 = (ii')^4 = B ;$$

epperò:

$$(ja)^6 = -B + \frac{1}{6} A^2 ,$$

ovvero, ponendo:

$$K = 6B - A^2, \tag{28}$$

si ha:

$$-6 (ja)^6 = 6B - A^2 = K . \tag{29}$$

Dalla stessa formula (23) si ricava:

$$(ja)^5 j_x a_x = -(pa)^5 p_x a_x$$

Intanto, giusta la formula (22) di questo capitolo, è:

$$(pa)^5 p_x a_x = (ab)^3 (ai)^2 (bi)^2 a_x b_x \equiv 0 ;$$

epperò:

$$(ja)^5 j_x a_x \equiv 0 . \tag{30}$$

Similmente si ha:

$$(ja)^4 j_x^2 a_x^2 = -(pa)^4 p_x^2 a_x^2 + \frac{1}{6} A . i .$$

Intanto dalla formula:

$$(ai)^2 a_x^4 i_y^2 = p_x^4 p_y^2 + \frac{3}{5} (xy)^2 . l_x^2 \tag{31}$$

si ottiene:

$$(ai)^2 (ab)^4 b_x^2 i_x^2 = (ap)^4 a_x^2 p_x^2 + \frac{3}{5} (al)^2 a_x^4 ,$$

e per le formule:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} Ai , \quad (ab)^4 (ai)^2 b_x^2 i_x^2 = \Delta + \frac{1}{3} Ai ,$$

segue:

$$(ap)^4 a_x^2 p_x^2 = -\frac{1}{5} \Delta + \frac{2}{15} Ai , \tag{32}$$

e anche:

$$(ja)^4 j_x^2 a_x^2 = \frac{1}{5} \Delta + \frac{1}{30} Ai . \tag{33}$$

Analogamente si ha:

$$(ja)^3 j_x^3 a_x^3 = -(pa)^3 p_x^3 a_x^3 .$$

Intanto dalla formula:

$$(ai)^2 a_x^3 a_y i_y^2 = p_x^3 p_y^3 + \frac{3}{10} (xy)^2 l_x l_y \tag{34}$$

si ottiene:

$$(ai)^2 (ab)^3 a_x b_x^3 i_x^2 = (pa)^3 p_x^3 a_x^3 + \frac{3}{10} (la) l_x a_x^5 .$$

Il primo membro è uguale a:

$$\frac{1}{2}(ab)^3 a_x b_x i_x^2 \left\{ (ai)^2 b_x^2 - (bi)^2 a_x^2 \right\} = \frac{1}{2}(ab)^4 a_x b_x i_x^3 \left\{ (ai) b_x + (bi) a_x \right\} = 0\,;$$

epperò:

$$(ja)^3 j_x^3 a_x^3 = -\frac{3}{10}(al) a_x^5 l_x = -\frac{3}{10}\,\delta\,. \tag{35}$$

Analogamente si ha:

$$(ja)^2 j_x^4 a_x^4 = -(pa)^2 p_x^4 a_x^4 + \frac{1}{6}\,\mathrm{A}\,.\,\mathrm{H}\,.$$

Dalla formula (31) si ottiene:

$$(ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4 = (pa)^2 p_x^4 a_x^4 + \frac{3}{5} f\,.\,l\,;$$

cosicchè, per ottenere il covariante:

$$(ja)^2 j_x^4 a_x^4\,,$$

resta a calcolare la forma $(ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4$.

Si ha l'identità:

$$a_x^2 b_x^2 \left\{ (ab)^2 (ai)^2 b_x^2 i_x^2 + (bi)^2 (ba)^2 i_x^2 a_x^2 + (ia)^2 (ib)^2 a_x^2 b_x^2 \right\} =$$

$$= 2\,(ab)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^2 i_x^2 + (ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ (bi)^4 a_x^4 + (ia)^4 b_x^4 + (ab)^4 i_x^4 \right\} a_x^2 b_x^2 = f\,.\,l + \frac{1}{2} i^2.$$

Si ha d'altra parte:

$$(ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4 - (ai)^2 (ab)^2 a_x^2 b_x^4 i_x^2 = (ai)^2 a_x^2 b_x^4 \left\{ (bi)^2 a_x^2 - (ab)^2 i_x^2 \right\} =$$

$$= (ai)^3 a_x^2 b_x^5 \left\{ (bi)\, a_x - (ab)\, i_x \right\} = -\,(ai)^3 (ib)\, a_x^3 b_x^5 - (ai)^3 (ab) a_x^2 b_x^5\, i_x\,.$$

Intanto dall'identità:

$$(ai)^3 a_x^3 i_x \equiv 0\,,$$

si ottiene:

$$(ai)^3 (ab)\, a_x^2 b_x^5 i_x + (ai)^3 (ib)\, a_x^3 b_x^5 = \frac{2}{3}(ai)^3 (ib)\, a_x^3 b_x^5\,,$$

e per la formula:

$$(ai)^3 a_x^3 i_y = \frac{3}{4}\, l\,.\,(xy)\,, \tag{36}$$

si ha:

$$\frac{2}{3}(ai)^3 (ib) a_x^3 b_x^5 = -\frac{1}{2}\, l\,.\,f\,;$$

cosicchè:

$$(ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4 = (ab)^2\,(ai)^2 a_x^2 b_x^4 i_x^2 + \frac{1}{2}\, l\,.\,f\,.$$

Si conchiudono pertanto le due relazioni:

$$(ai)^2 (ab)^2 a_x^2 b_x^4 i_x^2 = \frac{1}{6}(i^2 + f\,.\,l)\,, \tag{37}$$

$$(ai)^2 (bi)^2\, a_x^4 b_x^4 = \frac{2}{3} f\,.\,l + \frac{1}{6} i^2. \tag{38}$$

Si ha dunque:

$$(ap)^2 a_x^4\, p_x^4 = \quad \frac{1}{6}\, i^2 + \frac{1}{15} f.l\,,$$

$$(j\,a)^2 j_x^4\, a_x^4 = -\, \frac{1}{6}\, i^2 - \frac{1}{15} f.l + \frac{1}{6} A.H. \qquad (39)$$

Calcoliamo in fine il covariante:

$$(ja)\, j_x^5\, a_x^5 = -(pa)\, p_x^5\, a_x^5.$$

Si ha:

$$(pa)\, p_x^5 a_x^5 = (ai)^2 (ab)\, a_x^3\, i_x^2\, b_x^5 = \frac{1}{2}(ab)\, a_x^3 b_x^3\, i_x^2 \left\{ (ai)^2 b_x^2 - (bi)^2 a_x^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(ab)^2 a_x^3 b_x^3 i_x^3 \left\{ (ai)\, b_x + (bi)\, a_x \right\} = (Hi)\, H_x^7\, i_x^3\,;$$

epperò:

$$(ja)\, j_x^5\, a_x^5 = (iH)\, i_x^3\, H_x^7 = \chi\,. \qquad (40)$$

L'invariante A_j.

Dalla formula:

$$j = -p + \frac{1}{6} A.f$$

si ottiene:

$$(jj')^6 = (pp')^6 + \frac{1}{36} A^3 - \frac{1}{3} A.(pa)^6.$$

Intanto si ha:

$$(pp')^6 = (ap)^4 (ai)^2 (ip)^2 = -\,\frac{1}{5}(\Delta i)^4 + \frac{2}{15} AB = -\,\frac{1}{5}\, C + \frac{2}{15} AB\,,$$

giusta la formula (32); inoltre è:

$$(ap)^6 = (ab)^4 (ai)^2 (bi)^2 = B\,;$$

dunque:

$$-\, 2^2 . 3^2 . 5\, A_j = 2^2 . 3^2 (C + AB) - 5A^3 = 2 \cdot 3^2 A_{ll} + 5AK\,. \qquad (41)$$

Il covariante i_j. Per calcolare questa forma cominciamo dal calcolare il covariante i_p. Dalla formula (31) si ottiene:

$$(ai)^2 (ap)^4\, p_x^2\, i_x^2 = (pp')^4\, p_x^2\, p'^2_x + \frac{3}{5}(pl)^2 p_x^4\,,$$

$$(ai)^2 (ab)^4 (bi')^2\, i_x^2\, i'^2_x = (pa)^4 (ai)^2 p_x^2\, i_x^2 + \frac{3}{5}(al)^2 (ai)^2 a_x^2\, i_x^2.$$

D' altra parte, giusta la formula:

$$(ab)^4 a_x^2 b_y^2 = i_x^2\, i_y^2 + \frac{1}{3} A.(xy)^2\,,$$

si ottiene:

$$(ab)^4 (ai)^2 (bi')^2\, i_x^2\, i'^2_x = (ii')^2 (ii'')^2\, i'^2_x\, i''^2_x + \frac{1}{3} A.\Delta = \frac{1}{2} B.i + \frac{1}{3} A.\Delta.$$

Dalla formula:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A.i$$

segue:

$$(al)^2 (ai)^2 a_x^2\, i_x^2 = 2\,(\Delta i)^2\, \Delta_x^2\, i_x^2 + \frac{1}{3} A.(ii')^2\, i_x^2 i'^2_x = \frac{1}{3}(Bi + A\Delta)\,;$$

epperò:

$$(ap)^4 (ai)^2 p_x^2 i_x^2 = \frac{3}{10} B . i + \frac{2}{15} A . \Delta ;$$

e poichè:

$$(pl)^2 p_x^4 = \frac{Bi + A\Delta}{3} - \frac{l^2}{10},$$

segue:

$$(pp')^4 p_x^2 p'^2_x = i_p = \frac{1}{10} Bi - \frac{1}{15} A\Delta + \frac{3}{50} l^2. \qquad (42)$$

Ciò posto si ha:

$$i_j = (jj')^4 j_x^2 j'^2_x = (pp')^4 p_x^2 p'^2_x + \frac{1}{36} A^2 . i - \frac{1}{3} A (ap)^4 a_x^2 p_x^2 ,$$

e facendo uso della formula (32):

$$(ap)^4 a_x^2 p_x^2 = - \frac{1}{5} \Delta + \frac{2}{15} Ai ,$$

si ottiene:

$$60\, i_j = Ki + \frac{18}{5} l^2 . \qquad (43)$$

Il covariante Δ_j. Ponendo:

$$l^2 = \varphi = \varphi_x^4,$$

si ricava:

$$l_x^2 l'^2_y = \varphi_x^2 \varphi_y^2 + \frac{1}{3} A_{ll} . (xy)^2 ;$$

epperò:

$$(il)^2 i_x^2 . l' = (\varphi i)^2 \varphi_x^2 i_x^2 + \frac{1}{3} A_{ll} . i ,$$

$$(ll')^2 . l' = (\varphi l)^2 \varphi_x^2 + \frac{1}{3} A_{ll} . l .$$

Si ha intanto:

$$60^2 \Delta_j = K^2 \Delta + \frac{18^2}{5^2} (\varphi\varphi')^2 \varphi_x^2 \varphi'^2_x + \frac{36}{5} K (\varphi i)^2 \varphi_x^2 i_x^2 ,$$

e per le formule precedenti:

$$60^2 \Delta_j = K^2 \Delta + \frac{36}{5} K \left(lm - \frac{1}{3} A_{ll} . i \right) + \frac{3 . 6^2}{5^2} A_{ll} . l^2 . \qquad (44)$$

Dalle formule (43) e (44) si ricavano inoltre i seguenti invarianti:

$$\left.\begin{aligned} 10^2 B_j &= \frac{2 . 3}{5^2} A_{ll}^2 + \frac{1}{3 . 5} AKA_{ll} + \frac{1}{2^3 . 3 . 5} K^3 + \frac{1}{2^3 . 3 . 5} A^2 K^2 , \\ 10^4 C_j &= \frac{1}{2} K^2 D + \frac{2^2 . 3}{5^2} A_{ll}^3 + \frac{1}{5} AKA_{ll}^2 + \frac{7}{2^3 . 3^3 . 5} K^3 A_{ll} - \frac{1}{2^2 . 3 . 5} A^2 K^2 A_{ll} \\ &\quad - \frac{5}{2^4 . 3^5} AK^4 - \frac{5}{2^4 . 3^5} A^3 K^3 . \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

I covarianti l_j, m_j.

Giusta le formule:

$$l_j = (ji_j)^4 j_x^2 , \qquad m_j = (i_j l_j)^2 i_j^2 ,$$

si trova:

$$\left.\begin{aligned}10^2 l_j &= \left(\frac{2}{5}A_{ll}+\frac{5}{2.3^2}AK\right).l-K.m,\\ 10^3 m_j &= \left(\frac{2^2}{5^2}A_{ll}^2-\frac{2^2}{3^2.5}AKA_{ll}-\frac{1}{2.3^2.5}K^3-\frac{1}{2.3^2 5}A^2K^2\right).l+\\ &+\frac{K}{3}\left(\frac{2^2}{5}A_{ll}+\frac{5}{2^2.3^2}AK\right).m-\frac{1}{2.3}K^2.n,\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

mercè l' ultima delle quali si può calcolare il quarto invariante fondamentale della forma j, cioè $D_j = (m_j m'_j)^2$.

Un' importante applicazione di queste formule è il calcolo del discriminante e degl' invarianti R_j, F_j, E_j della forma j.

Ponendo:

$$\begin{aligned}D_j &= -2^7.3A_j^5+2^4.3.5^3A_j^3B_j+2^4.5^4.A_j^2C_j-2.3.5^5A_jB_j^2-\\ &\qquad -2^2.3.5^5B_jC_j-3^2.5^5D_j,\\ R_j &= -(l_jm_j)(m_jn_j)(n_jl_j),\\ F_j &= 2^{10}.3A_j^6-2^6.3.5^2.11A_j^4B_j-2^6.5^3.7A_j^3C_j+2^3.3.5^4.17A_j^2B_j^2+\\ &\qquad +2^4.3^2.5^5A_jB_jC_j-3.5^7B_j^3+2.3^2.5^6C_j^2,\\ E_j &= 2.3A_j^3-3.5^2A_jB_j-2.5^3C_j,\end{aligned}$$

si trova:

$$-2^{10}.3^9D_j = K^3.R_{jH}, \quad (47)$$

$$10^9R_j = -\frac{K^3R}{2^6.3^9.5}\left\{3^5K^3(2^3.3^2A_{ll}+11AK)+2^4R_{jH}\right\}, \quad (48)$$

in cui è posto:

$$R_{jH} = 3^8DK^2-2^2.3^3AK^4+2^2.5A^3K^3-3^5A_{ll}K^3-3^3A^2K^2A_{ll}-2^2.3^5AKA_{ll}^2-2^4.3^6A_{ll}^3,$$

$$10^8F_j = \frac{5^6}{2^7.3^{11}}K^2\left\{-3^2K.M+2^4AR_{jH}(2^2.3^5D-2.3^2.11KA_{ll}+3A^3K-61AK^2)\right\}, \quad (49)$$

in cui è posto:

$$\begin{aligned}M &= 2^9.3^8A_{ll}^4+2^6.3^6.17AKA_{ll}^3+2^4.3^5.13A^2K^2A_{ll}^2+2^2.3^8K^3A_{ll}^2+2^2.3^2.5.7A^3K^3A_{ll}\\ &\qquad -2^2.3^6.13AK^4A_{ll}+11A^4K^4-2.3^4.37A^2K^5+3^7K^6,\end{aligned}$$

$$E_j = -\frac{1}{2^6.3^8.5}\left\{(3^2A_{ll}-2AK)(2^3.3^2A_{ll}+11AK)^2+2^2R_{jH}\right\}. \quad (50)$$

§ 3. *La forma* H.

Si trovano le seguenti formule:

$$(ab)^2a_x^4b_x^2b_y^2 = H_x^6H_y^2+\frac{2}{7}(xy)^2.i, \quad (51)$$

$$(ab)^2a_x^3b_x^3a_yb_y = H_x^6H_y^2-\frac{3}{14}(xy)^2.i, \quad (52)$$

$$(ab)^2a_x^4b_xb_y^3 = H_x^5H_y^3+\frac{6}{7}(xy)^2.i_x^3i_y, \quad (53)$$

$$(ab)^2a_x^3b_x^2a_yb_y^2 = H_x^5H_y^3-\frac{1}{7}(xy)^2.i_x^3i_y; \quad (54)$$

$$(ab)^2a_x^4b_y^4 = H_x^4H_y^4+\frac{12}{7}(xy)^2.i_x^2i_y^2+\frac{1}{5}(xy)^4.A, \quad (55)$$

$$(ab)^2 a_x^3 b_x a_y b_y^3 = H_x^4 H_y^4 + \frac{3}{14}(xy)^2 . i_x^2 i_y^2 - \frac{1}{20}(xy)^4 . A\,, \tag{56}$$

$$(ab)^2 a_x^2 b_x^2 a_y^2 b_y^2 = H_x^4 H_y^4 + \frac{2}{7}(xy)^2 . i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{30}(xy)^4 . A\,, \tag{57}$$

$$(ab)^2 a_x^4 b_y^2 b_z^2 = H_x^4 H_y^2 H_z^2 + \frac{6}{7}(xy)^2 . i_x^2 i_z^2 + \frac{6}{7}(xz)^2 . i_x^2 i_y^2 - $$
$$- \frac{4}{7}(yz)^2 i_x^4 + \frac{1}{5}(xy)^2 (xz)^2 . A\,, \tag{58}$$

$$(ab)^2 a_x^2 a_t^2 b_y^2 b_z^2 = H_x^2 H_t^2 H_y^2 H_z^2 + \frac{3}{7}(xy)^2 . i_z^2 i_t^2 + \frac{3}{7}(xt)^2 . i_y^2 i_z^2 +$$
$$+ \frac{3}{7}(yz)^2 . i_x^2 i_t^2 + \frac{3}{7}(zt)^2 . i_x^2 i_y^2 - \frac{4}{7}(xz)^2 . i_y^2 i_t^2 -$$
$$- \frac{4}{7}(yt)^2 . i_x^2 i_z^2 + \frac{1}{10}(xy)^2 (zt)^2 . A + \frac{1}{10}(xt)^2 (yz)^2 . A -$$
$$- \frac{1}{15}(xz)^2 (yt)^2 . A\,. \tag{59}$$

La forma $(aH)^2 a_x^4 H_x^6$. Dalla formula (52) si ottiene:

$$(ab)^2 (ac)(bc) a_x^3 b_x^3 c_x^4 = (aH)^2 a_x^4 H_x^6 - \frac{3}{14} i . f\,.$$

Il primo membro è uguale a:

$$\frac{1}{3}(ab)(ac)(bc) a_x^3 b_x^3 c_x^3 \left\{ (ab) c_x - (ac) b_x + (bc) a_x \right\} = 0\,;$$

eppero:

$$(aH)^2 a_x^4 H_x^6 = \frac{3}{14} i . f\,, \tag{60}$$

come del resto segue dalla formula (5) cap. I, ponendo $n=6$.

La forma $(aH)^3 a_x^3 H_x^5$. Dalla formula (54) si ricava:

$$(ab)^2 (ac)(bc)^2 a_x^3 b_x^2 c_x^3 = -(aH)^3 a_x^3 H_x^5 + \frac{1}{7}(ai) a_x^5 i_x^3\,.$$

Intanto il primo membro è identicamente nullo, perchè càmbia di segno scambiando a con c, dunque:

$$(aH)^3 a_x^3 H_x^5 = \frac{1}{7}(ai) a_x^5 i_x^3\,. \tag{61}$$

La forma $(aH)^4 a_x^2 H_x^4$. Dalla formula (55) si ottiene:

$$(ab)^2 (bc)^4 a_x^4 c_x^2 = (aH)^4 a_x^2 H_x^4 + \frac{12}{7}(ai)^2 a_x^4 i_x^2 + \frac{1}{5} A . f\,.$$

Si ha intanto dalla formula: $(ab)^4 a_x^2 b_y^2 = i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{3} A . (yx)^2$:

$$(ab)^4 (bc)^2 a_x^2 c_x^4 = (ai)^2 a_x^4 i_x^2 + \frac{1}{3} A . f\,;$$

si ha inoltre:

$$(ai)^2 a_x^4 i_x^2 = -j + \frac{1}{6} A . f\,;$$

epperò:

$$(aH)^4 a_x^2 H_x^4 = \frac{5}{7} j + \frac{1}{70} A . f\,. \tag{62}$$

La forma $(aH)^5 a_x H_x^3$. Dalla formula (54) si ha:

$$(ab)^2 (ac)^3 (bc)^2 a_x b_x^2 c_x = (Ha)^5 H_x^3 a_x - \frac{1}{7} (ia)^3 i_x a_x^3 .$$

Il primo membro è uguale a zero, perchè cambia di segno scambiando a con c; la forma $(ia)^3 i_x a_x^3$ è identicamente nulla, giusta la formula (1) di questo capitolo, dunque:

$$(aH)^5 a_x H_x^3 \equiv 0 . \tag{63}$$

La forma $(aH)^6 H_x^2$. Dalla formula (51) si ha:

$$(ab)^2 (ac)^4 (bc)^2 b_x^2 = (aH)^6 H_x^2 + \frac{2}{7} (ai)^4 a_x^2 .$$

Intanto è:

$$(ac)^4 (ab)^2 (cb)^2 b_x^2 = (ai)^4 a_x^2 = l :$$

dunque:

$$(aH)^6 H_x^2 = \frac{5}{7} . l . \tag{64}$$

La forma $(iH)^2 i_x^2 H_x^6$. Dalla formula (51) si ottiene:

$$(ab)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^2 i_x^2 = (iH)^2 i_x^2 H_x^6 + \frac{2}{7} i^2 .$$

Intanto è, per la formula (37) di questo capitolo,

$$(ab)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^2 i_x^2 = \frac{1}{6} (i^2 + f . l) ;$$

epperò:

$$(iH)^2 i_x^2 H_x^6 = \frac{1}{6} f l - \frac{5}{42} i^2 . \tag{65}$$

La forma $(iH)^3 i_x H_x^5$. Dalla formula (53) si ha:

$$(ab)^2 (bi)^3 a_x^4 b_x i_x = (Hi)^3 H_x^5 i_x ,$$

e per la formula: $(bi)^3 b_x i_x b_y^2 = -\frac{1}{2} l_x l_y . (xy)$, si ottiene:

$$(iH)^3 i_x H_x^5 = -\frac{1}{2} (al) a_x^5 l_x . \tag{66}$$

La forma $(iH)^4 H_x^4$. Dalla formula (55) si ha:

$$(ab)^2 (bi)^4 a_x^4 = (iH)^4 H_x^4 + \frac{12}{7} (ii')^2 i_x^2 i'^2_x + \frac{1}{5} A . i ;$$

e poichè: $(bi)^4 (ba)^2 a_x^4 = (la)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A . i$, si conchiude:

$$(iH)^4 H_x^4 = \frac{2}{7} \Delta + \frac{2}{15} A . i . \tag{67}$$

La forma $(HH')^2 H_x^6 H_x'^6$. Dalla formula (3) del capitolo I, ponendo $n = 6$, si ricava:

$$(HH')^2 H_x^6 H'^6_x = \frac{1}{3} j . f - \frac{1}{14} i . H . \tag{68}$$

La forma $(HH')^4 H_x^4 H_x'^4$. Dalla formula (55) si ha:

$$(HH')^4 H_x^4 H'^4_x = (ab)^2 (bH)^4 a_x^4 H_x^4 - \frac{12}{7} (iH)^2 i_x^2 H_x^6 - \frac{1}{5} A . H .$$

Si ha intanto dalla stessa formula (55):

$$(ab)^2 (bc)^4 (cd)^2 a_x^4 d_x^4 = (ab)^2 (bH)^4 H_x^4 a_x^4 + \frac{12}{7} (ai)^2 (ab)^2 a_x^2 b_x^4 i_x^2 + \frac{1}{5} A . H .$$

Il primo membro, giusta la formula $(cb)^4 b_x^2 c_y^2 = i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{3} A . (xy)^2$, è uguale a:

$$(ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4 + \frac{1}{3} A . H ;$$

epperò:

$$(ab)^2 (bH)^4 H_x^4 a_x^4 = (ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4 - \frac{12}{7} (ai)^2 (ab)^2 a_x^2 b_x^4 i_x^2 + \frac{2}{15} A . H ;$$

donde segue:

$$(HH')^4 H_x^4 H_x'^4 = (ai)^2 (bi)^2 a_x^4 b_x^4 - \frac{12}{7} (ai)^2 (ab)^2 a_x^2 b_x^4 i_x^2 - \frac{12}{7} (iH)^2 i_x^2 H_x^6 - \frac{1}{15} A . H ,$$

e per le formule (37), (38), (65) di questo capitolo:

$$i_H = (HH')^4 H_x^4 H_x'^4 = -\frac{2}{3 . 7} l . f + \frac{5^2}{2 . 3 . 7^2} i^2 - \frac{1}{3 . 5} A . H . \qquad (69)$$

La forma $(HH')^6 H_x^2 H_x'^2$. Dalla formula (51) si ha:

$$(ab)^2 (aH)^4 (bH)^2 b_x^2 H_x^2 = (HH')^6 H_x^2 H_x'^2 + \frac{2}{7} (iH)^4 H_x^4 .$$

Intanto dalla formula: (58) si ottiene:

$$(ab)^2 (aH)^4 (bH)^2 b_x^2 H_x^2 = (ab)^2 (ac)^4 (cd)^2 (bd)^2 b_x^2 d_x^2 + \frac{4}{7} (ai)^4 (ab)^2 b_x^4 -$$

$$- \frac{6}{7} (ab)^2 (ai)^2 (bi)^2 a_x^2 b_x^2 - \frac{6}{7} (ab)^4 (ai)^2 b_x^2 i_x^2 - \frac{1}{5} A . (ab)^4 a_x^2 b_x^2 ;$$

inoltre dalla formula: $(ac)^4 a_x^2 c_y^2 = i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{3} (xy) . A$, segue:

$$(ac)^4 (ab)^2 (cd)^2 (bd)^2 b_x^2 d_x^2 = (ab)^2 (ai)^2 (bi)^2 a_x^2 b_x^2 + \frac{1}{3} A . (ab)^4 a_x^2 b_x^2 ;$$

ed è per la formula (5) di questo capitolo:

$$(ab)^2 (ai)^2 (bi)^2 a_x^2 b_x^2 = \frac{1}{6} A . i ;$$

dunque:

$$r_H = (HH')^6 H_x^2 H_x'^2 = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{6} A . i + \frac{10}{7} \Delta \right) . \qquad (70)$$

L'invariante $(HH')^8$. Dalla formula (55) si ha:

$$(ab)^2 (aH)^4 (bH)^4 = (ab)^2 (ac)^4 (bd)^4 (cd)^2 - \frac{12}{7} (ab)^4 (ai)^2 (bi)^2 - \frac{1}{5} A . (ab)^6 .$$

Intanto è: $(ac)^4 (ab)^2 (cd)^2 (bd)^4 = (ai)^2 (bi)^2 (ab)^4 + \frac{1}{3} A^2 ; (ab)^4 (ai)^2 (bi)^2 = (ii')^4 =$ $= B$; dunque:

$$(HH')^8 = - \frac{5}{7} B + \frac{2}{15} A^2 . \qquad (71)$$

§ 4. *La forma* δ.

La forma i_δ. Dalla formula:

$$(al)\, a_x^4 a_y l_y = \delta_x^4 \delta_y^2 + \frac{2}{3}(xy)(al)^2 a_x^3 a_y = \delta_x^4 \delta_y^2 + \frac{4}{3}(xy).\Delta_x^3 \Delta_y + \frac{2}{9} \mathrm{A}(xy).\, i_x^3 i_y \quad (72)$$

segue:

$$(al)(a\delta)^4 a_x l_x \delta_x^2 = (\delta\delta')^4 \delta_x^2 \delta'^2_x + \frac{4}{3}(\Delta\delta)^3 \Delta_x \delta_x^3 + \frac{2}{9} \mathrm{A}\,(i\delta)^3 i_x \delta_x^3,$$

$$(al)(ab)^4 (bl') a_x b_x l_x l'_x = (\delta a)^4 (al) a_x l_x \delta_x^2 + \frac{2}{3}(al)^2 (ab)^3 (bl') a_x b_x^2 l'_x .$$

Il secondo termine del secondo membro è uguale a:

$$\frac{1}{3}(ab)^3 a_x b_x l'_x \Big\{ (al)^2 (bl') b_x - (bl)^2 (al') a_x \Big\} =$$

$$= \frac{1}{3}(ab)^3 a_x b_x l'_x \Big\{ (ab)(al)(bl') l_x + \Big[(al)(bl') - (al')(bl) \Big] (bl) a_x \Big\} =$$

$$= \frac{1}{3}(ab)^4 (al)(bl') a_x b_x l_x l'_x + \frac{1}{3}(ab)^4 (ll')(bl) a_x^2 b_x^2 l'_x =$$

$$= \frac{1}{3}(ab)^4 (al)(bl') a_x b_x l_x l'_x - \frac{1}{6} \mathrm{A}_{ll} . i ;$$

dunque:

$$(a\delta)^4 (al) a_x l_x \delta_x^2 = \frac{2}{3}(ab)^4 (al)(bl') a_x b_x l_x l'_x + \frac{1}{6} \mathrm{A}_{ll} . i .$$

Dalla formula:

$$(ab)^4 a_x b_x a_y b_z = i_x^2 i_y i_z - \frac{1}{6} \mathrm{A} . (xy)(xz), \quad (73)$$

si ottiene:

$$(ab)^4 (al)(bl') a_x b_x l_x l'_x = (il)(il') i_x^2 l_x l'_x - \frac{1}{6} \mathrm{A} . l^2 .$$

Il primo termine del 2° membro è uguale a:

$$\frac{1}{2} i_x^2 \Big\{ (il)^2 l'^2_x + (il')^2 l_x^2 - (ll')^2 i_x^2 \Big\} = ml - \frac{1}{2} \mathrm{A}_{ll} . i ;$$

epperò:

$$(ab)^4 (al)(bl') a_x b_x l_x l'_x = ml - \frac{1}{2} \mathrm{A}_{ll} . i - \frac{1}{9} \mathrm{A} . l^2 ,$$

$$(a\delta)^4 (al) a_x l_x \delta_x^2 = \frac{2}{3} ml - \frac{1}{6} \mathrm{A}_{ll} . i - \frac{1}{9} \mathrm{A} . l^2 . \quad (74)$$

Le forme $(\Delta\delta)^3 \Delta_x \delta_x^3$, $(i\delta)^3 i_x \delta_x^3$ si possono calcolare mediante la formula:

$$(al)\, a_x^3 a_y^2 l_y = \delta_x^3 \delta_y^3 + \frac{1}{2}(xy).(al)^2 a_x^2 a_y^2 , \quad (75)$$

dalla quale si ottiene:

$$(al))\,(ai)^3 a_x^2 l_x i_x = (\delta i)^3 \delta_x^3 i_x + \frac{1}{2}(al)^2 (ai)^2 a_x^2 i_x^2 ,$$

$$(al)(a\Delta)^3 a_x^2 l_x \Delta_x = (\delta\Delta)^3 \delta_x^3 \Delta_x + \frac{1}{2}(al)^2 (a\Delta)^2 a_x^2 \Delta_x^2 ;$$

si ha intanto:

$$(al)(ai)^3 a_x^2 l_x i_x = \frac{1}{2}(ai)^2 a_x^2 \left\{ (ai)^2 l_x^2 + (al)^2 i_x^2 - (il)^2 a_x^2 \right\},$$

$$(al)(a\Delta)^3 a_x^2 l_x \Delta_x = \frac{1}{2}(a\Delta)^2 a_x^2 \left\{ (a\Delta)^2 l_x^2 + (al)^2 \Delta_x^2 - (\Delta l)^2 a_x^2 \right\};$$

epperò:

$$(\delta i)^3 \delta_x^3 i_x = \frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2}(am)^2 a_x^4 = \frac{1}{4} l^2 - \frac{Bi + A\Delta}{6}, \tag{76}$$

$$(\delta\Delta)^3 \delta_x^3 \Delta_x = -\frac{1}{4} l^2 + \frac{1}{6} B \,.\, \Delta + \frac{1}{18}(3C + AB)\, i. \tag{77}$$

Dalle formule (74,), (76), (77) si conchiude:

$$(\delta\delta')^4 \delta_x^2 \delta'^2_x = i_j = \frac{1}{3}\left\{ l\left(m - \frac{1}{6} Al\right) - \frac{1}{6} A_{ll} \,.\, i + \frac{1}{9} K\Delta \right\}. \tag{78}$$

L'invariante A_δ. Si ha:

$$A_\delta = (al)(a\delta)^5 (l\delta).$$

Intanto dalla formula:

$$(al) a_x^5 l_y = \delta_x^5 \delta_y + \frac{5}{6}(xy) \,.\, (al)^2 a_x^4, \tag{79}$$

segue:

$$(ab)^5 (ll')(al)(bl') = (a\delta)^5 (l\delta)(al) + \frac{5}{6}(ab)^4 (al')^2 (bl)^2,$$

in cui il primo membro è uguale a:

$$\frac{1}{2}(ab)^5 (ll') \left\{ (al)(bl') - (al')(bl) \right\} = \frac{1}{2} A \,.\, A_{ll};$$

si ha inoltre:

$$(ab)^4 (al')^2 (bl)^2 = A_{lm} + \frac{1}{3} A_{ll} \,.\, A;$$

donde segue:

$$18 A_\delta = 4A \,.\, A_{ll} - 15 A_{lm}. \tag{80}$$

CAPITOLO III.

Forme particolari che assume la sestica binaria, supponendo identicamente nulli dei covarianti.

Stabilite le relazioni che passano fra i principali covarianti della forma fondamentale, vogliamo caratterizzare le sestiche binarie per le quali si annullano identicamente dei covarianti. Il sig. Clebsch nell'opera citata si è limitato a studiare quei casi nei quali è impossibile la rappresentazione tipica delle forme del sest'ordine (¹). A questo proposito vogliamo far notare, come le condizioni dallo stesso autore stabilite a pag. 439 e seg. per la radice tripla della forma fondamentale debbonsi diversamente enunciare.

(¹) V. op. cit. 437 e segg.

Infatti egli dice che, se una sestica binaria ammette un elemento triplo, i suoi tre covarianti quadratici l, m, n, hanno in comune lo stesso elemento; e reciprocamente. Ora nel § 7 di questo capitolo mostreremo che, se i tre covarianti quadratici l, m, n, ammettono un elemento comune, hanno comune l'altro elemento; pertanto le condizioni per la radice tripla della sestica binaria sono da ricercare solamente nel caso in cui annullasi identicamente il covariante $\nu = (lm)\, l_x\, m_x$.

§ 1. $i \equiv 0$.

In questo caso si vede facilmente che si annullano tutti gl'invarianti della sestica ad eccezione del 1° invariante A; dei covarianti poi annullansi tutti ad eccezione dei tre j, H, T, dei quali il 1° non differisce dalla forma fondamentale che per lo invariante A, giusta la formula (23) del cap. II, che nel caso presente diviene:

$$j = \frac{1}{6} A . f .$$

Poichè è $i \equiv 0$, i centri armonici di quart'ordine di un polo qualunque rispetto agli elementi fondamentali formano un gruppo equianarmonico. Inoltre, per la formula precedente, gli elementi fondamentali godono della proprietà caratteristica, che i centri armonici di quart'ordine di uno di essi rispetto agli stessi elementi fondamentali formano un gruppo armonico ed equianarmonico, epperò tre di quei centri armonici coincidono in un solo. Indicando dunque con α un elemento fondamentale, si avrà:

$$(a\alpha)^2 a_z^4 = \alpha . \beta^3 ;$$

epperò:

$$(a\beta)^2 (a\alpha)^4 = 0 , \quad (a\beta)^2 (a\alpha)^3 a_z \equiv 0 , \quad (a\beta)^2 (a\alpha)^2 a_z^2 \equiv 0 ;$$

dunque α è elemento triplo della polare $(a\beta)^2 a_z^4$, epperò β dev'essere elemento fondamentale, e si avrà:

$$(a\beta)^2 a_z^4 = \alpha^3 . \beta .$$

Si conchiude allora facilmente, assumendo come punti coordinati nella rappresentazione geometrica gli elementi fondamentali α, β, la seguente forma canonica di f:

$$f = 6\alpha\beta\, (a_1 \alpha^4 + a_5 \beta^4) ;$$

cosicchè f rappresenta il covariante di sesto grado di una forma biquadratica.

Reciprocamente, se f per trasformazione lineare può ridursi alla forma binomia:

$$f = 6 a_1 x_1^5 x_2 + 6 a_5 x_1 x_2^5 ,$$

si trova facilmente $i \equiv 0$. Dunque:

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f rappresenti il covariante di sesto « grado di una forma biquadratica sono espresse dall'identica equaziome $i \equiv 0$ (¹).

§ 2. $\Delta \equiv 0$.

In questo caso è: $B = (i\, i')^4 = 0$, $C = (i\, \Delta)^4 = 0$, epperò, giusta le formule (6) del cap. II, è ancora $A_{ll} = 0$, $A_{lm} = 0$, e uguale a zero anche la risultante di i ed l, la quale è:

$$R_{il} = 2 A_{ll}^2 B - 4 A_{ll} D + A_{lm}^2 .$$

(¹) V. Clebsch, op. cit. pag. 446 e seg.

Supponendo che non si annulli identicamente l, si potrà porre:

$$i = \alpha_0 x_1^4, \qquad l = x_1^2.$$

Dalla forma:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2 + 20 a_3 x_1^3 x_2^3 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4 + 6 a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6,$$

calcolando il covariante $(al)^2 a_x^4$, che giusta la formula (4) cap. II è uguale a $\frac{1}{3} A . i$, si trova: $a_2 x_1^4 + 4a_3 x_1^3 x_2 + 6a_4 x_1^2 x_2^2 + 4a_5 x_1 x_2^3 + a_6 x_2^4$;
epperò:

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0; \qquad (ai)^4 a_x^2 = l \equiv 0;$$

e per la formula:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A . i,$$

se i non si annulla identicamente, dev'essere $A = 0$. Si conchiude dunque il teorema:

« Se annullasi identicamente Δ, si annulla anche l e A e la forma fondamen- « tale acquista un elemento quadruplo ».

Reciprocamente: « Se f per trasformazione lineare può ridursi alla forma:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2,$$

« dimostrasi facilmente che i diviene un biquadrato, epperò $\Delta \equiv 0$ ».

Queste stesse condizioni possono essere diversamente espresse.

Supponendo $B = C = D = 0$, giusta le formule (6) cap. II, si avrà $A_{ll} = A_{mm} = A_{nn} = A_{lm} = A_{mn} = 0$, e se non è $l \equiv 0$, si potrà porre:

$$l = x_1^2, \qquad m = x_2^2, \qquad n = n_0 . x_1^2,$$

in cui n_0 rappresenta un coefficiente numerico.

Intanto per le relazioni:

$$i = \alpha_0 x_1^4 + 4\alpha_1 x_1^3 \alpha_2 + 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + 4\alpha_3 x_1 x_2^3 + \alpha_4 x_2^4,$$
$$m = \alpha_2 x_1^2 + 2\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_2^2,$$

si ottiene: $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, e poichè, per le condizioni $B = C = 0$, i deve ammettere un elemento triplo, dev'essere anche $\alpha_2 = 0$, dunque $m \equiv 0$.

Giusta la relazione:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A . i,$$

l'elemento triplo di i dev'essere anche triplo per la forma:

$$(al)^2 a_x^4 = a_2 x_1^4 + 4a_3 x_1^3 x_2 + 6a_4 x_1^2 x_2^2 + 4a_5 x_1 x_2^3 + a_6 x_2^4,$$

epperò dev'essere: $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, epperò anche $a_3 = 0$, giusta la relazione $0 = \alpha_2 = \frac{1}{3}(a_0 a_6 - 9 a_2 a_4 + 8 a_3^2)$, ed f assume la forma:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2;$$

cosicchè in questo caso annullansi i tre covarianti quadratici, epperò o è $A = 0$ e allora, come vedremo in seguito, f riducesi alla forma precedente; ovvero è $A \lesseqgtr 0$ e allora annullasi identicamente i, e si torna al caso precedente. Si conchiude pertanto il seguente teorema:

« Se annullansi i tre invarianti B, C, D ed è $A \gtrless 0$, annullasi identicamente il covariante i; se invece annullansi tutti e quattro gl'invarianti A, B, C, D, annullasi identicamente il covariante Δ ».

§ 3. $j \equiv 0$.

In questo caso, giusta il teorema VI del cap. I, si conchiude:

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f riducasi alla forma binomia « $a_0 x_1^6 + a_6 x_2^6$, mercè trasformazione lineare, sono espresse dalla identica equazione:

$$j \equiv 0.$$

§ 4. $l \equiv 0$.

Dalla relazione:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A . i,$$

se è $A \gtrless 0$, si conchiude che i dev'essere un quadrato, e assumendo come punti coordinati gli elementi doppi di i, si potrà porre:

$$i = 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2;$$

e dalla relazione:

$$0 \equiv l = (ai)^4 a_x^2 = \alpha_2 (a_2 x_1^2 + 2a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2)$$

segue:

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

e poichè dev'essere:

$$\alpha_0 = 2a_0 a_4 = 0, \quad \alpha_1 = a_0 a_5 = 0, \quad \alpha_3 = a_1 a_6 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} a_0 a_6 \gtrless 0,$$

sarà ancora $a_1 = a_5 = 0$, epperò:

$$f = a_0 x_1^6 + a_6 x_2^6, \quad A \gtrless 0.$$

Reciprocamente: Se f ha la forma precedente, si trova $l \equiv 0$, $A \lessgtr 0$.

Se invece, oltre a $l \equiv 0$, si ha $A = 0$, si annulla identicamente Δ; si hanno dunque i due teoremi:

« Le condizioni $l \equiv 0$, $A \lessgtr 0$ equivalgono a $j \equiv 0$, e reciprocamente ».

« Le condizioni $l \equiv 0$, $A = 0$, equivalgono a $\Delta \equiv 0$, e reciprocamente ».

§ 5. $m \equiv 0$.

Dalla relazione:

$$(an)^2 a_x^4 = \frac{B\Delta - Ci}{3} + ml,$$

annullandosi insieme a m il covariante $n = (im)^2 i_x^2$, segue:

$$B\Delta - Ci \equiv 0.$$

Se i non è un biquadrato, possiamo dunque porre:

$$i = 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2, \qquad l = l_0 x_1^2 + 2l_1 x_1 x_2 + l_2 x_2^2,$$

in cui α_2, l_0, l_1, l_2 rappresentano coefficenti numerici. E formando m, si ottiene:

$$\alpha_2 (l_0 x_1^2 - 4l_1 x_1 x_2 + l_2 x_2^2) \equiv 0, \qquad l_0 = l_1 = l_2 = 0, \qquad l \equiv 0,$$

se non è $\alpha_2 = 0$, epperò $i \equiv 0$.

Se poi i è un biquadrato, abbiamo visto al § 2 di questo capitolo, che è anche $l \equiv 0$. Si conchiude dunque il teorema:

« Le due equazioni identiche:

$$l \equiv 0, \qquad m \equiv 0$$

sono l'una conseguenza dell'altra » (¹).

§ 6. $n \equiv 0$.

Dalle formule (6) cap. II si ha uno dei due casi:

$$1)\quad D = 0, \qquad C = 0, \qquad B = 0;$$

$$2)\quad D = 0, \qquad B^2 + AC = 0, \qquad 2C + \frac{1}{3}AB = 0;$$

ma il caso 2) riducesi al caso 1), infatti per le condizioni 2) possiamo porre:

$$l = x_1^2, \qquad m = x_1^2, \qquad n = \alpha_2 x_1^2 + 2\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_2^2 \equiv 0;$$

epperò:

$$i = \alpha_0 x_1^4 + 4\alpha_1 x_1^3 x_2, \quad B = C = 0.$$

Dunque in questo caso deve sempre supporsi:

$$B = C = D = 0;$$

e abbiamo dimostrato al § 2 di questo capitolo, che queste tre condizioni conducono a $l \equiv 0$. Si conchiude dunque il teorema:

« Delle tre equazioni identiche:

$$l \equiv 0, \qquad m \equiv 0, \qquad n \equiv 0,$$

« due sono conseguenza della rimanente ».

§ 7. *I tre covarianti l, m, n.*

Supponiamo che i tre covarianti l, m, n abbiano un elemento comune α. Dalle relazioni:

$$m = (il)^2 i_x^2, \qquad n = (im)^2 i_x^2,$$

segue che i centri armonici di second'ordine dell'elemento α rispetto alla forma i, formano una coppia armonica ad l e m, il che può avvenire in due modi; o la coppia l coincide colla coppia m, ovvero i due centri armonici coincidono coll'elemento comune ad l e m.

In quest'ultimo caso l' elemento α è doppio pel covariante i e quindi anche per Δ. Dalle relazioni:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A \, . \, i,$$

$$(am)^2 a_x^4 = \frac{B\Delta + Ai}{3} + \frac{1}{2} l^2,$$

$$(an)^2 a_x^4 = \frac{B\Delta - Ai}{3} + lm,$$

segue che le tre forme $(al)^2 a_x^4$, $(am)^2 a_x^4$, $(an)^2 a_x^4$ contengono due elementi coincidenti coll'elemento α, epperò i centri armonici di second'ordine di α rispetto ad f

(¹) Cfr. op. cit. pag. 445.

formano una coppia armonica ad l, m, n, e, per le ipotesi fatte, questi centri armonici coincidono nel polo α, il quale sarà dunque doppio per f. Assumendo come punti coordinati l'elemento α e un elemento arbitrario, possiamo porre:

$$a_6 = a_5 = 0\,, \qquad \alpha_4 = 2\,(a_2 a_6 - 4a_3 a_5 + 3a_4^2) = 0\,, \qquad a_4 = 0\,.$$

Dunque l'elemento α diviene triplo per f. Si ha dunque il teorema:

« Se l, m, n ammettono un elemento comune, questo diviene doppio pel cova-« riante i e triplo per la forma fondamentale » ([1]).

Assumendo allora come punti coordinati l'elemento triplo di f ed il centro armonico di prim'ordine di questo elemento rispetto agli altri tre di f, possiamo scrivere:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 20\,a_3 x_1^3 x_2^3\,,$$

da cui ricavasi:

$$i = -\,8a_1 a_3 x_1^4 + 16a_3^2 x_1^2 x_2^2 = -\,8a_3\,x_1^2 (a_1 x_1^2 - 2a_3 x_2^2)\,,$$

$$l = 2^5 a_3^3 x_1 x_2\,, \quad m = \frac{2^2}{3\,.\,5} \mathrm{A}\,.\,l\,, \quad n = \frac{2^4}{3^2\,.\,5^2} \mathrm{A}^2.\,l\,;$$

abbiamo dunque il teorema:

« I tre covarianti l, m, n non possono avere un elemento comune senza avere « comune l'altro elemento ».

§ 8. $(lm)\,l_x m_x \equiv 0$.

Supponendo che non si annulli identicamente l, è facile vedere che i due elementi di l sono necessariamente distinti, altrimenti, come abbiamo dimostrato al § 6, si annullano i tre invarianti B, C, D, epperò si annulla identicamente l ([2]). Possiamo dunque porre:

$$l = 2x_1 x_2\,,$$

da cui, formando m uguale a $(il)^2 i_x^2 = \alpha_1 x_1^2 + 2\,\alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_3 x_2^2$, segue:

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0\,, \qquad i = \alpha_0 x_1^4 + 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_4 x_2^4\,;$$

cosicchè l è uno dei covarianti quadratici irrazionali in cui si scompone il covariante di 6° grado della biquadratica i.

Dalla relazione:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} \mathrm{A}\,.\,i = a_1 x_1^4 + 4a_2 x_1^3 x_2 + 6a_3 x_1^2 x_2^2 + 4a_4 x_1 x_2^3 + a_5 x_2^4\,,$$

segue:

$$a_2 = a_4 = 0\,,$$

che insieme alle condizioni $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, danno:

$$a_0 a_5 = 0\,, \qquad a_1 a_6 = 0\,.$$

Si hanno in tal modo tre casi essenzialmente diversi:

1) $a_0 = a_6 = 0$. In questo caso f assume la forma:

$$f = x_1 x_2 (6a_1 x_1^4 + 20a_3 x_1^2 x_2^2 + 6a_5 x_2^4)\,,$$

([1]) Cfr. Clebsch, op. cit. pag. 439.

([2]) Cfr. Clebsch, op. cit. pag. 440.

da cui segue:

$$A = -2^2(3a_1a_5+5a_3^2), \quad i = -2^3 a_3 \{ a_1x_1^4 - 2a_3x_1^2x_2^2 \}, \; B = \frac{2^7}{3} a_3^2(3a_1a_5+a_3^2),$$

$$C = \frac{2^{10}}{3^2} a_3^4(3^2a_1a_5 - a_3^2), \quad l = 2^5a_3(a_3^2 - a_1a_5)x_1x_2, \quad A_{ll} = -2^9a_3^2(a_3^2-a_1a_5)^2,$$

$$K = -2^4.3^2(a_3^2-a_1a_5)^2, \; a_3^2 = \frac{3^2A_{ll}}{2^5K}; \; 2K.m + 3A_{ll}.l \equiv 0, \; 2^2K^2.n - 3^2A_{ll}^2.l \equiv 0.$$

2) $a_5 = a_6 = 0$. In questo caso f assume la forma:

$$f = a_0x_1^6 + 6a_1x_1^5x_2 + 20a_3x_1^3x_2^3,$$

ed abbiamo visto al § 7, che hanno luogo le seguenti relazioni:

$$A = -2^2.5a_3^2, \quad i = -8a_3.x_1^2(a_1x_1^2+2a_3x_2^2), \; 3.5^2B = 2^3A^2, \; 3^2.5^3C = 2^4A^3,$$

$$l = 2^5.a_3^3x_1x_2, \; m = \frac{2^2}{3.5}A.l, \quad n = \frac{2^4}{3^2.5^2}A^2.l, \quad D = \frac{2^7}{3^2.5^5}A^5; \qquad (\alpha)$$

donde segue:

$$2^3.A^2i + 2.3.5A.\Delta - 3.5^2.l^2 \equiv 0.$$

Reciprocamente supponiamo le tre relazioni invariantive:

$$3.5^2.B = 2^3.A^2, \quad 3^2 5^3 C = 2^4.A^3, \quad 3^2.5^5D = 2^7A^5,$$

dalle quali si vede facilmente, che si annullano le quattro risultanti: R_{mn}, R_{nl}, R_{lm}, R_{fl}, e il discriminante $D_i = B^3 - 6C^2$.

In questo caso dunque i tre covarianti l, m, n hanno un elemento comune, epperò (§ 7 di questo capitolo) essi non differiscono fra loro che per un fattore costante. Inoltre i deve ammettere un elemento doppio ed l e f hanno un elemento comune, cosicchè, assumendo come punti coordinati gli elementi di l, possiamo porre:

$$l = 2x_1x_2, \qquad i = \alpha_0x_1^2 + 6\alpha_2x_1^2x_2^2 + \alpha_4x_2^4,$$

$$f = a_0x_1^6 + 6a_1x_1^5x_2 + 15a_2x_1^4x_2^2 + 20a_3x_1^3x_2^3 + 15a_4x_1^2x_2^4 + 6a_5x_1x_2^5;$$

e dalla relazione:

$$(al)^2a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3}A.i = a_1x_1^4 + 4a_2x_1^3x_2 + 6a_3x_1^2x_2^2 + 4a_4x_1x_2^3 + a_5x_2^4,$$

segue:

$$a_2 = a_4 = 0.$$

Inoltre è:

$$R_{il} = 2A_{ll}^2B - 2^2A_{ll}D + A_{lm}^2 = 0,$$

$$R_{if} = 2^5.3^2DC - 2^5.3.5BC^2 - 3^2B^4 - 2^4A^2C^2 - 2^3.3AB^2.C = 0; \qquad \text{(v. cap. seg.)}$$

epperò:

$$\alpha_4 = 2(-4a_3a_5 + 3a_4^2) = 0, \qquad a_5 = 0,$$

non potendo essere $a_3 = 0$, altrimenti sarà $\alpha_2 = 0$.

Dunque f assume la forma:

$$f = a_0x_1^6 + 6a_1x_1^5x_2 + 20a_3x_1^3x_2^3.$$

3) $a_1 = a_5 = 0$. In questo caso f assume la forma:

$$f = a_0x_1^6 + 20a_3x_1^3x_2^3 + a_6x_1^6,$$

donde ricavasi:

$$i = 2(a_0a_6 + 8a_3^2)x_1^2x_2^2, \qquad B\Delta - Ci \equiv 0, \quad B.m - 2C.l \equiv 0. \qquad (\beta)$$

Reciprocamente supponiamo:

$$B\Delta - Ci \equiv 0, \qquad \text{epperò:} \qquad i = 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2, \qquad \Delta = -6\alpha_2^2 x_1^2 x_2^2,$$

$$l = 6\alpha_2 (a_2 x_1^2 + 2a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2), \;\; m = 2(a\Delta)^4 a_x^2 = -6\alpha_2^2 (a_2 x_1^2 + 2a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2),$$

$$(am)^2 a_x^4 = \alpha_2 . (al)^2 a_x^4 = -\alpha_2 \left(2\Delta + \frac{1}{3} A . i\right) = \frac{B\Delta + Ai}{3} + \frac{1}{2} l^2,$$

sarà dunque:

$$a_2 = a_4 = 0, \quad (al)^2 a_x^4 = a_1 x_1^4 + 6a_3 x_1^2 x_2^2 + a_5 x_2^4, \quad a_1 = a_5 = 0;$$

epperò:

$$f = a_0 x_1^6 + 20 a_3 x_1^3 x_2^3 + a_6 x_1^6.$$

§ 9. $T = (aH) a_x^5 H_x^7 \equiv 0$.

In questo caso, giusta il teorema II, cap. I, la sestica diventa il cubo di una forma quadratica e possiamo enunciare il teorema:

« Le condiziόni necessarie e sufficienti perchè una sestica sia il cubo di una « quadratica sono espresse dall'identica equazione:

$$T = (aH) a_x^5 H_x^7 \equiv 0.$$

§ 10. $H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4 \equiv 0$.

In questo caso, giusta il teorema I, cap. I, la sestica rappresenta la sesta potenza di una forma lineare, si ha dunque il teorema:

« Le condizioni necessarie e sufficienti, perchè una sestica rappresenti la sesta « potenza di una forma lineare, sono date dall'equazione identica:

$$H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4 \equiv 0.$$

§ 11. $i_\delta \equiv 0$.

In questo caso si osserva anzitutto che dev'essere nullo il covariante $(lm)\, l_x m_x$. Infatti la quarta sovrapposizione della forma fondamentale f sul covariante identicamente nullo:

$$i_\delta = \frac{1}{3} \left\{ l\left(m - \frac{1}{6} A . l\right) - \frac{1}{6} A_{ll} . i + \frac{1}{9} K\Delta \right\}$$

è, a prescindere dal fattore numerico $\frac{1}{3}$:

$$(al)^2 (am)^2 a_x^2 - \frac{1}{6} A . (al)^2 (al')^2 a_x^2 - \frac{1}{6} A_{ll} . (ai)^4 a_x^2 + \frac{1}{9} K (a\Delta)^4 a_x^2,$$

che per le relazioni:

$$(al)^2 (al')^2 a_x^2 = -\frac{2B}{3} l + \frac{A}{3} m + 2n, \quad (al)^2 (am)^2 a_x^2 = \frac{2C}{3} l + \frac{B}{3} m + \frac{A}{3} n,$$

$$(ai)^4 a_x^2 = l, \quad (a\Delta)^4 a_x^2 = \frac{1}{2} m,$$

diviene: $\frac{1}{6} A_{ll} . l + \frac{1}{9} K . m$, epperò:

$$\frac{1}{6} A_{ll} . l + \frac{1}{9} K . m \equiv 0.$$

Ciò posto, distingueremo due casi, secondo che il primo invariante di δ, cioè:

$$A_\delta = \frac{1}{18}(4A \, . \, A_{ll} - 15A_{lm}),$$

sia diverso da zero, ovvero uguale a zero.

1) $A_\delta \gtrless 0$. Giusta le due equazioni identiche:

$$i_\delta = \frac{1}{3}\left\{l\left(m - \frac{1}{6}A \, . \, l\right) - \frac{1}{6}A_{ll} \, . \, i + \frac{1}{9}K\Delta\right\} \equiv 0, \quad \frac{1}{6}A_{ll} \, . \, l + \frac{1}{9}Km \equiv 0,$$

i due elementi di l costituiscono uno dei tre covarianti irrazionali in cui si scompone il covariante di sesto grado della forma i, epperò si può scrivere:

$$l = 2x_1 x_2, \quad i = \alpha_0 x_1^4 + 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_4 x_2^4,$$

ed abbiamo osservato al § 8 di questo cap., che ne seguono le condizioni:

$$a_2 = a_4 = 0, \qquad a_0 a_5 = a_1 a_6 = 0;$$

epperò:

$$(al) a_x^5 l_x = a_0 x_1^6 + 4a_1 x_1^5 x_2 - 4a_5 x_1 x_2^5 - a_6 x_2^6.$$

Dei tre casi, cui danno luogo le condizioni precedenti, essendo $i_\delta \equiv 0$, e $A_\delta \gtrless 0$, non resta che il caso $a_0 = a_6 = 0$, con che f assume la forma:

$$f = 6a_1 x_1^5 x_2 + 20a_3 x_1^3 x_2^3 + 6a_5 x_1 x_2^5.$$

Reciprocamente è facile vedere, che da questa forma si conchiude:

$$i_\delta \equiv 0, \qquad A_\delta \gtrless 0.$$

2) $i_\delta \equiv 0$, $A_\delta = 0$. In questo caso, annullandosi identicamente il covariante i_δ della forma $\delta = (al) a_x^5 l_x$, ed il primo invariante A_δ della stessa forma, questa, giusta la teoria delle forme sestiche, ammette un elemento quintuplo, epperò dei tre casi studiati al § 8 non resta che $a_5 = a_6 = 0$; epperò f assume la forma:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 20a_3 x_1^3 x_2^3.$$

Reciprocamente, calcolando dalla forma precedente il covariante $\delta = (al) a_x^5 l_x$, si trova $i_\delta \equiv 0$, $A_\delta = 0$.

Un caso importante è quello in cui, oltre alle condizioni $i_\delta \equiv 0$, $A_\delta = 0$, si dia la seguente:

$$(2Ai - 3 \, . \, 5\Delta)(5fl - 2^2 AH) - 3 \, . \, 5^3 \delta^2 \equiv 0.$$

Poichè, per le condizioni $i_\delta \equiv 0$, $A_\delta = 0$, la forma f deve ammettere un elemento triplo, possiamo porre:

$$f = x_1^3 \, . \, \varphi,$$

donde segue (V. § 8 di questo capitolo):

$$2^3 \, . \, A^2 = 3 \, . \, 5^2 B, \quad 2^4 A^3 = 3^2 \, . \, 5^3 C, \quad 2^7 \, . \, A^5 = 3^2 \, . \, 5^5 D,$$

dalle quali ultime relazioni segue che è identicamente nullo il covariante:

$$\frac{1}{2}(2^3 A^2 - 3 \, . \, 5^2 B)\Delta + 5(3 \, . \, 5C - 2AB)i,$$

essiano della forma biquadratica $2Ai - 3 \, . \, 5\Delta$.

Si trova inoltre, indicando con Δ_φ l'essiano della cubica φ:

$$2^2 \, . \, AH - 5f \, . \, l = Ax_1^6 \, . \, \Delta_\varphi.$$

Dall'equazione identica:

$$(2Ai-3.5\Delta)(5fl-2^2AH)-3.5^3\delta^2\equiv 0 \qquad (\gamma)$$

segue dunque, che Δ_φ dev' essere un quadrato perfetto, epperò f oltre all'elemento triplo x_1 deve ammettere un elemento doppio diverso dal precedente, cioè:

$$\Delta_\varphi = (a_0x_1+4a_1x_2)^2,$$

e si trova:

$$f=\frac{1}{a_0^2}x_1^3(a_0x_1+4a_1x_2)^2(a_0x_1-2a_1x_2).$$

Possiamo dunque conchiudere il seguente:

Teorema. — Per le condizioni:

$$i_\delta\equiv 0, \qquad A_\delta=0, \qquad (2Ai-3.5\Delta)(5fl-2^2AH)-3.5^3\delta^2\equiv 0$$

« la forma fondamentale f ammette un elemento triplo, che diviene quadruplo per « la forma $2A.i-3.5\Delta$, quintuplo per la forma $\delta=(al)a_x^5l_x$ e sestuplo per la forma « $2^2AH-5f.l$, e un elemento doppio, che diviene semplice per la forma $\delta=(al)$. « $a_x^5l_x$ e doppio per la forma $2^2AH-5f.l$ ».

Servendoci dei risultati ottenuti al § 8 di questo capitolo, possiamo enunciare il seguente teorema:

« L'equazione identica:

$$(lm)\,l_xm_x\equiv 0$$

« conduce ad uno dei tre casi:

$$i_\delta\equiv 0, \quad A_\delta\gtreqless 0; \qquad i_\delta\equiv 0, \quad A_\delta=0; \qquad B\Delta-Ci\equiv 0,$$

« nei quali la forma fondamentale assume rispettivamente le forme:

$$f=6a_1x_1^5x_2+20a_3x_1^3x_2^3+6a_5x_1x_2^5, \qquad f=a_0x_1^6+6a_1x_1^5x_2+20a_3x_1^3x_2^3,$$

$$f=a_0x_1^6+20a_3x_1^3x_2^3+a_6x_2^6.$$

Reciprocamente ognuna delle due identiche equazioni:

$$i_\delta\equiv 0, \qquad B\Delta-Ci\equiv 0,$$

conduce all'equazione identica:

$$(lm)\,l_xm_x\equiv 0.$$

CAPITOLO IV.

Discriminanti e risultanti della forma binaria del 6° ordine e di alcuni suoi covarianti.

In questo capitolo indicheremo colle notazioni D_φ, $R_{\varphi\psi}$ risp. il discriminante della forma φ, la risultante delle due forme φ e ψ.

Il discriminante della forma fondamentale f è stato calcolato dal sig. Brioschi negli annali di Matematica pura e app.; volendo però trovarci d'accordo colle definizioni ammesse per gl'invarianti fondamentali A, B, C, D, bisogna scrivere così:

$$D_f=-2^7.3A^5+2^4.3.5^3A^3B+2^4.5^4A^2C-2.3.5^5AB^2-2^2.3.5^5BC-3^2.5^5D. \quad (1)$$

Il discriminante D_j — Abbiamo trovato nel § 2 del capitolo II:

$$-2^{10}.3^9D_j=K^3.R_{jH}. \qquad (2)$$

Quanto al discriminante dell'essiano, giusta il teorema IX del cap. I, esso non può differire che per un fattor numerico dal prodotto del discriminante D_f pel secondo fattore del discriminante di D_j e che vogliamo indicare con R_{jH}, cosicchè si ha:

$$D_H = D_f . R_{jH} . \tag{3}$$

La risultante R_{il} — Giusta le formule stabilite nell'opera citata del sig. Clebsch pag. 88, si hanno le seguenti formule per la risultante R_{il}:

$$A_0 = (ii')^4 = B, \quad A_1 = A_{mm} = D, \quad A_2 = A_{lm};$$

epperò:

$$R_{il} = 2A_{ll}^2 B - 4A_{ll} . D + A_{lm}^2 =$$

$$= \frac{2}{9} \left\{ 2B^4 + 2A^2 C^2 + 2^4 AB^2C + A^2 B^3 + 2^2 . 3^2 BC^2 - 2^2 . 3^2 DC - 2 . 3A . B . D \right\}. \tag{4}$$

La risultante R_{fl} — Si ha anzitutto la formula:

$$R_{fl} = -2^2 A_{ll}^3 . A_0 + 2^2 . 3A_{ll}^2 . A_1 - 3^2 A_{ll} . A_2 + \overline{B}^2,$$

in cui abbiamo posto:

$$A_0 = (ab)^6 = A, \quad A_1 = (ab)^4 (al)^2 (bl')^2,$$

$$A_2 = (ab)^2 (al)^2 (al')^2 (bl'')^2 (bl''')^2, \quad \overline{B} = (al)^2 (al')^2 (al'')^2 .$$

Si calcola facilmente A_1, mediante la formula:

$$(ab)^4 a_y^2 b_x^2 = i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{3} A (xy)^2,$$

dalla quale, ponendo $x_1 = l_2$, $x_2 = -l_1$; $y_1 = l'_2$, $y_2 = -l'_1$, si ottiene:

$$(ab)^4 (al)^2 (bl')^2 = (il)^2 (il')^2 + \frac{1}{3} A . A_{ll},$$

ovvero, esprimendo l'invariante $(il)^2 (il')^2 = A_{lm}$ mercè gl'invarianti fondamentali:

$$A_1 = \frac{2^2}{3} AC + \frac{2}{3} B^2 + \frac{1}{3^2} A^2 . B .$$

Per calcolare A_2 basta osservare che esso è il discriminante della quadratica:

$$(al)^2 (al')^2 a_x^2 = -\frac{2B}{3} l + \frac{A}{3} m + 2n,$$

epperò:

$$A_2 = \frac{2^2}{3^2} B^2 A_{ll} + \frac{1}{3^2} A^2 D + 2^2 A_{nn} - \frac{2^2}{3^2} ABA_{lm} - \frac{2^3}{3} BD + \frac{2^2}{3} A . A_{mn} =$$

$$= \frac{2^4}{3^2} B^2 C + \frac{2^3}{3^2} AB^3 + \frac{A^2}{3^2} D - \frac{2}{3} BD + \frac{2^4}{3^2} AC^2 + \frac{2^3}{3^3} A^2 BC .$$

Finalmente $\overline{B}$ si ottiene dall'ultima formula, ponendo $x_1 = l_2''$, $x_2 = -l_1''$, e si trova:

$$\overline{B} = (al)^2 (al')^2 (al'')^2 = -\frac{2B}{3} A_{ll} + \frac{A}{3} A_{lm} + 2D =$$

$$= -\frac{2^2}{3} BC + \frac{2}{3^2} A^2 C + 2D = -\frac{2}{3^2} KC + 2D .$$

Si ha dunque:

$$R_{fl} = DKA_{ll} + \left(2D - \frac{2}{3^2} KC \right)^2 . \tag{5}$$

Si può verificare (v. cap. seguente) che, a meno di un fattore numerico che affetta il primo membro, si ha:

$$R_{fi} = 2^5 . 3^2 DC - 2^5 . 3 . 5BC^2 - 3^2 B^4 - 2^4 A^2 C^2 - 2^3 . 3 . AB^2 C , \tag{6}$$

$$R_{ij} = [(2^2 . 3^2 . C + A^3 - 3^3 A_{ll})^2 + K^3]^2 , \tag{7}$$

$$R_{ju} = 3^8 DK^2 + 2^2 . 5A^3 K^3 - 2^2 . 3^3 AK^4 - 3^3 A^2 K^2 A_{ll} - 3^5 K^3 A_{ll} - $$
$$- 2^2 . 3^5 AKA_{ll}^2 - 2^4 . 3^6 . A_{ll}^3 . \tag{8}$$

CAPITOLO V.

Casi più notevoli dell'equazione $f = 0$.

In questo capitolo ci proponiamo di studiare alcuni casi notevoli dell'equazione $f = 0$, supponendo che si annullino degli invarianti o identicamente dei covarianti della forma f.

§ 1. $R = 0$.

In questo caso le tre coppie di elementi l, m, n appartengono alla stessa involuzione, essendo:

$$R = -(lm)(mn)(nl) = 0 ,$$

cosicchè, assumendo come punti coordinati gli elementi doppî dell'involuzione, possiamo porre:

$$l = l_0 x_1^2 + l_2 x_2^2 , \quad m = m_0 x_1^2 + m_2 x_2^2 , \quad n = n_0 x_1^2 + n_2 x_2^2 ,$$

colla condizione:

$$l_0 m_2 - l_2 m_0 \gtrless 0 ,$$

poichè supponiamo che non annullasi identicamente il covariante $(lm) l_x m_x$.

Ponendo poi:

$$i = \alpha_0 x_1^4 + 4\alpha_1 x_1^3 x_2 + 6 \alpha_2 x_1^2 x_2^2 + 4\alpha_3 x_1 x_2^3 + \alpha_4 x_2^4 ,$$

si hanno le relazioni:

$$(il)^2 i_x^2 = m_0 x_1^2 + m_2 x_2^2 = l_2 (\alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2) + l_0 (\alpha_2 x_1^2 + 2\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_2^2) ,$$

$$(im)^2 i_x^2 = n_0 x_1^2 + n_2 x_2^2 = m_2 (\alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2) + m_0 (\alpha_2 x_1^2 + 2\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_2^2) ,$$

epperò:

$$l_2 \alpha_1 + l_0 \alpha_3 = 0 , \qquad m_2 \alpha_1 + m_0 \alpha_3 = 0 ,$$

donde $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, essendo $l_0 m_2 - l_2 m_0 \gtrless 0$.

Dunque gli elementi doppî dell'involuzione costituiscono una delle tre coppie di elementi in cui si scompone il covariante di 6° grado della forma i.

Dalle relazioni:

$$(a l)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A . i ,$$

$$(am)^2 a_x^4 = \frac{B\Delta + Ci}{3} + \frac{1}{2} l^2 ,$$

si conchiude analogamente:

$$l_2 a_1 + l_0 a_3 = 0 , \qquad m_2 a_1 + m_0 a_3 = 0 ,$$
$$l_2 a_3 + l_0 a_5 = 0 , \qquad m_2 a_3 + m_0 a_5 = 0 ,$$

epperò $a_1 = a_3 = a_5 = 0$,

$$f = a_0 x_1^6 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4 + a_6 x_2^6,$$

cosicchè i sei elementi della forma f si distribuiscono in tre coppie appartenenti alla stessa involuzione cui appartengono l, m, n.

Si può verificare facilmente, che i covarianti j e H si scompongono in coppie di elementi appartenenti alla stessa involuzione, e che i rimanenti covarianti, che tutti son determinanti funzionali, si scompongono nella coppia dei punti doppî dell'involuzione, e in coppie di elementi appartenenti alla stessa involuzione.

Si ritrovano gli stessi risultati, partendo dalla equazione quadrinomia:

$$f = a_0 x_1^6 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4 + a_6 x_2^6.$$

Possiamo dunque enunciare il seguente:

Teorema. — « La condizione necessaria e sufficiente perchè gli elementi di f « appartengano alla stessa involuzione è data dall'annullarsi dell'invariante di 15° « grado R, purchè sia $(lm) l_x m_x \gtrless 0$ » [1].

Se invece è $(lm)\, l_x m_x$ identicamente zero, epperò $R = 0$, abbiamo visto (al § 11, cap. III) che possono succedere i due casi: $i_\delta \equiv 0$, ovvero $B\Delta - Ci \equiv 0$.

Nel caso $i_\delta \equiv 0$ la f o contiene un elemento triplo, ovvero si scompone in tre coppie delle quali l'una $(l = 0)$ è armonica alle due altre.

Nel caso $B\Delta - Ci \equiv 0$, i sei punti di f si distribuiscono in due terne ed i punti di ciascuna terna sono ciclicamente proiettivi rispetto alla stessa coppia di punti $l = 0$.

Un caso importante di questo che abbiamo studiato è quello in cui, insieme a $R = 0$, si pone $D_f = 0$, supponendo sempre $(lm) l_x m_x \gtrless 0$.

Allora due elementi di f coincidono fra loro e, poichè escludiamo il caso che f ammetta un elemento triplo, ciò può avvenire in due modi: o che due elementi di una stessa coppia coincidano in uno dei punti doppî dell'involuzione; ovvero che un elemento di una coppia coincida con un elemento di un'altra coppia e quindi il secondo elemento della prima col 2° elemento della seconda. Nel primo caso, assumendo sempre come punti coordinati i punti doppî dell'involuzione, la f deve assumere la forma trinomia:

$$f = a_0 x_1^6 + 15 a_2 x_1^4 x_2^2 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4,$$

partendo dalla quale, oltre a $R = 0$ e $D_f = 0$, trovasi:

$$E = 2.3A^3 - 3.5^2 AB - 2.5^3 C = 0.$$

Segue da ciò che le due condizioni $R = 0$ e $D_f = 0$ devono condurre ad un invariante, che si deve scomporre in due fattori, dei quali uno dev'essere E.

Ora giusta la formula (7) del cap. II, il quadrato dell'invariante R si esprime dapprima mediante gl'invarianti $A_{ll} \ldots\ldots A_{mn}$, nel seguente modo:

$$2R^2 = A_{ll} A_{mm} A_{nn} + 2 A_{mn} A_{nl} A_{lm} - A_{ll} A_{mn}^2 - A_{mm} A_{nl}^2 - A_{nn} A_{lm}^2.$$

[1] Cfr. Clebsch op. cit. pag. 457.

Esprimendo poi gl'invarianti $A_{ll} \ldots\ldots A_{mn}$ mediante i quattro invarianti A, B, C, D, si ottiene:

$$2^2.3^5.R^2 = -2.3^5 D^3 + 3^4(2.3.BC + AB^2)D^2 + 2^2.3^3(2.3B^2C^2 +$$
$$+ 2.3AC^3 + 3AB^3C + 2.A^2BC^2 + B^5)D - 2^2.3.13B^6C - 2.3^2.A.B^7 -$$
$$- 2^4.3A^2B^5C - 2^5A^3B^3C^2 - 2^3.3^2.7AB^4C^2 - 2^4.3^3A^2B^2C^3 - 2^3.3^4ABC^4 -$$
$$- 2^4.3A^3C^4 - 2^4.3^3C^5 - 2^4.3^3B^3C^3.$$

Ponendo in questa espressione:

$$D = \frac{1}{3^2.5^3}(-2^7.3A^5 + 2^4.3.5^3A^3B + 2^4 5^4 A^2C - 2.3.5^5AB^2 - 2^2.3.5^5BC),$$

si trova un invariante del trentesimo grado composto di 27 termini espressi mediante gl'invarianti A, B, C, il quale diviso per l'invariante E dà per quoziente un invariante del 24° grado, quadrato dell'invariante del 12° grado:

$$F = 2^{10}.3A^6 - 2^6 3.5^2.11A^4B - 2^6.5^3.7.A^3.C + 2^3.3.5^4.17A^2B^2 +$$
$$+ 2^4.3^2.5^5.ABC - 3.5^7.B^3 + 2.3^2.5^6C^2.$$

Se poi dividiamo il secondo membro della relazione, che esprime il quadrato di R mercè gl'invarianti fondamentali, pel discriminante D_f, si trova per quoziente l'invariante di 20° grado:

$$G = 2.3^4.5^{10}D^2 - 2^8.3^3.5^5.A^5D + 2^5.3^3.5^8A^3BD + 2^5.3^2.5^9A^2CD -$$
$$- 3^3.5^{11}AB^2D - 2.3^3.5^{10}.7BCD + 2^{15}.3^2A^{10} - 2^{13}.3^2.5^3A^8B -$$
$$- 2^{13}.3.5^4A^7C + 2^7.3^2.5^5.29A^5B^2 + 2^8.3.5^5.133A^5BCD -$$
$$- 2^4.3^4.5^8A^4B^3 + 2^9.5^8.A^4C^2 - 2^4.3^2.5^8.37A^3B^2C + 2.3^2.5^{11}.A^2B^4 -$$
$$- 2^3.5^9.3.59A^2BC^2 + 2^2.3^4.5^{10}.AB^3C - 2^3.3^3 5^{10}.AC^3 -$$
$$- 2^2.3^2.5^{10}B^5. + 2^5.3^2.5^{10}B^2C^2.$$

Si ottiene così la relazione:

$$2^2.3^6.5^{15}R^2 = 2EF^2 + D_f.G.$$

Le ipotesi $R=0$, $D_f=0$ conducono dunque ai due casi:

1) $E=0$. In questo caso l'elemento doppio di f coincide in uno dei punti doppî dell'involuzione cui appartengono gli altri quattro elementi.

2) $F=0$. In questo caso i due elementi di una coppia coincidono cogli elementi di un'altra coppia, e prendendo come punti coordinati i due elementi doppî di f, si potrà porre:

$$f = 30x_1^2x_2^2(a_2x_1^2 + 2a_3x_1x_2 + a_4x_2^2).$$

Se insieme a $D_f=0$ si hanno le due condizioni $E=0$, $F=0$, f deve ammettere un elemento doppio che rappresenta uno dei punti doppî dell'involuzione determinata dagli altri quattro, e due di questi elementi coincidono in uno, il che può avvenire in due modi. Nel 1° due di questi quattro elementi coincidono coll'altro punto doppio dell'involuzione; nel 2° due dei quattro elementi coincidono con gli altri due ed f diviene un quadrato.

Nel 1° caso, assumendo come punti coordinati i due elementi doppî, f assume la forma binomia:

$$f = 15x_1^2x_2^2(a_2x_1^2 + a_4x_2^2).$$

Nel 2° caso f assume la forma trinomia:

$$f = 30 x_1^2 x_2^2 (a_2 x_1^2 + 2 a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2),$$

colla condizione $a_2 a_4 - a_3^2 = 0$.

Allora, chiamando z il terzo elemento doppio, possiamo porre:

$$f = 30 x_1^2 x_2^2 z^2, \qquad z = b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

donde ricavasi:

$$i = 2^3.3.(b_1^2 x_1^2 + b_1 b_2 x_1 x_2 + b_2^2 x_2^2)^2,$$
$$l = 2^4.3.b_1^2 b_2^2 (b_1^2 x_1^2 + b_1 b_2 x_1 x_3 + b_2^2 x_2^2),$$
$$m = -\frac{2}{5} \mathrm{A}.l, \qquad n = \frac{2^2}{5^2} \mathrm{A}^2.l,$$
$$\mathrm{B} = \frac{2.3}{5^2} \mathrm{A}^2, \qquad \mathrm{C} = -\frac{2.3}{5^3} \mathrm{A}^3, \qquad \mathrm{D} = -\frac{2^3}{5^5} \mathrm{A}^5.$$

In questo caso si ha dunque $(lm)\, l_x m_x \equiv 0$, ipotesi che abbiamo esclusa sin dal principio della discussione.

Prima di tornare alla discussione è utile fermarci su quest'ultimo punto.

Supponendo verificate le tre ultime relazioni, si trova facilmente, che hanno luogo le seguenti:

$$\mathrm{D}_f = 0, \quad \mathrm{F} = 0, \quad \mathrm{R}_{lm} = 0, \quad \mathrm{R}_{mn} = 0, \quad \mathrm{R}_{nl} = 0, \quad \mathrm{D}_i = 0.$$

Da queste condizioni segue che le tre quadratiche l, m, n hanno un elemento comune, epperò (§ 7, cap. III) hanno comune l'altro elemento.

Inoltre la biquadratica i ammettendo un elemento doppio, possono darsi due casi, o (§ 8, cap. III) questo elemento diviene triplo per f, il che è da escludere dovendo allora verificarsi le relazioni:

$$3.5^2 \mathrm{B} = 2^3.\mathrm{A}^3, \quad 3^2.5^3.\mathrm{C} = 2^4.\mathrm{A}^3, \quad 3^2.5^5.\mathrm{D} = 2^7 \mathrm{A}^5;$$

ovvero che i diventi il quadrato di l, ed assumendo come punti coordinati i due elementi di l, possiamo porre:

$$l = 2 x_1 x_2, \quad i = 6 \alpha_2 x_1^2 x_2^2, \quad f = a_0 x_1^6 + 20 a_3 x_1^3 x_2^3 + a_6 x_2^6.$$

I sei elementi di f costituiscono dunque due terne ciclicamente proiettive alla stessa coppia $l = 0$, e poichè escludiamo la presenza di un elemento triplo, è uopo che gli elementi di una terna coincidano con quelli dell'altra terna.

Possiamo dunque concludere:

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f diventi il quadrato di una forma « cubica sono le seguenti:

$$5^2 \mathrm{B} - 2.3 \mathrm{A}^2 = 0, \quad 5^3 \mathrm{C} + 2.3 \mathrm{A}^3 = 0, \quad 5^5 \mathrm{D} + 2^3.\mathrm{A}^5 = 0 \text{ ».}$$

Possiamo poi completare la discussione precedente dicendo:

3) Le condizioni $\mathrm{D}_f = 0$, $\mathrm{E} = 0$ sono necessarie e sufficienti perchè f ammetta un elemento doppio rappresentante uno dei due punti doppî dell'involuzione determinata dagli altri quattro.

4) Le condizioni $\mathrm{D}_f = 0$, $\mathrm{F} = 0$ sono necessarie e sufficienti perchè f ammetta due elementi doppî.

5) Le condizioni $\mathrm{D}_f = 0$, $\mathrm{E} = 0$, $\mathrm{F} = 0$ sono necessarie e sufficienti perchè f ammetta una coppia di elementi doppî divisa armonicamente dagli altri due.

§ 2. $R_{jH} = 0$.

Dalla relazione:

$$(HH')^2 H_x^6 H'^6_x = \frac{1}{3} j \cdot f - \frac{1}{14} iH ,$$

segue, che il discriminante dell' essiano si scompone nel discriminante della forma fondamentale per un fattore del discriminante di j, il quale è la risultante di j e H cioè:

$$R_{jH} = \left\{ 3^8 DK^2 + 2^2 . 5A^3K^3 - 2^2 . 3^3 AK^4 - 3^3 A^2K^2 A_{ll} - 3^5 K^3 A_{ll} - 2^2 . 3^5 AKA_{ll}^2 - 2^4 . 3^6 A_{ll}^3 \right\}^2 .$$

In questo caso le forme j e H ammettono un elemento doppio comune il quale appartiene anche al covariante $T = (a\,H)\, a_x^5 H_x^7$. Infatti se dell'elemento doppio dell'essiano prendiamo i centri armonici di primo ordine rispetto all'essiano e rispetto alla forma fondamentale, essi coincidono poichè il primo è indeterminato. Dunque la radice doppia di H annulla anche T senza annullare f; epperò, assumendo come punti coordinati l'elemento doppio dell'essiano e l'elemento doppio corrispondente dello steineriano, la rappresentazione tipica (v. formula (15) cap. II) diviene:

$$f^5 . f(y) = \xi^6 + 15 \frac{i}{2} f^2 . \xi^2 \eta^4 + 6qf^2 . \xi\eta^5 + \frac{A}{2} f^4 . \eta^6 .$$

Reciprocamente, partendo dalla forma:

$$f = a_0 x_1^6 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4 + 6 a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6 ,$$

si ottiene:

$$A = 2a_0 a_6 , \quad i = 2\,(a_0 a_4 x_1^4 + 2a_0 a_5 x_1^3 x_2 + a_0 a_6 x_1^2 x_2^2 + 3a_4^2 x_2^4) ,$$

$$B = \frac{2}{3}\,(2^2 . 3^2 . a_0 a_4^3 + a_0^2 a_6^2) , \quad C = \frac{2}{3^2}(-a_0^3 a_6^3 + 2^2 . 3^3 a_0^2 a_4^3 a_6 - 2 . 3^4 a_0^2 a_4^2 a_5^2) ,$$

$$l = 2 \left\{ 4a_0 a_4^2 x_1^2 - 2a_0 a_4 a_5 x_1 x_2 + (2a_0 a_4 a_6 - 4a_0 a_5^2) x_2^2 \right\} , \quad A_{ll} = 2C + \frac{1}{3} AB ,$$

$$m = \frac{2^2}{3} \left\{ (2^3 a_0^2 a_4^2 a_6 - 3a_0^2 a_4 a_5^2) x_1^2 + 2\,(2^2 a_0^2 a_4 a_5 a_6 - 3a_0^2 a_5^3) x_1 x_2 + \right.$$

$$\left. + (2^2 . 3^2 . a_0 a_4^4 + a_0^2 a_4 a_6^2 - a_0^2 a_5^2 a_6) x_2^2 \right\} ,$$

$$A_{lm} = \frac{2}{3}\,(B^2 + AC) ,$$

$$A_{mm} = D = \frac{2^5}{3^2}\,(2^5 . 3^2 a_0^3 a_4^6 a_6 - 2^2 . 3^3 a_0^3 a_4^5 a_5^2 + 2^3 a_0^4 a_4^3 a_6^3 -$$

$$- 3^3 a_0^4 a_4^2 a_5^2 a_6^2 + 3^3 . a_0^4 a_4 a_5^4 a_6 - 3^2 a_0^4 a_5^6) .$$

Si hanno intanto le relazioni:

$$2 . 3B - A^2 = K = 2^4 . 3^2 . a_0 a_4^3 , \quad 3^2 AB - 2A^3 - 2 . 3^2 C = 2^3 . 3^4 . a_0^2 a_4^2 a_5^2 ,$$

$$\frac{(3^2 AB - 2A^3 - 2 . 3^2 C)^3}{2 . 3^8 . K^2} = a_0^4 a_5^6 , \qquad \frac{(3^2 . AB - 2A^3 - 2 . 3^2 C)^2}{2^2 . 3^6 K} = a_0^3 a_5^4 a_4 ,$$

le quali sostituite nel valore di D danno:

$$R_{jH} = 3^8 DK^2 - 2^2 . 3^3 AK^4 - 3^5 K^3 A_{ll} + 2^2 . 5A^3K^3 - 3^3 A^2K^2 A_{ll} - 2^2 . 3^5 AKA_{ll}^2 - 2^4 . 3^6 . A_{ll}^3 = 0 .$$

Si può dunque conchiudere il seguente teorema:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè f assuma la forma quadrinomia:

$$f = a_0 x_1^6 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4 + 6 a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6$$

vien data dall'annullarsi dell'invariante R_{jH}.

Due casi particolari sono i seguenti:

$$\text{I.}\quad f = a_0 x_1^6 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4 + a_6 x_2^6,$$

$$\text{II.}\quad f = a_0 x_1^6 + 6 a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6.$$

I) In questo caso trovansi facilmente, oltre a $R = 0$ (v. § 1, cap. V), le relazioni invariantive:

$$3^2 A_{ll} - 2AK = 0, \qquad R_{jH} = 0,$$

le quali, essendo $K \gtrless 0$, equivalgono alle seguenti:

$$3^2 A_{ll} - 2AK = 0, \qquad 3^4 D - 2AK^2 - 2A^3 K = 0, \tag{α}$$

il che si accorda colla formula:

$$2^7 . 3^{24} K^6 R^2 = -(3^2 A_{ll} - 2AK) . M + 2^2 R_{jH} . N, \tag{β}$$

in cui è posto:

$$\begin{aligned} N = &- 2^4 . 3^{16} K^4 D^2 - 2^8 . 3^{14} K^2 A_{ll}^3 D - 2^6 . 3^{13} A K^3 A_{ll}^2 D + 2^2 . 3^{11} . 7 . 11 A^2 K^4 A_{ll} D \\ &+ 2^2 3^{13} . 5 K^5 A_{ll} D - 2^6 . 3^{11} A K^6 D + 2^6 . 3^8 . 5 A^3 K^5 D - 2^{12} . 3^{12} A_{ll}^6 - 2^{11} . 3^{11} A K A_{ll}^5 \\ &+ 2^6 . 3^9 . 61 A^2 K^2 A_{ll}^4 + 2^6 . 3^{11} K^3 A_{ll}^4 + 2^3 . 3^9 479 A K^4 A_{ll}^3 + 2^4 . 3^6 . 1297 A^3 K^3 A_{ll}^3 \\ &+ 2^2 . 3^8 . 197 A^2 K^5 A_{ll}^2 + 2^7 . 3^{10} K^6 A_{ll}^2 + 2^2 . 3^5 . 13 . 67 A^4 K^4 A_{ll}^2 + 2^2 . 3^5 . 5 . 317 A^3 K^6 A_{ll} \\ &+ 2 . 3^3 . 11 . 331 A^5 K^5 A_{ll} + 2 . 3^8 . 5 . 7 A K^7 A_{ll} + 3^9 K^9 - 3^6 . 5^2 . 7 A^2 K^8 + 3^3 . 47 . 101 A^4 K^7 \\ &+ 37 . 359 A^6 K^6. \end{aligned}$$

Reciprocamente, supponendo verificate le condizioni (α), si annullano R ed R_{jH}. Allora per la condizione $R = 0$ i 6 elementi di f appartengono alla stessa involuzione cui appartengono gli elementi di H e di j, e per la condizione $R_{jH} = 0$ due elementi di H coincidono in un solo elemento, il quale diviene anche doppio per la forma j. Ciò intanto può avvenire in due modi: o due elementi di H e due elementi di j coincidono in uno dei punti doppî dell'involuzione, ovvero le forme j e H ammettono due elementi doppî comuni. Intanto in questo ultimo caso, la forma j ammettendo due elementi doppî, si devono annullare i due invarianti (v. § 1, cap. V, pag. 43):

$$10^8 F_j = \frac{5^6 .}{2^7 . 3^{11}} K^2 \left\{ - 3^2 K . M + 2^4 R_{jH} (2^2 . 3^5 D - 2 . 3^2 . 11 K A_{ll} + 3 A^3 K - 61 A K^2) \right\},$$

$$E_j = \frac{-1}{2^6 . 3^8 . 5} \left\{ (3^2 A_{ll} - 2AK)(2^3 . 3^2 A_{ll} + 11 AK) + 2^2 R_{jH} \right\},$$

ed essendo $K \gtrless 0$, dev'essere $M = 0$ contro l'ipotesi. Per le ipotesi (α) adunque due elementi dell'essiano H coincidono in uno dei punti doppî della involuzione, al quale corrisponde un elemento dello steineriano, che rappresenta l'altro elemento doppio della involuzione, non potendo coincidere l'elemento doppio dell'essiano con quello dello steineriano, senza che si annulli il discriminante della forma fondamentale. Assumendo dunque come punti coordinati l'elemento doppio dell'essiano e il corrispondente dello steineriano, nella rappresentazione tipica della forma fondamentale debbono mancare i coefficienti delle potenze dispari delle variabili e dev'esser nullo T, cosicchè si avrà:

$$f^5 . f(y) = \xi^6 + \frac{15}{2} i f^2 . \xi^2 \eta^4 + \frac{A}{2} f^4 . \eta^6,$$

e si può enunciare il teorema:

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f assuma la forma trinomia pre-
« cedente sono:

$$3^2 A_{ll} - 2AK = 0 , \qquad 3^4 D - 2AK^2 - 2A^3 K = 0 .$$

II) In questo caso trovasi facilmente, oltre a $R_{jH}=0$,

$$A_{ll} = 0 , \qquad A_{lm} = 0 ;$$

donde segue:

$$C(6B - A^2) = C . K = 0 .$$

L'ipotesi $C=0$ conduce all'altra $B=0$, epperò i deve ammettere un elemento triplo, e poichè per l'equazione II è: $\alpha_3=\alpha_4=0$, dev'essere $\alpha_2=\frac{1}{3}a_0 a_6=0$.

Non può essere $a_0=0$ senza che si annulli il discriminante D_f, caso che noi escludiamo, epperò dev'essere $a_6=0$, cosicchè f assumerà la forma:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_5 x_1 x_2^5 ,$$

da cui si ricava $A=B=C=0$.

Reciprocamente, supposte le condizioni:

$$A = B = C = 0 , \qquad D \gtrless 0 ,$$

epperò:

$$A_{ll} = A_{nn} = A_{lm} = A_{mn} = 0 , \quad A_{mm} = A_{ln} \gtrless 0 ,$$

assumendo come punti coordinati gli elementi doppî l, n, possiamo porre:

$$l = x_2^2 , \qquad n = x_1^2 , \qquad m = 2m_1 x_1 x_2 .$$

D'altra parte essendo $(im)^2 i_x^2 = n = x_1^2$, si conchiude che i due elementi di n coincidono colla radice tripla di i e, poichè è $D_{il}=0$, i due elementi di l coincidono colla radice semplice di i, cosicchè possiamo porre:

$$i = 4\alpha_1 x_1^3 x_2 .$$

Dalle relazioni:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta , \qquad (an)^2 a_x^4 = lm ,$$

segue allora:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = 0 ,$$

e possiamo enunciare il teorema [1]:

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f assuma la forma binomia:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_5 x_1 x_2^5$$

« sono espresse dall'annullarsi dei tre invarianti A, B, C ».

Supponendo ora $C \gtrless 0$, si ottiene:

$$K = 0 , \qquad 6^2 . C + A^3 = 0 , \qquad D_i = 0 , \qquad R_{il} = 0 .$$

È facile vedere che l'elemento doppio i non può coincidere coll'elemento doppio l, senza che sia $B=C=0$; dunque possiamo porre, assumendo come punti coordinati l'elemento doppio di i e l'elemento comune ad i ed l:

$$i = 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + 4\alpha_3 x_1 x_2^3 , \quad l = x_1^2 .$$

Dalla relazione:

$$(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} A i ,$$

segue allora: $a_2 = a_3 = 0 ,$

[1] Cfr. Clebsch, op. cit. pag. 467.

e dalla relazione $(ai)^4 a_x^2 = l$ segue:

$$a_4 = 0\,, \text{ essendo } \alpha_2 \gtrless 0\,,$$

che insieme ad $\alpha_1 = 0$, dà a_5, epperò:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + a_6 x_2^6\,, \quad j = -6a_1^2 a_6 x_1^4 x_2^2\,;$$

si ha dunque il teorema:

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè f assuma la forma trinomia pre-
« cedente sono:

$$K = 0\,, \qquad 6^2.C + A^3 = 0\,,$$

equivalenti alle seguenti: $\quad K = 0\,, \qquad A_{ll} = 0\,.$

§ 3. $R_{if} = 0$.

In questo caso le forme i ed f hanno un elemento comune, cosicchè assumendo come punti coordinati questo elemento ed il centro armonico di prim'ordine dello stesso elemento rispetto agli altri cinque elementi di f, possiamo porre:

$$f = 6a_1 x_1^5 x_2 + 20a_3 x_1^3 x_2^3 + 15a_4 x_1^2 x_2^4 + 6a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6\,;$$

donde:

$$i = 4\alpha_1 x_1^3 x_2 + 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + 4\alpha_3 x_1 x_2^3 + \alpha_4 x_1^4\,.$$

Intanto, essendo $\alpha_0 = 2\,(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) = 0$, sarà $a_1 a_3 = 0$, epperò $a_3 = 0$, supponendo $D_f \gtrless 0$, e ne segue $\alpha_2 = 0$, e:

$$f = 6a_1 x_1^5 x_2 + 15a_4 x_1^2 x_2^4 + 6a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6\,,$$
$$i = 4\alpha_1 x_1^3 x_2 + \ 4\alpha_3 x_1\, x_2^3 \ + \alpha_4 x_2^4\,.$$

Reciprocamente, partendo dalla forma precedente di f, si trova:

$$A = -2^2.3a_1 a_5\,, \qquad B = 2^3.3a_1^2 a_4 a_6\,, \qquad C = -2^2.3^4 a_1^2 a_4^4\,,$$

$$l = 2a_1(-2a_1 a_6 x_1^2 + 2.3^2 a_4^2 x_1 x_2 + 2.3a_4 a_5 x_2^2)\,, \quad A_{ll} = 2C + \frac{1}{3} AB\,,$$

$$m = -2^2 a_1^2 \left\{ -3^3 a_4^3 x_1^2 + 2\,(a_1 a_6^2 + 3^2 a_4^2 a_5)\, x_1 x_2 + 3.5a_6 a_4^2 x_2^2 \right\},$$

$$A_{lm} = \frac{2}{3}\,(B^2 + AC)\,,$$

$$A_{mm} = D = -2^5\,(3^4.5a_1^4 a_4^5 a_6 + a_1^6 a_6^4 + 3^4 a_1^4 a_4^4 a_5^2 + 2\,.\,3^2 a_1^5 a_4^2 a_5 a_6^2)\,;$$

dalle quali si conchiude:

$$2^5.3^2 DC - 2^5.3\,.\,5BC^2 - 3^2 B^4 - 2^4 A^2 C^2 - 2^3.3AB^2 C = 0\,.$$

Dalle forme che assumono f e i si conchiude che è nulla la risultante di f e i, e poichè la forma quadrinomia che assume f non suppone che una sola condizione, così il primo membro della relazione ultimamente trovata non può differire che per un fattor numerico dalla risultante R_{if}, e possiamo conchiudere che:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè f assuma la forma quadrinomia
« suddetta è $R_{if} = 0$.

Un caso particolare è quello in cui si annullano i due invarianti B e C. Allora il covariante i ammetterà un elemento triplo e si trova:

$$R_{il} = 0\,, \quad A_{ll} = A_{nn} = A_{lm} = A_{mn} = 0\,, \quad A_{ln} = A_{mm} = D \gtrless 0\,,$$

cosicchè si potrà porre:

$$l = x_1^2 , \qquad n = x_2^2 , \qquad m = 2m_1 x_1 x_2 .$$

Dalla relazione $(im)^2 i_x^2 = n = x_2^2$, si conchiude che x_2 è l'elemento triplo di i, epperò possiamo porre:

$$i = 4\alpha_3 x_1 x_2^3 .$$

Infine dalla relazione $(al)^2 a_x^4 = 2\Delta + \frac{1}{3} Ai$ segue:

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0 ,$$

che insieme a $\alpha_2 = 0$, e $\alpha_3 \gtrless 0$ danno $a_0 = 0$, epperò:

$$f = 6a_1 x_1^5 x_2 + 6a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6 .$$

In questo caso dunque i due elementi di n coincidono con un elemento di f, e gli altri cinque elementi di f costituiscono una quintica di cui è nullo l'invariante di 12.° grado ([1]), la quale pertanto si risolve direttamente per le funzioni ellittiche.

Possiamo intanto concludere:

« Le condizioni necessarie sufficienti perchè f assuma la forma trinomia precedente sono: $\quad B = 0 , \quad C = 0 .$

§ 4. $R_{ij} = 0$.

La radice comune alle due equazioni:

$$i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2 = 0 , \qquad j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 = 0$$

rappresenta un punto tale, che i centri armonici di 4° ordine di esso rispetto alla forma fondamentale hanno tre elementi coincidenti. Assumendo dunque come punti coordinati l'elemento comune alle forme i e j e l'elemento triplo dei centri armonici di 4° ordine del primo rispetto a f, possiamo porre:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 6a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6 .$$

Reciprocamente, se f assume la forma quadrinomia precedente, si trova:

$$A = 2(a_0 a_6 - 6a_1 a_5) , \quad i = 4a_0 a_5 x_1^3 x_2 + 2a_0 a_6 x_1^2 x_2^2 + 4a_1 a_6 x_1 x_2^3 ,$$

$$B = \frac{2}{3} (-2^2 . 3a_0 a_1 a_5 a_6 + a_0^2 a_6^2) , \quad C = \frac{2}{3^2} (2 . 3^2 a_0^2 a_6^2 a_1 a_5 - a_0^3 a_6^3) ,$$

$$6B - A^2 = K = -2^4 . 3^2 a_1^2 a_5^2 , \quad 2^2 . 3^2 C + A^3 = 2^5 . 3^3 (a_0 a_6 a_1^2 a_5^2 - 2a_1^3 a_5^3) ,$$

$$l = -2^2 (a_0 a_5^2 x_2^2 + a_1^2 a_6 x_1^2) , \quad A_{ll} = 2C + \frac{1}{3} AB = 2^5 a_0 a_6 a_1^2 a_5^2 ,$$

$$2^2 . 3^2 C + A^3 = 3^3 A_{ll} + 2^2 . 3K a_1 a_5 , \quad \left\{ \frac{2^2 . 3^2 C + A^3 - 3^3 A_{ll}}{K} \right\}^2 = -K ,$$

$$(2^2 . 3^2 C + A^3 - 3^3 A_{ll})^2 + K^3 = 0 .$$

Poichè la forma quadrinomia, che in questo caso assume f, non implica che una sola condizione e dev'essere nulla la risultante R_{ij}, così questa non può differire dal quadrato del 1° membro della relazione precedente, che per un fattore numerico, e si può conchiudere:

([1]) Clebsch, op. cit. pag. 386.

« La condizione necessaria e sufficiente perchè f assuma la forma quadrinomia « suddetta è:

$$R_{ij} = 0 .$$

Può verificarsi la seguente identità:

$$R_{ij} = (2^2.3^2 C + A^3 - 3^3 A_{ll})^2 + K^3 = (3^2 A^3 + 2^2.5^3 C)(7^2 A^3 + 2^2.3^2.5^3 C)$$
$$+ 3(2.5^2 B - 7A^2)(2^4.5^4.B^2 + 2.3.5^2 A^2 B + 3.7A^4 + 2^3.3.5^4 AC).$$

Supponiamo pertanto come caso particolare:

$$B = \frac{7A^2}{50}, \qquad C = -\frac{9A^3}{500},$$

epperò:

$$R_{ij} = 0, \qquad f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 6a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6.$$

Inoltre, formando l'invariante simultaneo delle due quadratiche l e $10m - A.l$, si trova:

$$2.7AC - A^2 B + 2^2.5B^2 =$$
$$= \frac{1}{2.5^3} \left\{ (2.5^2 B - 7A^2)(2^2.5^2 B + 3^2 A^2) + 7A(2^2.5^3.C + 3^2 A^3) \right\} = 0,$$

e poichè dalla f segue:

$$l = -2^2(a_1^2 a_6 x_1^2 + a_0 a_5^2 x_2^2), \qquad 3m = a_0 a_6 . l - 2^3.3(a_0^2 a_5^3 + a_6^2 a_1^3) x_1 x_2,$$

dovendo nella quadratica $10m - A.l$ mancare il 1° e 3° coefficiente, dev'essere:

$$A = \frac{10}{3} a_0 a_6 = 2(a_0 a_6 - 6a_1 a_5),$$

cioè:

$$a_0 a_6 + 9a_1 a_5 = 0,$$

e la equazione $f = 0$ coincide con quella pel moltiplicatore della transformazione di 5° ordine delle funzioni ellittiche, la quale così viene caratterizzata dalle condizioni [1]:

$$B = \frac{7A^2}{50}, \qquad C = -\frac{9A^3}{500}.$$

§ 5. $K = 0$.

Il cataletticante della sestica (V. Salmon Lessons 203) è:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2^4.3^2}(6B - A^2) = -\frac{K}{2^4.3^2},$$

cosicchè, supponendo $K = 0$, si potrà porre:

$$f = a_1 x_1^6 + a_2 x_2^6 + a_3 x_3^6, \qquad \text{essendo:} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

da cui si ottiene:

$$A = 2(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2), \quad i = 2(a_2 a_3 x_2^2 x_3^2 + a_3 a_1 x_3^2 x_1^2 + a_1 a_2 x_1^2 x_2^2),$$
$$B = \frac{2}{3}(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)^2, \quad j = 6a_1 a_2 a_3 x_1^2 x_2^2 x_3^2, \quad l = 2a_1 a_2 a_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$
$$C = 2^2.3a_1^2 a_2^2 a_3^2 - \frac{2}{3^2}(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)^3.$$

[1] Cfr. Clebsch, op. cit. pag. 462.

In questo caso si deve supporre $A_u \gtrless 0$, perchè le due condizioni $A_u = 0$ e $K = 0$ portano alla conseguenza (v. § 2, cap. V): $j = -6a_1^2 a_6 x_1^4 x_2^2$.

Si trova inoltre:

$$H = 2 \left\{ a_2 a_3 x_2^4 x_3^4 + a_3 a_1 x_3^4 x_1^4 + a_1 a_2 x_1^4 x_2^4 \right\},$$

$$T = a_1^2 x_1^9 (a_2 x_2^3 - a_3 x_3^3) + a_2^2 x_2^9 (a_3 x_3^3 - a_1 x_1^3) + a_3^2 x_3^9 (a_1 x_1^3 - a_2 x_2^3) +$$
$$+ a_1 a_2 a_3 x_1^3 x_2^3 x_3^3 \left\{ x_2 x_3^2 - x_3 x_2^2 + x_3 x_1^2 - x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2 \right\}.$$

Si conchiude dunque:

« Se annullasi il cataletticante K di f, j diviene il quadrato del canonizzante « di f ».

Vogliamo conchiudere il presente capitolo, enunciando le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma fondamentale f ammetta una o più radici di data multiplicità.

I. Una radice doppia:

$D_f = 0$. [v. Cap. IV, form. (1)]

II. Una radice tripla:

$i_\delta \equiv 0$, $A_\delta = 0$; [Cap. III, § 11]

ovvero: $3.5m - 2^2 A . l \equiv 0$; [Cap. III, § 8, form. α]

ovvero:

$3.5^2 B - 2^3 A^3 = 0$, $3^2.5^3 C - 2^4 A^3 = 0$, $3^2.5^5 D - 2^7 A^5 = 0$. [Cap. III, § 8]

III. Una radice quadrupla:

$l \equiv 0$, $A = 0$, [Cap. III, § 4]

ovvero: $\Delta \equiv 0$. [Cap. III, § 2]

IV. Una radice quintupla:

$i \equiv 0$, $A = 0$. [Cap. I, Teorema V]

V. Una radice sestupla:

$H \equiv 0$. [Cap. I, Teorema I]

VI. Due radici doppie:

$D_f = 0$, $F = 0$. [Cap. V, § 1, 2]

VII. Una radice doppia e una tripla:

$3.5m - 2^2 A . l \equiv 0$, $(2Ai - 3.5\Delta)(5fl - 2^2 AH) - 3.5^3 \delta^2 \equiv 0$.

[Cap. III, § 8, form. (α) e § 11 form. (γ)]

VIII. Una radice doppia e una quadrupla:

$A = 0$, $3iH - 4jf \equiv 0$. [Cap. I, Teorema IV]

IX. Due radici triple:

$T \equiv 0$; ovvero $A \gtrless 0$, e $3iH - 4jf \equiv 0$. [Cap. I, Teorema II]

X. Tre radici doppie:

$5^2 B - 2.3A^2 = 0$, $5^3 C + 2.3A^3 = 0$, $5^5 D + 2^3 A^5 = 0$. [Cap. V, § 1 in fine].

CAPITOLO VI.

Casi notevoli dell'equazione $j=0$.

§ 1 $l_j \equiv 0$.

Poniamo:

$$j=j_0 x_1^6+6j_1 x_1^5 x_2+15j_2 x_1^4 x_2^2+20j_3 x_1^3 x_2^3+15j_4 x_1^2 x_2^4+6j_5 x_1 x_2^5+j_6 x_2^6, \quad (\alpha)$$

e cerchiamo le condizioni perchè j riducasi alla forma binomia:

$$j=j_0 x_1^6+j_6 x_2^6. \quad (\beta)$$

Giusta il § 4, cap. III dev'essere:

$$10^2 l_j=\left(\frac{2}{3}A_{ll}+\frac{5}{2.3^2}AK\right)l-Km\equiv 0, \qquad A_j \gtrless 0,$$

epperò, se non è $l\equiv 0$, dev'essere $(lm)l_x m_x\equiv 0$, e la f può assumere una delle tre forme studiate al § 8, cap. III. Intanto è facile vedere che dei tre casi bisogna escludere quello in cui f assume la forma:

$$f=a_0 x_1^6+6a_1 x_1^5 x_2+20a_3 x_1^3 x_2^3,$$

perchè anche j assume la forma:

$$j=-6a_0 a_3^2 x_1^6+12a_1 a_3^2 x_1^5 x_2-24a_3^3 x_1^3 x_2^3,$$

epperò non si può ridurre per trasformazione lineare alla forma binomia (β).

Se f assume la forma:

$$f=x_1 x_2(6a_1 x_1^4+20a_3 x_1^2 x_2^2+6a_5 x_2^4),$$

si ha:

$$2K.m+3A_{ll}.l\equiv 0,$$

che insieme all'identica equazione:

$$l_j\equiv 0,$$

fornisce la relazione invariantiva:

$$19.3^2 A_{ll}+5^2 AK=0.$$

Se f assume la forma:

$$f=a_0 x_1^6+20a_3 x_1^3 x_2^3+a_6 x_2^6,$$

si ha:

$$Bm-2C.l\equiv 0,$$

che insieme all'equazione identica:

$$l_j\equiv 0,$$

fornisce la relazione invariantiva:

$$\frac{2}{5}A_{ll}.B+\left(\frac{5}{2.3^2}AB-2C\right)K=0.$$

Si conchiude pertanto:

Il covariante j riducesi alla forma binomia $j_0 x_1^6+j_6 x_2^6$ in uno dei due casi:

1) $\quad B\Delta-Ci\equiv 0, \qquad \frac{2}{5}A_{ll}.B+\left(\frac{5}{2.3^2}AB-2C\right)K=0,$

2) $\quad i_j\equiv 0, \quad A_j\gtrless 0, \qquad 19.3^2 A_{ll}+5^2 AK=0.$

§ 2. $\Delta_j \equiv 0$.

In questo caso, oltre il discriminante della forma j, annullansi i quattro invarianti fondamentali A_j, B_j, C_j, D_j. Supponendo $K \gtrless 0$, dev'essere, giusta la formula (47) del cap. II, $R_{j_{ll}} = 0$, che insieme alle condizioni $A_j = 0$, $B_j = 0$, $C_j = 0$ (V. formule 41 e 45, cap. II), dà le relazioni $A = B = C = 0$, epperò $K = 0$, $A_{ll} = 0$. Dunque in questo caso deve sempre supporsi $K = 0$, epperò, essendo $A_j = 0$, anche $A_{ll} = 0$. Intanto in questo caso abbiamo dimostrato (v. Cap. V, § 2) che la forma fondamentale diviene:

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + a_6 x_2^6,$$

e la forma j diviene:

$$j = -6a_1^2 a_6 x_1^4 x_2^2.$$

Si può adunque conchiudere:

« Il covariante j non può ammettere un elemento quadruplo senza che gli altri « due elementi coincidano fra loro ».

§ 3. $i_j \equiv 0$.

Se è $K = 0$, l'equazione identica $i_j = \frac{1}{60} Ki + \frac{3}{50} l^2 \equiv 0$ riducesi a $l \equiv 0$. Intanto se è $A \gtrless 0$, f riducesi alla forma binomia $f = a_0 x_1^6 + a_6 x_2^6$ e j annullasi identicamente; se è $A = 0$, f ammette un elemento quadruplo che diviene sestuplo per la forma j. Se insieme ad $l \equiv 0$ si ha $i \equiv 0$, giusta la formula:

$$j = -p + \frac{1}{6} Af,$$

si ha $j = \frac{1}{6} A.f$.

Supponendo $K \gtrless 0$, giusta la relazione:

$$i_j = \frac{1}{60} Ki + \frac{3}{50} l^2 \equiv 0,$$

i differisce dal quadrato di l per un fattor costante, nel qual caso la forma fondamentale per trasformazione lineare riducesi alla forma trinomia:

$$f = a_0 x_1^6 + 20 a_3 x_1^3 x_2^3 + a_6 x_2^6,$$

donde ricavasi:

$$Di - 2Cl^2 \equiv 0.$$

Allora, in virtù dell'equazioni identiche:

$$\frac{1}{60} Ki + \frac{3}{50} l^2 \equiv 0, \qquad Di - 2Cl^2 \equiv 0,$$

deve sussistere la relazione invariantiva:

$$5KC + 3^2 D = 0.$$

Reciprocamente, supponendo verificate le condizioni:

$$B\Delta - Ci \equiv 0, \qquad 5KC + 3^2 D = 0,$$

sarà:

$$Di - 2Cl^2 \equiv 0, \qquad i_j = \frac{1}{60} Ki + \frac{3}{50} l^2 \equiv 0.$$

Si può conchiudere pertanto il teorema:

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè j rappresenti il covariante di « 6° ordine di una forma biquadratica sono espresse o dall'identica equazione $i \equiv 0$, « nel qual caso j non differisce dalla forma fondamentale che per un fattor costante, « ovvero dalla equazione identica $B\Delta - Ci \equiv 0$, insieme alla relazione invariantiva « $5KC + 3^2 D = 0$ ».

§ 4. $3.5m_j - 2^2 A_j . l_j \equiv 0$.

In questo caso, in cui j ammette un elemento triplo, dev'essere nullo il suo discriminante D_j, epperò, giusta la relazione:

$$-2^{10}.3^9 D_j = K^3 . R_{jH},$$

dev'essere nullo R_{jH}, ovvero K. Se è $R_{jH} = 0$, siccome (v. Cap. III, § 8) si annullano gl'invarianti $3.5^2 B_j - 2^3 A_j^2$, e $3^2.5^3 C_j - 2^4 A_j^3$, giusta le relazioni:

$$2^3.3^4.5.10^2(3.5^2B_j - 2^3A_j^2) = 2^3(3^2.5A_{ll} + 2^3AK)(2.3^2.5A_{ll} - 11AK) + 3^4K^2(3^2A^2 + 5^2K) = 0,$$

$$2^3.3^6.10^4(3^2.5^3C_j - 2^4A_j^3) - 5.10^2 R_{jH} - 2.3^4.10^3(3.5^2B_j - 2^3A_j^2)(5^3 AK + 2^2.3^2.17A_{ll}) +$$
$$+ 3^4.5^3K^3(3^2.5A_{ll} + 2^3 AK) = 0,$$

se è $K \gtreqless 0$, dev'essere:

$$3^2.5A_{ll} + 2^3 AK = 0, \qquad 3^2A^2 + 5^2K = 0, \qquad R_{jH} = 0,$$

che equivalgono alle tre altre:

$$3.5^2B - 2^3A^2 = 0, \qquad 3^2.5^3C - 2^4A^3 = 0, \qquad 3^2.5^5D - 2^7A^5 = 0,$$

che sono necessarie e sufficienti perchè f ammetta un elemento triplo. Reciprocamente è facile vedere che, se f ammette un elemento triplo, questo è anche triplo per la forma j.

L'ipotesi $K = 0$ conduce ad $A_{ll} = 0$, nel qual caso j ammette un elemento quadruplo. Si può dunque concludere:

« La forma j non può ammettere un elemento triplo senza che f ammetta lo « stesso elemento triplo ».

§ 5. $T_j \equiv 0$.

Abbiamo dimostrato che se un elemento diviene triplo per la forma j, senza diventare di superiore multiplicità, dev'essere anche triplo per la forma fondamentale. Pertanto nel presente caso, in cui j ammette due elementi tripli, anche f ammetterà gli stessi elementi tripli, e si annullerà identicamente il suo covariante T. Da ciò il teorema:

« Le due equazioni identiche:

$$T \equiv 0, \qquad T_j \equiv 0$$

« sono l'una conseguenza dell'altra ».

§ 6. $i_j \equiv 0, \quad A_j = 0$.

In questo caso j deve ammettere un elemento quintuplo, con cui verrà a coincidere il 6° elemento, giusta il teorema dimostrato al § 2 di questo capitolo.

Questo risultato si potrebbe ottenere direttamente, considerando l'essiano della forma j. Infatti trovando l'essiano di j, dopo parecchie trasformazioni, si ottiene la seguente notevole relazione:

$$-2^2.3^2.5H_j = 5KH + 24l.j,$$

dalla quale si conchiude che non può essere $H_j \equiv 0$, senza che sia $\Delta \equiv 0$, cioè senza

che la forma fondamentale ammetta un elemento quadruplo, risultato cui si arriva ponendo le condizioni:

$$i_j \equiv 0, \qquad A_j = 0.$$

Vogliamo conchiudere questo capitolo, enunciando le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma j assuma una data forma particolare.

I. I sei elementi del covariante j appartengono alla stessa involuzione se è nullo il cataletticante K della forma fondamentale, nel qual caso j diviene un quadrato; ovvero se è nullo l'invariante gobbo R della forma fondamentale, nel qual caso i 6 elementi di f appartengono alla stessa involuzione, ovvero se è nullo l'invariante $3^5 K^3 (2.^3 3^2 A_u + 11 AK) + 2^4 R_{jH}$, giusta la formula:

$$10^9 R_j = -\frac{K^3 R}{2^6 . 3^9 . 5} \left\{ 3^5 K^3 (2^3 . 3^2 A_u + 11 AK) + 2^4 R_{jH} \right\}.$$

II. Il covariante j ammette un solo elemento doppio se questo diviene anche doppio per l'essiano, epperò annullasi la risultante R_{jH}.

III. Il covariante j ammette un elemento doppio, punto doppio della involuzione determinata dagli altri quattro elementi, se insieme ad R_{jH} annullasi l'invariante:

$$E_j = -\frac{1}{2^6 . 3^8 . 5} \left\{ (3^2 A_u - 2AK)(2^3 . 3^2 A_u + 11 AK)^2 + 2^2 R_{jH} \right\},$$

epperò in uno dei due casi:

$$R_{jH} = 0, \quad 3^2 A_u - 2AK = 0, \qquad \text{ovvero:} \qquad R_{jH} = 0, \quad 2^3 . 3^2 A_u + 11 AK = 0.$$

IV. Il covariante j si scompone in una cubica e nel covariante di 3° ordine di quella cubica in uno dei due casi:

1) $$B\Delta - Ci \equiv 0, \quad \frac{2}{5} A_u . B + \left(\frac{5}{2 . 3^2} AB - 2C \right) K = 0;$$

2) $$i_\delta \equiv 0, \qquad A_\delta \gtrless 0, \qquad 19 . 3^2 A_u + 5^2 AK = 0.$$

V. Il covariante j rappresenta il covariante di 6° ordine di una forma biquadratica se annullasi identicamente i, nel qual caso j differisce da f pel fattore $\frac{1}{6} A$, ovvero se verificansi le condizioni:

$$B\Delta - Ci \equiv 0, \qquad 5KC + 3^2 D = 0.$$

VI. Il covariante j ammette un elemento triplo, quando questo è anche triplo per la forma fondamentale, epperò verificansi le condizioni:

$$i_\delta \equiv 0, \qquad A_\delta = 0;$$

ovvero:

$$3 . 5m - 2^2 A . l \equiv 0;$$

ovvero:

$$3 . 5^2 B - 2^3 A^3 = 0, \quad 3^2 . 5^3 C - 2^4 A^3 = 0, \quad 3^2 . 5^5 D - 2^7 A^5 = 0.$$

VII. Il covariante j non può ammettere un elemento quadruplo senza che gli altri due elementi coincidano fra loro e verifichinsi le condizioni:

$$K = 0, \qquad A_u = 0.$$

VIII. Il covariante j non può ammettere un elemento quintuplo senza che con esso venga a coincidere il 6° elemento e quattro elementi della forma fondamentale, cosicchè le due equazioni identiche:

$$\Delta \equiv 0, \qquad H_j \equiv 0$$

sono l'una conseguenza dell'altra.

IX. Il covariante j ammette due soli elementi doppî se insieme a R_{jH} annullasi l'invariante:

$$10^8 F_j = \frac{5^6}{2^7 . 3^{11}} K^2 \left\{ -3^2 . KM + 2^4 R_{jH} (2^2 . 3^5 D - 2 . 3^2 . 11 K A_{ll} + 3A^3 K - 61 A K^2) \right\},$$

epperò, essendo $K \gtrless 0$, se verificansi le due condizioni:

$$R_{jH} = 0 , \qquad M = 0 .$$

X. Il covariante j ammette un elemento triplo e un'altro doppio, se insieme all'equazione identica $3 . 5m - 2^2 A . l \equiv 0$, verificasi l'altra:

$$(2A_j . i_j - 3 . 5\Delta_j)(5 . j . l_j - 2^2 A_j H_j) - 3 . 5^3 \delta_j^2 \equiv 0 , \qquad (\alpha)$$

in cui è posto:

$$\delta_j = (j , l_j) .$$

Intanto, servendosi della formula:

$$-2^2 . 3^2 . 5H_j = 5KH + 2^3 . 3lj ,$$

e delle seguenti:

$$A_j = \frac{3^2}{2^2 . 5^4} A^3 , \quad l_j = \frac{3^3}{2^3 . 5^6} A^3 . l , \quad (j , l_j) = \frac{3^3}{2^3 . 5^6} A^3 . (j , l) = \frac{3^3}{2^3 . 5^6} A^3 . \varepsilon ,$$

$$2^3 A^2 i + 2 . 3 . 5 A\Delta - 3 . 5^2 l^2 \equiv 0 ,$$

che seguono dall'identica equazione $3 . 5m - 2^2 A . l \equiv 0$, l'equazione (α) diviene:

$$A \left\{ 3 . 5\Delta - 2Ai \right\} \left\{ 5^3 l . j - 2 . 3A^2 H \right\} - 2 . 3^3 . 5^4 \varepsilon^2 \equiv 0 .$$

XI. Il covariante j non può ammettere due elementi tripli senza che questi diventino tripli per la forma fondamentale, cosicchè le due equazioni identiche:

$$T \equiv 0 , \qquad T_j \equiv 0$$

sono l'una conseguenza dell'altra.

XII. Il covariante j ammette tre elementi doppî se annullasi il cataletticante della forma fondamentale K; ovvero se, essendo $K \gtrless 0$, annullansi i tre invarianti (v. Cap. V, § 1):

$$R_{jH} = -(3^2 A_{ll} - 2AK)(2^4 . 3^4 A_{ll}^2 + 2^2 . 3^2 . 11 AKA_{ll} + 91 A^2 K^2 + 3^3 K^3) +$$
$$+ 2 . 3^4 K^2 A (K + 2^2 A^2)(3^2 A^2 - K) + 3^5 K^2 (3^3 D - 2^3 A^5) ,$$

$$10^2 (5^2 B_j - 2 . 3A_j^2) = - \frac{5}{2^3 . 3^3} K \left\{ 2^3 A (3^2 A_{ll} - 2AK) + 3^2 K (3A^2 - K) \right\} ,$$

$$10^4 (5^3 C_j + 2 . 3A_j^3) = \frac{5^2 K}{2^4 . 3^5} \Big[2 (3^2 A_{ll} - 2AK)(-2^3 . 3^3 AA_{ll} - 2 . 3 . 31 A^2 K + 7K^2) +$$
$$+ K \left\{ 3A (2^6 . 5A^2 - K)(3A^2 - K) + 2^3 . 3^2 . 5 (3^3 D - 2^3 A^5) \right\} \Big] ,$$

epperò se verificansi le tre condizioni:

$$3A^2 - K = 0 , \qquad 3^2 A_{ll} - 2AK = 0 , \qquad 3^3 D - 2^3 A^5 = 0 .$$

CAPITOLO VII.

Radici multiple dell'essiano della sestica binaria.

Prima di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'essiano della sestica ammetta una o più radici di date multiplicità, vogliamo dimostrare alcuni teoremi riguardanti l'essiano di una forma binaria qualunque.

« *Teorema* I. — Una radice multipla secondo il numero k per la forma fon-
« damentale:

$$f = a_x{}^n = b_x{}^n = \dots$$

« è multipla secondo $2k-2$ per l'essiano:

$$\mathrm{H} = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}.$$

Si ha infatti, ponendo:

$$f = (xy)^k . \varphi, \qquad \varphi = \varphi_x^{n-k} = \varphi'^{n-k}_x = \dots,$$

$$\mathrm{H} = (n-k)(xy)^{2k-2} \Big\{ 2k(k-1)(n-k-1)\varphi . \varphi'^{n-k-2}_x \varphi'^2_y - 2k^2(n-k)\varphi_x^{n-k-1}\varphi_y . \varphi'^{n-k-1}_x \varphi'_y +$$
$$+ (n-k)(n-k-1)(n+k-1)\mathrm{H}_\varphi \Big\},$$

ove è posto:

$$\mathrm{H}_\varphi = (\varphi\varphi')^2 \varphi_x^{n-k-2} \varphi'^{n-k-2}_x.$$

Da questa formula si vede inoltre, che una radice della forma fondamentale, multipla secondo $2k-2$ per l'essiano, dev'esser multipla secondo k per la forma f.

« *Teorema* II. — Una radice multipla secondo $2k-2$, in cui è $k < \frac{n}{2}$, per
« l'essiano, non appartenente alla forma fondamentale, è multipla secondo i nu-
« meri $2k-4$ e $4k-6$ risp. per le forme i e j ».

Dalla formula:

$$(a\mathrm{H})^2 a_x^{n-2} \mathrm{H}_x^{2n-6} = \frac{n-3}{2(2n-5)} i . f$$

si conchiude infatti che la radice dell'essiano, multipla secondo $2k-2$, è multipla secondo $2k-4$ pel covariante i, e dalla formula:

$$(\mathrm{HH}')^2 \mathrm{H}_x^{2n-6} \mathrm{H}'^{2n-6}_x = \frac{1}{3} j . f - \frac{1}{2(2n-5)} i . \mathrm{H},$$

che la stessa radice, multipla secondo $4k-6$ per l'essiano dell'essiano (Teor. I), dev'esser multipla secondo $4k-6$ per la forma j.

Supponendo n pari e $k = \frac{n}{2}$, avuto riguardo al peso e al grado dei coefficienti dell'essiano rispetto alla forma fondamentale, i quali per la prima metà sono forniti dalla doppia somma:

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} \sum_{s=0}^{s=k} \binom{n-2}{s} \binom{n-2}{k-s} (a_s a_{k+2-s} - 2a_{s+1} a_{k+1-s} + a_{s+2} a_{k-s}) x_1{}^{2n-4-k} x_2{}^k,$$

e per la seconda metà dalla doppia somma:

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} \sum_{s=0}^{s=k} \binom{n-2}{s} \binom{n-2}{k-s} (a_{n-s} a_{n-k-2+s} - 2a_{n-s-1} a_{n-k-1+s} + a_{n-s-2} a_{n-k+s}) x_2^{2n-4-k} x_1^k ,$$

assumendo come punto coordinato l'elemento multiplo dell'essiano, si conchiude facilmente che annullansi i coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ della forma fondamentale, epperò (cfr. Teorema VII, Cap. I):

$$j \equiv 0 , \qquad H = 2a_0 a_n x_1^{n-2} x_2^{n-2} .$$

Per valori di k superiori a $\frac{n}{2}$ la radice multipla dell'essiano diviene radice della forma fondamentale.

« *Teorema* III. — Una radice della forma fondamentale, multipla per l'essiano « secondo $2k-2$, è multipla secondo i numeri k, $2k-4$, $3k-6$ risp. per le forme « f, i, j, nella ipotesi di $k < n-1$ ».

Questo teorema è una conseguenza del teorema I e della formula:

$$(HH')^2 H_x^{2n-6} H'^{2n-6}_x = \frac{1}{3} j . f - \frac{1}{2(2n-5)} i . H .$$

Per $k = n-1$ si ha: $i \equiv 0$, $j \equiv 0$.

« *Teorema* IV. — Una radice multipla secondo $2k+1$, essendo $k < \frac{n-3}{2}$, « per l'essiano, dev'esser multipla secondo i numeri $2k-1$ e $4k$ risp. per le forme « i, j ».

Infatti una radice di multiplicità dispari non può, giusta il teorema I, esser radice della forma fondamentale, e diviene multipla secondo $2k-1$ pel covariante i, giusta la formula:

$$(aH)^2 a_x^{n-2} H_x^{2n-6} = \frac{n-3}{2(2n-5)} i . f ,$$

e multipla secondo $4k$ per la forma j, giusta la formula:

$$(HH')^2 H_x^{2n-6} H'^{2n-6}_x = \frac{1}{3} j . f - \frac{1}{2(2n-5)} i . H .$$

Per n dispari e $k = \frac{n-3}{2}$ si conchiude, come al teorema II, $j \equiv 0$ e $H = 2a_0 a_n x_1^{n-2} x_2^{n-2}$. Per valori di k superiori a $\frac{n-3}{2}$ si prova facilmente che l'elemento multiplo dell'essiano diviene comune alla forma fondamentale e quindi (Teor. I) di multiplicità pari.

Da quanto precede seguono inoltre i teoremi:

Teorema V. — « Se l'essiano di una binaria di ordine pari ammette un ele- « mento multiplo secondo $n-2$, o questo elemento diviene multiplo per la forma fon- « damentale secondo $\frac{n}{2}$, ovvero gli altri $n-2$ elementi dell'essiano coincidono in « un solo ».

Teorema VI. — « Se $n-2$ elementi dell'essiano di una binaria di ordine dispari « coincidono in un solo elemento, gli altri $n-2$ devono coincidere fra loro ».

Passiamo ora all'esame dei casi in cui l'essiano della sestica binaria ammette uno o più elementi multipli.

I) L'essiano della sestica binaria ammette un elemento doppio, se annullasi il discriminante della forma fondamentale:

$$D_f = 0 , \qquad (1)$$

ovvero se annullasi la risultante delle forme H e j:

$$R_{jH} = 0 . \qquad (2)$$

II) L'essiano della sestica binaria ammette un elemento triplo, quando la forma j ammette lo stesso elemento quadruplo, epperò quando sussistono le due relazioni invariantive:

$$K = 0 , \qquad A_{ll} = 0 . \qquad (3)$$

Questo teorema, che si deduce immediatamente dal teorema IV, vien confermato dalla considerazione che in questo caso la forma j deve ammettere l'elemento dell'essiano ad una multiplicità superiore alla 3ª, altrimenti, giusta il teorema dimostrato al § 4, cap. VI, quell'elemento diviene anche triplo per la forma fondamentale.

III) Se l'essiano ammette un elemento quadruplo, questo diviene triplo per le forme f, j e doppio per la forma i, epperò verificansi le tre condizioni:

$$3 . 5^2 B - 2^3 A^2 = 0 , \qquad 3^2 . 5^3 C - 2^4 A^3 = 0 , \qquad 3^2 . 5^5 D - 2^7 A^5 = 0 . \qquad (4)$$

IV) Se l'essiano ammette un elemento sestuplo, questo diviene quadruplo per la forma j, e verificasi l'identica equazione:

$$\Delta \equiv 0 . \qquad (5)$$

V) Se l'essiano diviene la ottava potenza di un elemento, questo diviene quintuplo per la forma fondamentale e verificansi le condizioni:

$$i \equiv 0 , \qquad A = 0 . \qquad (6)$$

VI) L'essiano ammette due radici doppie in uno dei tre casi seguenti:

1) Se f ammette due elementi doppî, epperò verificansi le condizioni:

$$D_f = 0 , \qquad F = 0 ; \qquad (7)$$

2) ovvero se annullasi il discriminante di f e la risultante di H e j, epperò verificansi le condizioni:

$$D_f = 0 , \qquad R_{jH} = 0 ; \qquad (8)$$

3) ovvero se j ammette due elementi doppî, epperò verificansi le condizioni:

$$R_{jH} = 0 , \qquad M = 0 . \qquad (9)$$

Quest'ultima asserzione confermasi così. Per la formula (β) § 2, cap. V, in questo caso j e H appartengono alla stessa involuzione cui appartengono gli elementi di f, poichè annullasi l'invariante gobbo di quest'ultima: R. Intanto, supponendo $E_j \gtrless 0$, non possono due elementi di j coincidere in uno dei punti doppî dell'involuzione, ma coincideranno gli elementi di una coppia con quelli di un'altra coppia, e in questi due elementi doppî di j verranno a coincidere due elementi doppî di H, essendo nulla la risultante R_{jH}.

VII) L'essiano ammette un elemento doppio ed un altro triplo se questi elementi sono risp. doppio per la forma fondamentale e quadruplo per la forma j, ovvero se verificansi le tre condizioni:

$$K = 0 , \qquad A_{ll} = 0 , \qquad D_f = 0 \qquad (10)$$

equivalenti a:

$$K = 0, \qquad A_{ll} = 0, \qquad 5^5 D + A^5 = 0, \qquad (11)$$

giusta la formula:

$$3^2 D_f = -3^2.5^5 K A_{ll} + 3^3.5^4 A^2 A_{ll} - 5^5 AK^2 + 2.5^3 A^3 K - 3^4 A^5 - 3^4.5^5 D. \qquad (12)$$

VIII) L'essiano ammette una radice doppia e un'altra quadrupla in uno dei due casi:

1) se queste radici diventano rispettivamente doppia e tripla per la forma f, epperò verificansi le condizioni:

$$3.5m - 2^2 A.l \equiv 0, \qquad \Theta \equiv (2Ai - 3.5\Delta)(5fl - 2^2 AH) - 3.5^3\delta^2 \equiv 0; \qquad (13)$$

2) ovvero se la prima diventa doppia per la forma j e la seconda tripla per la forma f e quindi anche per j, epperò verificansi le condizioni:

$$3.5m - 2^2 A.l \equiv 0, \quad \Theta_j \equiv A(2Ai - 3.5\Delta)(5^3 l.j - 2.3A^2 H) + 2.3^3.5^4\varepsilon^2 \equiv 0. \qquad (14)$$

IX) L'essiano ammette un elemento doppio e un altro sestuplo se questi diventano risp. doppio e quadruplo per la forma fondamentale, epperò verificansi le condizioni:

$$A = 0, \qquad 3iH - 4jf \equiv 0. \qquad (15)$$

X) L'essiano della sestica binaria non può ammettere due elementi tripli.

XI) L' essiano della sestica binaria ammette due elementi quadrupli in uno dei casi seguenti:

1) se la forma fondamentale ammette gli stessi elementi tripli ed ha luogo la equazione identica:

$$T \equiv 0; \qquad (16)$$

2) ovvero se ha luogo l'identica equazione:

$$j \equiv 0. \qquad (17)$$

XII) L'essiano ammette tre elementi doppî in uno dei quattro casi seguenti:

1) Se la forma fondamentale ammette gli stessi elementi doppî, epperò si verificano le tre condizioni:

$$5^2 B - 2.3A^2 = 0, \qquad 5^3 C + 2.3A^3 = 0, \qquad 5^5 D + 2^3 A^5 = 0; \qquad (18)$$

2) se due di quegli elementi diventano doppî per la forma fondamentale e il rimanente doppio per la forma j, epperò verificansi le condizioni:

$$D_f = 0, \qquad F = 0, \qquad R_{jH} = 0; \qquad (19)$$

3) se uno di quegli elementi diviene doppio per la forma fondamentale e gli altri due doppî per la forma j, epperò verificansi le condizioni:

$$D_f = 0, \qquad R_{jH} = 0, \qquad M = 0; \qquad (20)$$

4) se tutti e tre gli elementi diventano doppî per la forma j epperò verificansi le condizioni:

$$3A^2 - K = 0, \qquad 3^2 A_{ll} - 2AK = 0, \qquad 3^3 D - 2^3 A^5 = 0. \qquad (21)$$

XIII) L'essiano ammette quattro elementi doppî, se di questi due diventano doppî per la forma fondamentale e i due altri per la forma j, epperò verificansi le condizioni:

$$D_f = 0, \qquad F = 0, \qquad R_{jH} = 0, \qquad M = 0, \qquad (22)$$

equivalenti alle tre:

$$2^2.5^2 K - 3^2 A^2 = 0, \quad 2^2.3^2.5A_{ll} - 13AK = 0, \quad 2^2.3^6.5D - 67AK^2 = 0. \qquad (23)$$

giusta le formule:

$$-2^2.3^4 D_f = 5^4 (2^2.3^6.5D - 67AK^2) + 3^2.5^3 (2^2.3^2.5A_{ll} - 13AK)(5K - 3A^2)$$
$$+ A(2^2.5^2 K - 3^2 A^2)(5^2.7.13K - 2^2.3^4.A^2), \quad (24)$$

$$2^5.3^2 F = 5^2 (2^2.3^2.5A_{ll} - 13AK)(2^2.3^2.5^3 A_{ll} + 5^2.89AK + 2^2.3^3 A^3)$$
$$- (2^2.5^2 K - 3^2 A^2)(5^5 K^2 - 2^3.3^2.5^2.7A^2 K - 2^4.3^4 A^4), \quad (25)$$

$$2^2.5^3 R_{jn} = -(2^2.3^2.5A_{ll} - 13AK)(2^4.3^4.5^2 A_{ll}^2 + 2^4.3^2.5.7AKA_{ll} + 439A^2K^2 + 3^3.5^2 K^3)$$
$$+ 3^2 K^2 \{ 5^2 (2^2.3^6.5D - 67AK^2) - 53AK(2^2.5^2 K - 3^2 A^2) \}, \quad (26)$$

$$2^2.5^4 M = (2^2.3^2.5A_{ll} - 13AK)(2^9.3^6.5^3 A_{ll}^3 + 2^6.3^5.5^2.37AKA_{ll}^2 + 2^5.3^3.5.13.31A^2K^2A_{ll}$$
$$+ 2^2.3^6.5^3 K^3 A_{ll} - 3^4.5^2.13.19AK^4 + 2^2.35809A^3K^3) +$$
$$+ 3^7 K^4 (2^2.5^2 K - 3^2 A^2)(5^2 K - 2^5.3A^2). \quad (27)$$

Sul muscolo ciliare dei rettili.

Memoria del dott. FERRUCCIO MERCANTI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 dicembre 1883.

(Con una tavola).

Soltanto nel 1846, per opera principalmente del Brücke e del Bowman, fu chiaramente dimostrata la natura muscolare del preteso *ligamento ciliare* degli antichi anatomici e si cominciò a ben precisarne l'azione fisiologica, risolvendo così una questione fino a quell'epoca dibattutissima ed in ordine alla quale erano regnate le più disparate opinioni. Gli studî di quei due osservatori si aggirarono principalmente sugli uccelli, nei quali il muscolo ciliare è fatto di fibre muscolari striate; solamente più tardi, dopochè il Köllicher nel 1847 ebbe scoperta la fibrocellula muscolare, si potè riconoscerlo anche nei mammiferi, nei quali risulta di tessuto muscolare liscio.

E quantunque dopo quell'epoca, di tempo in tempo, non siano mancate isolate osservazioni su questa o quella specie, siamo tuttavia ben lungi dal possedere una perfetta conoscenza del muscolo ciliare nelle varie classi dei vertebrati. — Lasciamo da parte i mammiferi nei quali è abbastanza noto e gli anfibî ed i pesci in cui manca o è rappresentato da fascetti di tessuto connettivo; quanto ai sauropsidi, nei quali è costituito di tessuto muscolare striato, grazie agli studî del Brücke (¹), del Bowman, di H. Müller (²), del Rouget (³), noi abbiamo delle nozioni abbastanza esatte sul muscolo ciliare degli uccelli; per quello invece dei rettili regna ancora la più grande incertezza fra i varî autori. Così il Gegenbaur (⁴) afferma che presso i rettili il muscolo ciliare sembra formato tutto al più di uno strato di fibre a direzione radiale, mentre, come vedremo in seguito, in molte specie si hanno condizioni ben differenti; ed il Leückart (⁵) confessa esplicitamente che le nostre cognizioni sull'apparecchio dell'adattamento nei rettili sono scarse ed incomplete. — Ciò si spiega col fatto che nei rettili il muscolo ciliare non è costruito secondo un identico tipo nei varî ordini, come avviene per gli uccelli, ma varia non solo da ordine ad ordine, ma anche nelle diverse specie di un ordine stesso.

(¹) *Ueber den Musculus Cramptonianus un den Spannmuskel der Choroidea* (Muller's Archiv. für Anat. 1846, p. 370).

(²) *Ueber den Accomodationsapparat im Auge der Vögel, besonders der Falken* (in Gesamm. Schrift. pag. 180).

(³) *Appareil de l'adaption de l'oeil chez les oiseaux, les principaux mammifères et l'homme* (Compt. Rend. de l'Acad. t. 42, p. 938).

(⁴) *Manuel d'Anat. comp.* Trad. par C. Vogt, pag. 722.

(⁵) *Organologie des Auges*; in Handb. der Gesam. Augenheilkunde von Gräfe und Sämisch. B. I, pag. 236.

Io mi proposi di studiare il muscolo ciliare in quelle poche specie di rettili che mi potei procurare e rendo qui brevemente conto di quanto ho osservato.

Le specie da me esaminate furono le seguenti:

Alligator mississipiensis Gray.
Chelonia caretta L.
Cistudo europaea Schneider
Testudo graeca L.
Lacerta viridis Daud.
Podarcis muralis Wagl.
Platydactylus mauritanicus Gmel.
Python Sebae Dum. Bibr.
» *molurus* Dum. Bibr.
Tropidonotus natrix Wagl.
Zamenis viridiflavus Lacèp.

Per lo studio del muscolo ciliare ho praticato dei tagli sottili nella calotta anteriore dell'occhio, alcuni in senso meridiano, altri in un piano tangenziale alla regione ciliare. Come metodo d'indurimento ho preferito l'alcool a 36°, coll'aggiunta di qualche goccia di acido nitrico per quegli occhi che, essendo provvisti di un anello sclerale osseo (Sauri, Cheloni), avevano bisogno di esser decalcificati; valendomi anche del liquido di Müller per gli occhi che troppo si indurivano, se messi addirittura nell'alcool (*Zamenis*). Prima di esser passati in alcool gli occhi della *Chelonia* furono a lungo conservati in acido picrico. — Come mezzi di colorazione ho adoperato il picrocarminio di Weigert o il carminio borico di Grenaher, secondo mi consigliava la pratica. Quando mi è occorso di dovere scolorare il denso pigmento della coroide, per potere osservare gli elementi muscolari *in situ*, ho fatto reagire sulla lastrina portaoggetti e a contatto del preparato, il clorato di potassa coll'acido cloridrico, ottenendo così svolgimento di gaz cloro che serve mirabilmente allo scopo cercato. — Talvolta ho fatto dei tagli a mano libera; più spesso, specialmente per quelli in direzione tangenziale, mi sono servito del microtomo a slitta di Thoma, incollando i tagli in serie sul portaoggetti, col metodo di Giesbrecht.

Avanti di passare alla descrizione particolareggiata di quanto ho osservato nelle diverse specie da me sottoposte ad esame, ricorderò per ulteriori confronti e considerazioni, come negli uccelli il muscolo ciliare è costituito di tre distinte porzioni; anteriormente il muscolo di Crampton, posteriormente quello di Brücke: fra questi due quello di Müller. Hanno tutti direzione radiale; le fibre del secondo e dell' ultimo vanno dall'indietro all'avanti, dall'interno all'esterno, inserendosi da una parte alla sclerotica, dall'altra alla coroide; quelle del primo si dirigono dall' esterno all' interno e sono impiantate in mezzo al connettivo al di sopra del ligamento pettinato.

Fra i rettili quelli che per la struttura del muscolo ciliare più si avvicinano agli uccelli sembra che siano i coccodrillini, almeno nella specie da me esaminata. L'*Alligator mississipiensis*, di cui potei avere un giovane individuo morto in un serraglio a Bologna, ha un muscolo ciliare diviso in tre porzioni distinte (fig. 3). L'anteriore e la posteriore risultano di fibre con direzione radiale, la terza è circolare. Il muscolo posteriore è più grosso dell'anteriore ed è diretto dall'indietro in avanti, dall'interno all'esterno, inserendosi da una parte alla sclerotica, al di sotto dell'anello cartilagineo, dall'altra alla coroide: si può perciò riportare esattamente al muscolo di Brücke negli uccelli, mentre l'anteriore e per la direzione e per essere interamente compreso nel connettivo sottosclerale potrebbe esser paragonato a quello di Crampton. Nello spazio compreso fra questi due muscoli longitudinali, si trova un

muscolo circolare, le cui fibre appaiono tagliate per trasverso nelle sezioni radiali. Le sezioni tangenziali confermano l'osservazione (fig. 8) mostrando ancora come le fibre del muscolo anteriore (ib. *Ma*) non hanno un decorso esattamente parallelo, ma obliquando si incontrano sotto angoli molto acuti e formano un intreccio. — Questo muscolo circolare, quantunque occupi pressochè la posizione del muscolo di Müller degli uccelli, non può esser paragonato a questo perchè ne differisce essenzialmente per la direzione delle fibre: per questa poi corrisponde al muscolo di Müller dell'uomo e degli altri mammiferi, da cui si differenzia per la natura istologica delle fibre che lo compongono.

Quantunque C. K. Hoffmann (¹) abbia recisamente affermato che nelle tartarughe il muscolo ciliare è fatto esclusivamente di fibre longitudinali e che non vi è traccia di fasci anulari, pure in due delle specie di testuggini da me esaminate ho riscontrato un muscolo circolare che, almeno in una, appartiene indubitatamente al sistema del muscolo ciliare.

Nella *Chelonia caretta*, esaminando dei tagli fatti in senso radiale (fig. 2), si scorge una grande quantità di fibre longitudinali, distribuite senza ordine apparente in mezzo al tessuto connettivo interposto fra l'anello osseo della sclerotica e la coroide. Queste fibre sono assai più numerose nella parte posteriore che non nella anteriore, dove si limitano in due strati, più interno l'uno, più esterno l'altro separati da tessuto connettivo con cellule pigmentate. Lo strato più interno appare in comunicazione coi muscoli dell'iride, senza che però si possa scorgere una connessione diretta fra le fibre dei due muscoli. Presso al limite anteriore dello strato esterno si nota un insieme di fascetti muscolari tagliati per transverso e limitati da una spessa fascia di pigmento (id. *Mc*). Che questo muscolo circolare appartenga realmente al sistema del muscolo ciliare e non sia da riportarsi alla musculatura dell'iride, ce lo prova la sua posizione avvicinatissima a quella della sclerotica, e perciò in un piano più esterno che non sia quello dell'iride; ed ancor meglio ce lo mostra una serie di tagli tangenziali. Nei più profondi che interessano cioè l'iride e gli strati più interni della coroide si notano delle fibre a decorso longitudinale, un po' incurvate nella loro parte anteriore, in modo da raggiungere altri fasci con direzione circolare (fig. 5, *Fc*) e perciò perpendicolari ai primi, situati però in un piano un po' più esterno. Questi ultimi fasci appartengono alla musculatura dell'iride, di cui formano lo sfintere esterno, essendo ancora in continuità colle sue fibre radiali. — In altri tagli condotti secondo un piano più vicino alla sclerotica, in corrispondenza della zona esterna delle fibre radiali del muscolo ciliare, si notano anteriormente dei fasci a direzione circolare, più indietro delle fibre incrociantesi sotto varie incidenze nelle varie direzioni: i primi appartengono al muscolo circolare (fig. 6, *Mc*), le seconde alla zona esterna di quello longitudinale.

Il muscolo circolare della *Chelonia* corrisponde a quello dell'*Alligator*; quanto al longitudinale per la sua posizione rispetto al primo e per la direzione de' suoi elementi lo possiamo riferire al posteriore dell'*Alligator*, a quello cioè corrispondente al muscolo di Brücke degli uccelli: è però più esteso in larghezza e lunghezza; le sue

(¹) *In Bronn's Klassen und Ordnungen des Thierreichs.* Bd. V, pag. 166.

fibre anzichè essere riunite in un unico fascio sono sparse senza ordine nel connettivo che unisce la sclera con la coroide: il continuarsi ch'esso fa con lo strato interno delle fibre dell'iride rende la differenza ancor più spiccata. Il muscolo di Crampton fa assolutamente difetto nella *Chelonia* [1].

La *Cistudo europaea* (fig. 1) presenta delle fibre longitudinali che si possono paragonare a quelle della *Chelonia*, ma che sono però raccolte in una massa unica, in modo da formare un muscolo più potente che non sia quello della testuggine di mare. In avanti, subito al di sopra della coroide, ci sono delle fibre circolari in continuazione di quelle dell'iride, colle quali sembrano strettamente connesse. Si può far questione se queste fibre appartengano realmente all'iride o se formano invece un muscolo ciliare circolare. La cosa non è facile a risolvere e nemmeno l'esame dei tagli tangenziali ci fornisce un criterio preciso. Giudicando per analogia colla specie precedentemente descritta sarei inclinato a ritenere queste fibre circolari come facenti parte del sistema del muscolo ciliare. E forse questa condizione anatomica verrebbe in appoggio dell'asserzione del Rouget il quale, ammettendo negli uccelli l'esistenza di fibre circolari nel muscolo ciliare dichiara poi che « l'apparecchio muscolare dell'iride non è che lo strato profondo (a fibre circolari) del muscolo ciliare ».

Nella *Testudo graeca* non ho rinvenuto traccia di muscolo circolare; esistono bensì delle fibre radiali, situate in mezzo a connettivo lasso, formanti un muscolo che corrisponde esattamente a quello longitudinale della *Chelonia* e della *Cistudo*, ma che è meno sviluppato.

Una condizione tutto affatto particolare l'ho ritrovata nei Sauri. Il Müller [2] ravvisò nella *Lacerta agilis*, in un taglio fatto in corrispondenza del nervo ciliare, un muscolo ciliare distinto in tre porzioni corrispondenti a quelle degli uccelli. Nelle tre specie di Sauri da me esaminate (*Lacerta viridis*, *Podarcis muralis*, *Platydactylus mauritanicus*) ho invece trovato un sol muscolo longitudinale, che però differisce per l'inserzione da quanto si è trovato fin qui e nei rettili e negli uccelli. Esso decorre fra la coroide e la sclerotica o piuttosto negli strati superficiali della coroide (fig. 4): i suoi due capi si trovano inseriti nella coroide stessa; e siccome questa è unita alla sclera presso al margine corneale, mediante una fascia di connettivo, così il punto fisso del muscolo trovasi in avanti. I preparati tangenziali confermano il reperto delle sezioni longitudinali.

Questa disposizione sembrerebbe a prima vista isolata e non confrontabile in alcun modo con quanto si è osservato delle altre specie di rettili e negli uccelli; ma gli studî di H. Müller sul muscolo ciliare del camaleonte [3] ci mettono in grado di spiegarcela perfettamente. In questo animale il muscolo ciliare è diretto dall'avanti all'indietro, dall'interno all'esterno, come il muscolo cramptoniano degli uccelli; si inserisce da un lato alla coroide, dall'altro al connettivo sottosclerale, che è connesso

[1] Nei tagli tangenziali sì profondi che superficiali si può scorgere una particolarità istologica da non passarsi sotto silenzio. Le fibre muscolari striate terminano dividendosi in più rami; disposizione che è stata già osservata in altri organi di altri animali, per es. nella lingua dei mammiferi, fig. 7.

[2] *Ueber das Auge des Chamäleon mit vergleichenden Bemerkungen* (in Gesamm. Schrift. pag. 148).

[3] Loc. cit.

nesso colla coroide in modo da potersi riguardare come la lamella esterna di questa. Il muscolo ciliare del camaleonte ci rappresenta perciò una condizione intermedia fra il muscolo cramptoniano degli uccelli e quello longitudinale della *Lacerta viridis*. Se invece si voglia seguire l'opinione di H. Müller che riguarda il muscolo del camaleonte come equivalente al complesso dei tre muscoli degli uccelli, bisognerà ammettere una tale equivalenza anche pel muscolo ciliare dei Sauri da me studiati.

In due delle quattro specie di ofidi da me esaminate ho ritrovato il muscolo ciliare; nelle altre due non ho visto traccia di fibre muscolari striate. Dico pensatamente di fibre muscolari striate, poichè potrebbe darsi, quantunque non mi sembri molto probabile, che vi fosse un muscolo ciliare costituito bensì di fibrocellule muscolari, le quali difficilmente si potrebbero distinguere in mezzo alle fibre di tessuto connettivo e alle cellule di pigmento.

I serpenti in cui non ho trovato il muscolo ciliare sono due specie del genere *Python*, il *P. Saebe* ed il *P. molurus*. Per questo ultimo debbo però aggiungere che il cattivo stato di conservazione in cui si trovava l'animale rendeva ancor più difficili ed incerte le mie ricerche.

Nel *Tropidonotus natrix* invece è evidente un muscolo ciliare circolare; esso è situato in quel rilievo della coroide che costituisce il processo ciliare e corrisponde per la direzione e per la posizione al muscolo di Müller dei mammiferi: in sezione apparisce rotondo e costituito di un buon numero di fascetti. Per quanta diligenza io ci abbia riposta non mi è riuscito di scorgere fibre muscolari longitudinali.

Anche nello *Zamenis viridiflavus* si ha soltanto un muscolo circolare: ha la stessa posizione che nel *Tropidonotus*, con la sola differenza che mentre in questo è situato nella parte posteriore del processo ciliare, in quello è un po' più anteriore.

Dall'esame di così poche specie, sopra tutto considerando la grande diversità colla quale in esse ci si offre il muscolo ciiiare, non mi è lecito trarre delle conclusioni assolute. Si può bensì dedurre in linea, per dir così, provvisoria:

Nell'*Alligator* sono presenti tre muscoli: due di essi si possono riportare ai muscoli di Crampton e Brücke degli uccelli; il terzo è analogo a quello di Müller nei mammiferi.

Nei Cheloni abbiamo costantemente un muscolo longitudinale, paragonabile a quello di Brücke, le cui fibre però hanno un decorso diverso, formando un intreccio irregolare: in qualche caso si ha anche un muscolo circolare da riferirsi a quello dell'*Alligator*.

Nei Sauri vi è un muscolo affatto speciale per la sua inserzione ma che si può riferire per certe forme di passaggio a quello di Crampton, o considerare come l'insieme dei tre muscoli degli uccelli. Negli ofidi o è presente soltanto un muscolo circolare, confrontabile con quello dell'*Alligator*, o manca affatto.

Tuttociò, ripeto, in modo provvisorio e riferibile soltanto alle specie da me esaminate. In modo più generale e più sicuro, nei rettili abbiamo una forma di muscolo ciliare più indifferente e molto meno precisa che negli uccelli. Questi, come diramazione del tronco dei sauropsidi hanno perfezionato, differenziandosi, l'apparecchio dell'accomodazione, assumendo un tipo costante. Hanno però creditato dal comune tronco la natura istologica del muscolo ciliare, composto di fibre striate.

Questa condizione mostra sempre più la stretta affinità che unisce gli uccelli ai rettili, e giustifica una volta di più l'idea dell'Huxley di riunire queste due classi di vertebrati in un unico gruppo.

Terminando sento il dovere di rendere le più sentite grazie al ch. prof. C. Emery, che mi è stato guida benevola ed illuminata in questo mio tenue lavoro.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Segni a comune a tutte le figure: *Cn*, cornea; *Scl*, sclerotica; *Cd*, coroide; *I*, iride.

Fig. 1. Sezione radiale della regione ciliare dell'occhio della *Cistudo europaea*. Ingr. 70.

» 2. id. della *Chelonia caretta*. *Mc*, muscolo circolare. Ingr. 26.

» 3. id. dell'*Alligator mississipiensis*. *Mp*, muscolo longitudinale posteriore; *Mc*, muscolo circolare; *Ma*, muscolo longitudinale anteriore. Ingr. 45.

» 4. id. della *Podarcis muralis*. *Ml*, muscolo longitudinale. Ingr. 100.

» 5. id. tangenziale della regione ciliare dell'occhio della *Chelonia caretta*, in un piano profondo, in corrispondenza dell'iride. *Fc*, fibre circolari; *Fr*, fibre radiali. Ingr. 70.

» 6. id. in un piano più esterno. *Mc*, muscolo ciliare. Ingr. 26.

» 7. Fibre muscolari coll'estremità divisa, della *Chelonia caretta*. Ingr. 570.

» 8. Sezione tangenziale della regione ciliare dell'occhio dell'*Alligator mississipiensis*. *Mc*, muscolo circolare; *Ma*, muscolo longitudinale anteriore. Ingr. 45.

Il diametro di Urano.

Nota del prof. E. MILLOSEVICH

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 dicembre 1883.

È noto che nel marzo del 1781 W. Herschel assicuravasi per la prima volta che Urano era astro mobile e di disco sensibile: le osservazioni anteriori al 1781 vennero fatte da più d'un astronomo senza alcun sospetto che la stella osservata fosse un pianeta.

Pochi astronomi misurarono il diametro di Urano durante il secolo, che è di già trascorso dal 1781, e però non sono numerose le misure che possediamo: ciò devesi attribuire alla impossibilità con piccoli cannocchiali di bene misurare tale costante, ed alla difficoltà che incontrasi, anche possedendo strumenti, che possano sopportare ingrandimenti ragguardevoli.

Si insinuano in misure di questo genere errori sistematici e di carattere subbiettivo, i quali sono variabili mutando le condizioni dell'osservazione, fra le quali hanno importanza capitale lo stato dell'aria, l'ingrandimento ed anche il sistema di illuminazione.

L'uso de' diversi micrometri è un altro elemento, che concorre a rendere diversi i risultati, giacchè ad es. non sono dello stesso ordine le osservazioni che possono farsi col micrometro filare e con quello a sdoppiamento di immagini.

L'intensità luminosa per i pianeti *interiori* e la fase difficultano le misure; la piccola ampiezza angolare per Urano e Nettuno fa sì che un tenue errore venga ad essere parte notevole del tutto, e questo errore poi viene moltiplicato per un grosso coefficiente nella riduzione all'unità di distanza.

Aggiungasi poi (vedi A. Safarik, A. N. 2505) che Urano potrebbe essere schiacciato ai poli e rigonfio all'equatore ed apparire ora circolare, ora ellittico. Ed in vero, supposto l'asse trasportantesi lungo l'orbita di Urano parallelo a sè stesso ed adagiato all'incirca sul piano dell'eclittica, quando noi ci troviamo nel prolungamento di quello dovremmo vedere Urano circolare, a quella guisa che un occhio collocato lungo l'asse terrestre vedrebbe la terra circolare; ed all'incontro se l'asse di rotazione di Urano ci si colloca di fronte dovremmo veder il pianeta ellittico, come succederebbe ad un osservatore che guardasse la terra collocandosi nel piano dell'equatore.

Se l'equatore uranico coincide col piano medio dei satelliti, l'asse di rotazione deve appunto coincidere all'incirca coll'eclittica.

Quando la terra quindi si trovi vicina ai nodi delle orbite dei satelliti dovremmo (nella fatta ipotesi) essere nella condizione della misura assoluta dello schiacciamento

$(a-b)$. Ciò avviene appunto in questi anni, e però dovrebbesi avere per risultato della figura del pianeta quanto segue:

$1881 \pm m$ (essendo m due o tre anni)	: ellittico
$1860 \pm m$	: circolare
$1839 \pm m$	: ellittico
$1818 \pm m$	: circolare
$1797 \pm m$	: ellittico
$1776 \pm m$	: circolare

Tutto ciò che dissi finora serve a spiegare i diversi valori ottenuti nelle misure in discorso, e giustifica la incertezza relativa in cui ci troviamo sul valore assoluto del diametro di Urano e sulla esistenza o no d'uno schiacciamento *misurabile.*

Così ad es. Mädler con serie, che sono nelle medie ben concordanti, assegna, come vedremo, i valori degli assi nelle misure del diametro di Urano, e l'orientamento di questi rispetto al circolo orario, mentre le osservazioni posteriori esclusero que'valori o almeno li resero problematici e lasciarono concepire la difficoltà di assegnare uno schiacciamento qualunque ad Urano.

Ignari, come siamo, della posizione dell'equatore di Urano, mancandoci ogni indizio ottico per assegnare la rotazione del pianeta, resta agli astronomi lo spediente di misurare metodicamente i singoli diametri di Urano a partire per es. dal punto nord di 15° in 15° fino a ritornare sul diametro coincidente col circolo orario: tali misure, se compiute durante la stessa opposizione, possono ritenersi come simultanee; in tal caso si può facilmente calcolare il valore degli assi e il loro orientamento rispetto al circolo orario.

Si può ancora fare l'ipotesi che l'equatore di Urano coincida col piano medio dei satelliti e controllare l'ipotesi coll'osservazione.

La misura dei diametri in questione non ha bisogno di alcuna speciale correzione astronomica, quando sia eseguita a dovere quella, già poco influente, dipendente dalla temperatura (per il valore del passo della vite del micrometro) e dallo spessore del filo, se si usa il micrometro filare. Nessuna correzione sensibile spetta per fase. Una correzione per la rifrazione, che trasforma in curva ovale prossima all'ellisse la curva circolare del pianeta è dell'ordine delle trascurabili. Ed in vero per un'altezza di 10° tale correzione nel suo valore massimo (diametro verticale) è 0",03 e per un'altezza di 30° è 0",004.

Detto poi Δ il diametro misurato ed R la distanza di Urano dalla terra, il valore Δ_1 all'unità di distanza è:

$$\Delta_1 = \Delta . R \quad \text{e quindi} \quad d\Delta_1 = d\Delta . R + dR . \Delta ,$$

cioè un errore $d\Delta$ nella misura diventa $19 d\Delta$ all'unità di distanza; è poi generalmente trascurabile invece un errore $dR . \Delta$, e d'altronde facilmente correggibile.

Misurarono o stimarono il diametro di Urano: W. Herschel; Maskelyne; Lexell; Arago; Lamont; Bruhns; Engelmann; Encke; Galle; Mädler; Main; Zöllner; Lassel; Marth; Vogel; Kaiser; Doberck; Safarik; Schiaparelli; W. Meyer; Washington (str. merid.); Greenwich (str. merid.).

Nei volumi di Washington non ho trovato (almeno in quelli che ho consultato)

misure del diametro di Urano che sieno state fatte col 26 pollici, ma soltanto valori avuti agli strumenti meridiani e perciò di pochissima importanza. Nella serie precedente d' osservatori non figurano due stime citate da Lexell e fatte a Milano e da Mayer. Sono pure semplici stime quelle del prof. Safarik e di sopra ricordate. Per le osservazioni meridiane di Greenwich vale ciò che si disse per quelle di Washington.

W. Herschel

(Ph. transactions of R. S. of London vol. LXXIII (1783) part I pag. 4).

La nota di W. Herschel, letta il 7 nov. 1782, ha per titolo: *On the diameter and magnitude of the Georgium sidus, with a description of the dark and lucid Disk and Periphery micrometers.* Herschel dà una serie di misure del diametro coll'aggiunta di particolari sull' apparecchio micrometrico adoperato.

Misure di W. Herschel

1781	No. 28 (sic)	5″, 06‴
	No. 19 (sic)	5, 11
1782	Sett. 9	4, 11
	Ott. 2	3, 63
	Ott. 4	3, 67
	Ott. 12	4, 24
	Ott. 19	3, 77
	Ott. 26	3, 51
	Nov. 4	4, 53—4, 06

Nel vol. LXXVIII (1788) vi è un'altra Nota di W. Herschel, letta il 22 maggio 1788, che ha per titolo: *On the Georgian Planet and its Satellites.* A pag. 378 (senza dare altre misure) conchiude che il diametro di Urano alla media distanza dalla terra è 3″,90554.

Herschel usa per media distanza di Urano dal sole 19,0818 (Laplace, C. d. T. 1786).

Per la riduzione all' unità (distanza media della terra dal sole) uso una volta per sempre gli elementi di Leverrier:

$$2à = 38,36678.$$

Risulta allora:

Semidiametro di Urano secondo W. Herschel (1781-82) = 37″,46: fig.ª *circolare* (α).

È questa costante che, leggermente modificata, per i diversi valori di $2a$, servì di base al N. A. fino al 1881 (Delambre's, *Astr.* vol. II pag. 620) ed alle C. d. T. anche presentemente (Ann. di Schumacher 1837).

Ulteriori osservazioni di W. Herschel (26 febb. 1794 - 21 aprile 1795) accennano ad un allungamento nella direzione dell' asse maggiore delle orbite dei satelliti, lo stesso ricavasi dall' osservazione in data 5 marzo 1792, mentre quelle fatte nei primi anni dalla scoperta e prima citate conchiudono per la figura circolare. Dall'insieme quindi dei lavori dell' astronomo di Slough conchiudesi:

Semidiametro Urano (1781-82) 37″,46: fig.ª circolare. (α)
Disco Urano (1792-95): aspetto ellittico.

LEXELL

(Nova acta Ac. Scient. imp. Petr. Tomus I. Petropoli 1787).

In una Nota intitolata: *Recherches sur la nouvelle planète découverte par M. Herschel et nommée par lui* Georgium sidus, letta l' $\frac{11}{22}$ marzo 1783, dopo aver fatta la storia della scoperta ed aver accennate alle varie orbite circolari da lui calcolate, dice che invano gli astronomi, fatta eccezione di Herschel, hanno mezzi per tentare misure del diametro di Georgium sidus, ricorda le notevoli differenze che Herschel stesso ottenne, cita i valori (3″) di Maskelyne, di 6″ a 7″ di Milano, di 10″ di Mayer e da ultimo dà una stima da lui fatta paragonando Marte apogeo, che allora venne vicino ad Urano, e conchiude che Urano era minore di Marte, ma Marte allora era $< 5''$, dunque a più forte ragione Urano era $< 5''$: egli lo ritiene vicino a 3″ e si arresta a 3″ per valore del diametro semplicemente *stimato.*

MASKELYNE

Maskelyne nelle A. O. made at the R. O. at Greenwich 4 vol. fol. London; vol. II p. II, 1782, citato da Grant, *History of physical astronomy*, Londres 1852, pag. 275, si arresta colle sue misure di Urano al numero 3″, alla media distanza d'Urano dal sole.

Se non che dalle Ph. trans. 1784 Wurm (B. A. J. 2 Suppl-Band, 1795, pag. 13) trae l'osservazione di Maskelyne del 10 marzo 1783 = 4″,255 alla media distanza di Urano dal sole (elementi di Delambre).

Questo risultato di Maskelyne è in disaccordo col valore medio di 3″, al quale ha creduto di arrestarsi dopo una serie di misure nel 1782.

Assumendo un medio fra i due valori (locchè è abbastanza arbitrario per diversità di pesi) abbiamo (ridotto all'unità):

Semidiametro Urano (1782-83) 34″,80 (β)
Disco Urano . . . . . figura ??

ARAGO

(Oeuvres de F. Arago, tome XI, pag. 427)

1814 maggio 20 (cannocchiale prismatico di Rochon): diametro 4″,81
giugno 14 $11^h 15^m$. Medio generale di 9 misure . . . 4, 38
luglio 14 (prismi birefrangenti) $< 5'',14$
» » $> 2, 50$
» » $< 4, 96$

I numeri appena scritti dati da Arago hanno in realtà ben poco valore, e indicano piuttosto dei limiti che delle quantità assolute. Egli dichiara difficili le osservazioni del 14 giugno, che sono relativamente le più complete.

Nella importante Memoria di Houzeau (*Répertoire des constantes de l'Astronomie*, An. Obs. Bruxelles, N. série tome I, 1878, pag. 162) le osservazioni di Arago sono ridotte, prendendone un medio, alla distanza media di Urano dal sole e il valore ricavato è 4″,284

Riducendo all' unità colle costanti adottate si ha:

Semidiametro Urano (1814) 41″,09 (γ)
Figura disco circolare . . ?

ENCKE E GALLE

(Vol. I, 1840. Astr. Beob. Berlin, pag. 146)

1836 Nov. 6	23^h48^m (t. s. l.) Urano	4″,94	Confr. 4	Ang.	90°	E
		4, 43	» 2	»	90	G
		5, 20	» 4	»	180	E
		5, 77	» 2	»	180	G
Nov. 16	21 50 (id.)	5, 17	» 4	»	90	E
		4, 68	» 4	»	180	E
		5, 18	» 4	»	180	G

Le poche osservazioni nulla rivelano in quanto a valori diversi per i due diametri normali, e però nella riduzione presi il medio, ammettendo a tutte le osservazioni peso eguale.

1836 Nov. 6 5″,08
» 16 5, 01

Queste osservazioni di Encke e di Galle danno valori troppo forti almeno d'un quinto.

Riducendo all' unità si ha:

Semidiametro Urano (1836) 50″ ± (δ)
Figura circolare . . (?)

MÄDLER

J. H. Mädler, il celebre osservatore di Dorpat, si occupò a più riprese delle misure del diametro di Urano, ed è il solo astronomo fino a questi ultimi tempi che abbia creduto di poter assegnare ad Urano uno schiacciamento.

Le prime misure di Mädler risalgono al 1842. Vedi A. N. n. 460 ed anche Dorpat, vol. X, 1843. 61; nonchè Gruithuisen A. J. etc. 1846. 139.

Mädler misurò in 5 sere dal 16-21 sett. 1842 il diametro di Urano. Le misure vennero eseguite di 15° in 15° rispetto al circolo di declinazione e i diametri misurati sono 24 per quattro sere. Ogni valore componevasi di sole tre misure.

Dall' insieme dei risultati Mädler dedusse che il disco di Urano presentasi sotto forma ellittica, e che l' asse maggiore è orientato per N 160° 49′ W.

Diametro equatoriale alla distanza media di Urano dal sole 4″,249

$$\frac{a-b}{a}=\frac{1}{10.85}.$$

Nelle A. N. n. 493, nonchè nel vol. XI di Dorpat 1845. 67 e nel sopra citato periodico di Gruithuisen 1846. 139 trovasi la seconda serie delle osservazioni di Mädler durante 7 giorni dal 24 ag. al 20 ott. 1843.

Il Clausen ottenne da esse

$$2a = 4'',3274 \pm 0'',0063$$
$$2b = 3,\ 8910 \pm 0,\ 0065$$
$$\frac{a-b}{a}=\frac{1}{9,92}.$$

Angolo dell'asse maggiore col circolo di declinazione 15° 26′ ± 40′,8.

Da ultimo nel vol. XIII Dorpat 1856. 90 trovansi le misure eseguite nel 1845 sett. 21, 22, 25, 29, 30; nov. 7; nov. 11, 1846.

$$2a = 4'',452$$
$$2b = 3,\ 981$$
$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{9,45}.$$

Porzione del semiasse maggiore 358°58′,5.

Riassumendo quindi i valori trovati da Mädler si ha:

Epoca			Orientamento
16-21 sett. 1842	$2a$ 4″,279	$2b$ 3″,856	N 160° 49′ W
24 ag. 20 ott. 1843	$2a$ 4, 327	$2b$ 3, 891	164 34
21 sett. 1845-11 nov. 1846	$2a$ 4, 452	$2b$ 3, 981	178 58

Potrebbonsi calcolare gli angoli dal punto N del circolo di latitudine supponendo che il semiasse maggiore coincidesse con quello e la nota relazione

$$\cos\omega = \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\beta + \cos\delta\cos\beta\cos X$$

presterebbesi all'uopo.

Prendendo gli elementi di Urano por le epoche intermedie:

19 sett. 1842	$\delta - 2°\ 4'$	$\beta - 0°48'$	$\omega\ 23°\ 28'$
16 sett. 1843	$\delta - 0\ 25$	$\beta - 0\ 47$	
18 apr. 1846	$\delta + 3\ 48$	$\beta - 0\ 40$	

il calcolo conduce a tre valori di X poco differenti da 23° come era da prevedere. Poca o nessuna luce ottiensi quindi da tale sostituzione.

Non vi è dubbio che le misure di Mädler del diametro di Urano sono fra le più numerose che possediamo, ma un attento esame dei singoli valori ottenuti per cadaun angolo mostra che le differenze sono spesso maggiori della quantità che cercava l'illustre astronomo: e ciò è affatto naturale attesa la difficoltà di ben misurare un oggetto simile.

Solo la media compensò tali differenze e diede risultati alquanto soddisfacenti in quanto alla determinazione dello schiacciamento.

Chi volesse ritener nullo lo schiacciamento ed assumere un medio generale di tutte le misure di Mädler avrebbe per diametro 4″,027 e alla distanza *uno* 38″,62 (1842. 46).

Calcolando invece separatamente i medî dei due semiassi avrebbesi:

$$a = 2'',1714 \qquad 2a = 4'',3428$$
$$b = 1'',9545 \qquad 2b = 3'',\ 9090$$
$$a - b = 0'',2169 \quad \text{schiacciamento} \left(\frac{a-b}{a}\right) = \frac{1}{10} \text{ circa.}$$

Orientamento dell'asse maggiore N 168° W, ovvero all'incirca 11° di deviazione dal circolo di latitudine.

L'asse minore quindi di poco devierebbe dal piano dell'eclittica e il maggiore dal piano delle orbite dei satelliti. Per ciò che dissi in principio le osservazioni intorno al 1839 ± m avrebbero dovuto dare gli elementi dell'ellisse uranica: ciò che peraltro appare contraddittorio è il fatto che lo schiacciamento avuto da Mädler nel 1842 è $<$ di quello avuto nel 45.46, mentre doveva avvenire il contrario.

Se l'ipotesi supposta in principio che l'ellissoide uranico si muova coll' asse minore parallelo a sè stesso e coricato sull'eclittica è la vera, o che in altre parole l'asse maggiore coincida all'incirca col piano delle orbite delle lune uraniche, e che quindi solo in longitudine eliocentrica $\left\{\begin{matrix}165^\circ \pm \\ 345 \pm\end{matrix}\right\}$ si possa vedere di fronte un meridiano, non è difficile certamente calcolare in funzione del tempo o della longitudine eliocentrica le variazioni apparenti, cui va soggetto l'asse minore, passando da $2b$ fino a $2a$.

I singoli valori di ρ fra b ed a si possono esprimere colla relazione:

$$\rho^2 = \frac{a^4 \cos^2 \omega + b^4 \operatorname{sen}^2 \omega}{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \operatorname{sen}^2 \omega}$$

nella quale ponendo $\omega = l - 75^\circ$ (essendo l la longitudine eliocentrica) si ha dalla discussione: per $l = 75^\circ$ (165°—90°)

$$\rho = a$$

per $l = 165^\circ$

$$\rho = b \qquad \text{ecc. ecc. ; cioè}$$

$$a > \rho > b$$

Riducendo a e b (secondo Mädler) all'unità si ha:

$$\left.\begin{matrix}\text{Semiasse maggiore } 41'',65 \\ \text{Semiasse minore . } 37'',49\end{matrix}\right\} 1842.46 \qquad (\varepsilon)$$

Figura ellittica, schiacciamento $\frac{1}{10}$.

Le osservazioni posteriori tolgono una parte di valore a questi risultati almeno quantitativi di Mädler; ed invero supponiamo che lo schiacciamento sia reale: in ogni modo i valori dei semiassi devono essere ambedue troppo forti, giacchè concordi osservazioni posteriori conducono per raggio all'unità al valore prossimo di 35″. Non è poi male notare che se le cose passano come supponiamo rispetto alla posizione dell'asse uranico, quando, per es. intorno al 1860 appariva il disco circolare dovevasi vedere l'equatore uranico come periferia del disco visivo, cioè ottenere appunto l'asse maggiore dell'ellisse. Arago poi a pag. 493 del tomo IV dell'*Astronomia popolare*, dopo citati i risultati di Mädler, soggiunge: « mais d'autres astronomes sont en disaccord, « sous ce rapport, avec le savant observateur de Dorpat. M. Otto Struve, par exem- « ple, dit avoir trouvé le disque d'Uranus parfaitement circulaire avec la puissante « lunette de Poulkova ». Sarebbe interessante di conoscere l'anno nel quale Otto Struve fece questa osservazione, ma non mi riuscì di assegnarlo.

È tempo ora di passare in esame le altre misure, che possediamo.

Zöllner

(*Photometrische Untersuchungen etc.* Leipzig 1865, pag. 193).

Premesse alcune misure di Urano di Mädler, già da me citate ed altre di Lassel, che esaminerò dopo, dà i seguenti valori ottenuti col 12 pollici di Lipsia.

Osservatore	Data			Diametro	Confronti	Ingr.	Angolo
Engelmann	1864	nov.	29	(3″,52)	16	288,576	0° 90°
»	»	»	30	(3, 38)	8	»	0
Zöllner	»	»	30	(3, 70)	8	»	0
Engelmann	»	dic.	12	(3, 48)	24	»	0 45 90
»	»	»	29	(3, 51)	24	»	» » »
Bruhns	»	»	29	(3, 65)	24	»	» » »
Engelmann	1865	gen.	7	4, 14	12	288	» » »
»	»	»	8	4, 00	16	288,576	» » »
»	»	»	9	4, 05	12	288	» » »
»	»	»	19	3, 90	24	288,432	» » »
»	»	mag.	6	3, 69	24	288,450	» » »

Poi è soggiunto: che i valori dei diametri fra parentesi si ottennero per istima e che gli ultimi si ebbero da dirette misure; indi Zöllner cita le seguenti parole di Engelmann, che escludono uno schiacciamento sensibile.

« Die Columne (p) bezieht sich auf die Einstellungen des Positionswinkel; sowohl « bei Uranus habe ich keine wesentlichen Unterschiede zwischen den 3 Richtungen « 0°,45° und 90° auffinden können ».

Prendendo i valori risultanti da *dirette* misure si ha:

7, 8, 9 genn. 1865	4″,063;	e all'unità per semidiametro	36″,73
19 » »	3,90	» »	35, 43
6 marzo »	3,69	» »	34, 68

e volendo prendere semplicemente il medio si ottiene:

Semidiametro Urano secondo Engelmann 35″,61 (1865) (ζ)
Figura disco: circolare.

Lassel e Marth

Nelle Memoirs of the R. A. S. vol. XXXVI pag. 37, abbiamo le osservazioni di Lassel e Marth del diametro di Urano fatte a Malta nei g. 1864 dic. 17; 1865 marzo 6, 18, 20 e 21.

	Lassel	(Rid. a [1,26])	Marth	(Rid. a [1,26])
1864 dic. 17	3″,868	3″830 (6)	3″,780	3″,743 (6)
1865 marzo 6			3, 578	3, 697 (8)
6			3, 612	3, 733 (8)
18			3, 524	3, 681 (6)
20	3, 649	3, 818 (10)		
21	3, 660	3, 834 (10)		

Nel Vierteljahrsschrift der A. G. III (Jahrgang 1868 p. 258) l'illustre Winnecke ridusse le precedenti osservazioni nel seguente modo:

Lassel 3″,827
Marth 3 ,712 e alla media distanza 3″,568.

Nel medio Winnecke tenne conto delle notti di osservazione.

La riduzione all'unità dà:

Semidiametro Urano (secondo Lassel e Marth) 34″,15 (1864.65) (η)
Figura disco: circolare ?

VOGEL

Nelle A. N. 1750 Bruhns comunica le misure fatte da Vogel come segue:

1869 gen.	12	3″,93	Ingr.	460
	13	3, 80	»	460
	13	3, 91	»	192
	13	3, 97	»	192
	14	3, 98	»	283
	14	3, 87	»	460

Medio: 3″,910 il 13 gennaio 1869.

Riducendo all'unità si ha:

Semidiametro di Urano (secondo Vogel) 34″,75 (1869) (ϑ)

Figura disco: circolare ?

Nel volume 1 osservazioni di Bothkamp 1872.99 Vogel riproduce le osservazioni di Urano, di cui è cenno di sopra (A. N. 1750).

KAISER

Negli Annali der Sternwarte in Leiden, vol. III, pag. 269, Kaiser diede alcune misure del diametro di Urano fatte il 10 dic. 1862 11^h; il 15 gennaio 1866 11^h e il 26 febbr. $9^h\ ^1/_2$.

Le misure vennero eseguite col micrometro a sdoppiamento di immagini di Airy e con un cannocchiale di 7 pollici di apertura.

Le misure ottenute da Kaiser nel senso del moto diurno, nel diametro coincidente col circolo orario, nel diametro parallelo all'orizzonte e verticale, cioè per diversi diametri del pianeta, gli diedero per risultato un disco circolare.

È bene notare che appunto intorno al $1860 \pm m$ dovevasi avere tale risultato.

Il valore finale, a cui si arresta Kaiser è 3″,62 alla media distanza, cioè:

Semidiametro Urano (Kaiser) 34″,72 (1862.66) (ι)

Disco circolare.

LAMONT

Lamont negli anni 1836-37-38 (Jahrbuch der k. Sternwarte bei München, 1839) misurò parecchie volte il diametro di Urano e si arresta al valore 3″,15 alla media distanza.

Con questo risultato si ottiene:

Semidiametro Urano (Lamont 1836-38) 30″,21 ($\varkappa$)

Disco circolare ?

Se è certamente troppo piccolo il valore precedente, lo è ancor più quello che risulta dalle osservazioni di Main nel 1863 (Radcl. Obs. 1863. 193) ridotte da Kaiser.

Col valore 2″,87 si ha:

Semidiametro Urano (Main 1863) 27″,53 (λ)

Disco circolare ?

DOBERCK

(*Markree measures of Uranus* (A. N. 2194)

Urano	1878.	173	Micr. Amici	3",594
»	»	197	»	4, 182
»	»	203	»	3, 273
»	»	205	»	3, 477 , cioè

Semidiametro Urano (Doberck 1878) 31",67 (μ)
Disco circolare ?

SCHIAPARELLI

L' illustre astronomo di Milano volle approfittare dell'opposizione di Urano testè passata per misurare il diametro del pianeta e cercare se gli riusciva di ottenere uno schiacciamento sensibile ora che il pianeta ci si presenta nelle condizioni favorevoli a tale ricerca, come accadde a Mädler intorno al 1840.

Le sue osservazioni abbracciano il periodo dal 12 aprile al 7 giugno 1883; esse vennero fatte coll' equatoriale di otto pollici e col micrometro filare usando gl' ingrandimenti 322, 417, 500, 690.

Il risultato delle sue misure leggesi nelle A. N. N.ro 2526.

Le determinazioni sono 25 e ciascuna riposa sopra 2 misure, fatte l'una col moto ascendente, l'altra col moto discendente della vite. Egli misurò l'angolo di posizione secondo il quale stimava disposto l'asse maggiore, giacchè allo Schiaparelli l'ellitticità si palesò manifesta.

Il valore dello schiacciamento che gli riuscì di assegnare è $\frac{1}{10,94 \pm 0,67}$ cioè $\frac{1}{11}$. La direzione dell'asse maggiore dell'ellisse apparente è 197°, per l'epoca media delle osservazioni, coincidente cioè a meno di 2° colla direzione del grande asse delle orbite apparenti dei satelliti.

$2a = 3'',911$ cioè all'unità 37",513 per il semidiametro (ν)
$2b = 3,555$ » 34, 098 »

Questi risultati di Schiaparelli sono importanti assai perchè proverebbero che la fatta ipotesi della posizione dell'asse di rotazione uranico è la vera e conducono ad uno schiacciamento all'incirca eguale a quello avuto da Mädler. Sta peraltro il fatto che nelle epoche nelle quali il pianeta doveva apparire circolare per es. intorno al 1860 le misure che possediamo sono numerose e assai concordanti intorno al valore 35" ed allora dovevasi misurare appunto il semiasse maggiore: locchè condurrebbe ad ammettere che forse il valore 37",513 di Schiaparelli è un tantino troppo forte. Ed in vero abbiamo per l'epoca appena citata:

Engelmann	35", 61
Lassel e Marth	34, 15
Vogel	34, 75
Kaiser	34, 72.

M. W. Meyer

In un breve articolo nelle A. N. 2524 M. W. Meyer dà le misure da lui fatte a Ginevra nella primavera del 1881 (epoca nella quale l'ellitticità doveva riuscire la più manifesta dalle osservazioni) del diametro di Urano ger $p = 0°$ e $90°$. Nove sere di osservazioni con 20 confronti per ogni sera gli diedero per $p = 90°$ $4'',015 \pm 0'',044$. Ingr. 460. Eq. di 10 pollici d'apertura.

Per $p = 0°$ ebbe $3'',989$ in 6 sere d'osservazione con 20 confronti per ogni sera e l'errore probabile gli risultò $\pm 0'',025$.

I valori sono ridotti alla distanza, il cui log. è 1.28291.

Meyer quindi dichiara che: Aus diesen Messungen ist keine Abplattung des Planeten zu erkennen.

Il medio dei valori dati da Meyer, ridotto all'unità, dà per

Semidiametro Urano (Meyer) 1881 $38'',38$. (c)

Esaurita la parte letteraria dell'argomento, almeno col materiale scientifico di cui dispongo, do ora nelle sue particolarità la serie delle misure da me fatte come contributo alla determinazione di questa costante astronomica.

Nelle misure ho usato il 9 pollici di Merz ed il micrometro filare a campo oscuro e fili lucidi ed a campo illuminato e a fili neri. Non ho trovato differenza sensibile usando questi due metodi d'osservazione. Generalmente usai il secondo.

Un giro del micrometro vale $15'',45858 - 0'',0025\ (t - 18°,4)$.

L'orologio del nostro equatoriale fu sempre un apparecchio sproporzionato in forza rispetto alla parallatica, e però il sincronismo resta un puro desiderio dell'osservatore, che si realizza per qualche minuto e non mai col circolo delle distanze polari a ponente.

Tentai di tutto per ottenere tale sincronismo allo scopo di misurare ogni sera il diametro in angolo di posizione 0° e 90° almeno, ma devo confessare che non riuscii che una sola sera, ed il perchè sia riuscito in quella sera proprio non lo so.

Le misure quindi che sto per dare corrispondono all'angolo di posizione 0°, e solo quella dell'11 maggio 1883 furono fatte nei due diametri perpendicolari. Deriva da ciò che non posso confrontare fra di loro i risultati in modo da fornire un criterio per lo schiacciamento, giacchè sono troppo scarse le misure del diametro coincidente col parallelo, a confronto di quelle fatte sul diametro perpendicolare al moto diurno.

Le osservazioni vennero fatte cogli oculari 5, 6 e 7 positivi, i cui ingrandimenti sono dati da Secchi nella nota descrizione dell'equatoriale di Merz.

Le osservazioni vennero fatte in modo che a metà di esse Urano fosse in meridiano, e ciò allo scopo di ottenere le migliori definizioni nelle immagini.

Dopo ciò ecco le letture dirette:

16 aprile 1883, angolo di pos. 0°, spessore del filo 0,0298, ocul. n. 6, $t = 12°,2$.

N.	Lettura	Coincidenza	Differenza	N.	Lettura	Coincidenza	Differenza
1	0,223	—0,043	0,266	10	0,634	0,897	263
2	0,049	0,312	263	11	0,684	0,942	258
3	0,002	0,252	250	12	0,713	1,009	296
4	—0,060	0,223	283	13	0,782	1,052	270
5	0,014	0,268	254	14	0,901	1,151	250
6	0,738	1,033	295	15	0,901	1,210	309
7	0,571	0,832	261	16	0,970	1,291	321
8	0,527	0,791	264	17	0,012	0,332	320
9	0,557	0,803	246	18	0,092	0,347	255

Le immagini erano buone.

Il diametro corretto dello spessore del filo risulta:

0,2437 e; log. dist. 1,242258.

17 aprile 1883, angolo di pos. 0°, immagini buone coll'oculare n. 5, $t = 12°,2$.

N.	Lettura	Coincidenza	Differenza	N.	Lettura	Coincidenza	Differenza
19	0,720	0,400	0,320	34	0,399	0,695	0,296
20	710	0,500	210	35	417	719	302
21	730	469	261	36	427	706	279
22	764	500	264	37	437	795	358
23	760	482	278	38	557	330	227
24	832	579	253	39	579	319	260
25	869	606	263	40	601	290	311
26	910	619	291	41	528	280	248
27	982	708	274	42	553	285	268
28	222	—0,090	312	43	587	277	310
29	187	—0,097	284	44	570	280	290
30	283	—0,011	294	45	570	259	311
31	326	—0,010	336	46	600	309	291
32	231	0,513	282	47	620	329	291
33	232	590	358	48	639	317	322

Il diametro corretto dello spessore del filo risulta:

0,25833 e; log. dist. 1,242496.

18 aprile 1883, angolo di pos. 0°, oculare n. 7, immagini eccellenti, $t = 10°,2$.

N.	Lettura	Coincidenza	Differenza	N.	Lettura	Coincidenza	Differenza
49	0,732	0,418	0,314	57	0,344	626	0,282
50	802	,508	294	58	1,239	956	283
51	750	510	240	59	1,268	995	273
52	759	498	261	60	—0,172	114	286
53	752	523	229	61	—0,153	152	305
54	897	592	305	62	—0,171	144	315
55	898	606	292	63	—0,152	148	300
56	908	660	248				

Il diametro corretto dello spessore del filo risulta:

0,2520 e; log. dist. 1,242771.

Per amore di brevità tralascio nelle serie che seguono le letture e le coincidenze e do solo le differenze.

20 aprile 1883, angolo di pos. 0°, immagini velate da nubi e nebbia, oculare n. 6, definizione cattiva, $t = 12°,6$.

N.	Differenza	N.	Differenza
64	0,340	67	0,258
65	334	68	330
66	234	69	302

Il diametro corretto dello spessore del filo risulta:

0,26987 e; log. dist. 1,243275.

23 aprile 1883, angolo di pos. 0°, immagini sufficientemente buone coll' oculare n. 6, $t = 11°,6$.

N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza
70	0,314	77	0,279	84	0,288	91	0,329
71	0,290	78	0,267	85	0,303	92	0,293
72	0,262	79	0,279	86	0,301	93	0,317
73	0,301	80	0,301	87	0,287	94	0,330
74	0,277	81	0,274	88	0,261	95	0,328
75	0,270	82	0,273	89	0,279	96	0,308
76	0,305	83	0,305	90	0,297	97	0,310

Il diametro corretto dello spessore pel filo risulta:

0,2640 e; log. dist. 1,244090.

7 maggio 1883, angolo di pos. 0°, immagini buone coll' oculare n. 6, $t = 14°,3$.

N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza
98	0,289	103	0,285	108	0,275	113	0,316
99	0,277	104	0,301	109	0,233	114	0,246
100	0,240	105	0,302	110	0,298	115	0,250
101	0,281	106	0,304	111	0,310	116	0,281
102	0,281	107	0,301	112	0,236	117	0,296

Il diametro corretto dello spessore del filo risulta:

0,2503 e; log. dist. 1,248519.

Il giorno 11 maggio ottenni la sincronia dell' equatoriale col moto diurno e potei misurare il diametro a 0° e a 90°. Le misure a 90° vennero fatte così: disposti i due fili in modo da misurare un angolo un po' eccedente il valore del diametro uranico vi comprendeva fra essi il dischetto, nè facevo la lettura se non ero certo con più prove che realmente gli orli prossimi dei fili ne fossero tangenti.

In tal modo, quantunque le misure non sieno che 15, pure in realtà dipendono da certamente una sessantina di stime.

Ecco i valori ottenuti:

Oculare n. 6, immagini buone, $t = 14°,3$.

11 maggio 1882, angolo di pos. 90°.

N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza
118	0,302	122	0,250	126	0,259	130	0,299
119	0,240	123	0,279	127	0,310	131	0,282
120	0,310	124	0,307	128	0,309	132	0,260
121	0,277	125	0,287	129	0,295		

Il diametro parallelo al moto diurno (90°) corretto dello spessore del filo è:

0,2546 *e*; log. dist. 1,249809.

Immediatamente dopo misurai a 0°, oculare n. 6,

N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza	N.	Differenza
133	0,300	138	0,265	143	0,314	148	0,273
134	0,300	139	0,300	144	0,255	149	0,302
135	0,300	140	0,273	145	0,316	150	0,308
136	0,245	141	0,306	146	0,249	151	0,309
137	0,293	142	0,252	147	0,315	152	0,303

Il diametro a 0° corretto dello spessore del filo risulta:

0,2591 *e*; log. dist. 1,249809.

Dopo l'11 maggio non feci altre osservazioni, poichè volendo osservare circa in meridiano, le culminazioni uraniche succedevano in crepuscolo serotino; d'altronde fu un caso se l'11 potei raggiungere la desiderata sincronia. Feci dei saggi anche cronografici e numerosi, ma essi non riuscirono di mia soddisfazione, come del resto era da prevedere, poichè un errore m diventa $15\,m$.

Ecco il quadro dei valori ottenuti ridotti in arco ed alla distanza, il cui logaritmo è 1,245.

	Angolo 0°				Angolo 90°
	3″,746	(18)	4″,076	(28)	3″,982 (15: stime 60)
	3, 971	(30)	3, 903	(20)	
	3, 880	(15)	4, 052	(20)	
(nubi)	4, 157	(6)			

Ai valori ottenuti do per pesi individuali i numeri proporzionali al numero delle misure: cioè [3], [5], [2,5], [1], [4,7], [3,3], [3,3], e per l'unica serie per $p = 90°$ [10].

Il medio aritmetico compensato per $p = 0°$ è 3″,963 alla distanza [1,245]: questo risultato è identico al valore per $p = 90°$ (3″,982).

Non posso per altro negare che per $p = 90°$ posseggo osservazioni d'una sola sera, comunque abbia cercato di raggiungere quella precisione, che era nelle mie forze.

Un errore sistematico in tali misure si può mantenere per un'intera sera e celarsi, come in luogo opportuno faceva notare l'illustre p. Secchi, e se avessi potuto disporre di altrettante serate di osservazioni del diametro di Urano per $p = 90$; $p = 45$, come aveva per $p = 0$, avrei potuto esporre con maggiore sicurezza il mio giudizio sulla questione dello schiacciamento sensibile, *che devo per mio conto tenere sospeso*, quantunque dalle misure risulti una figura circolare.

Rifondendo in uno tutte le misure operate ottengo per valore finale 3″,9648 alla distanza, il cui logaritmo è [1,245], cioè all'unità:

Semidiametro Urano 34″,849 (ξ)

Figura disco: circolare ??

Raccolgo nel quadro seguente tutti i risultati discussi in questa mia Nota.

Osservatore	Semidiametro di Urano	Figura disco	Epoca dell'osserv.	Epoche probabili della figura	Numero d'ordine
W. Herschel. . .	37″,46	circolare	1781. 82	circolare	α
»	. . . .	ellittica	1792. 95	1776 $\pm m$	—
Maskelyne	34, 80	?	1782. 83	—	β
Arago	41, 09	?	1814	ellittica	γ
Encke e Galle . .	50, $\pm$	circolare ?	1836	1797 $\pm m$	δ
Mädler	{ a 41, 65 { b 37, 49	ellittica	1842. 46	— circolare	ε
O. Struve	. . . .	circolare	?	1818 $\pm m$	—
Engelmann. . . .	35, 61	circolare	1865	—	ζ
Lassel e Marth .	34, 15	circolare ?	1864. 65	ellittica	η
Vogel.	34, 75	circolare ?	1869	1839 $\pm m$	ϑ
Kaiser	34, 72	circolare	1862. 66	—	ι
Lamont.	30, 21	circolare ?	1836. 38	circolare	ϰ
Main	27, 53	?	1863	1860 $\pm m$	λ
Doberck	31, 67	?	1878	—	μ
Schiaparelli . . .	37, 51 a } 34, 10 b }	ellittica	1883	ellittica 1881 $\pm m$	ν
Millosevich. . . .	34, 85	circolare (?)	1883	—	ξ
M. W. Meyer . .	38, 38	circolare	1883		ο

CONCLUSIONI

Dal quadro precedente possiamo dedurre quanto segue:

1. Due astronomi, Mädler e Schiaparelli, osservando ambedue in epoche nelle quali il disco uranico doveva presentarsi ellittico ne assegnano uno schiacciamento quasi identico, ma invece diversificano nei valori assoluti dei semiassi.

M	S
41″65	37″,51
37,49	34, 11

Essi sono concordi sufficientemente nel segnare la direzione dell'asse maggiore.

2. Herschel pure nell'epoca 92.95 riconobbe ellittico il disco.

Pare quindi che esista un reale schiacciamento e che l'equatore uranico coincida all'incirca col piano delle orbite dei satelliti. Tuttavia le misure di Meyer del 1881 ed in parte le mie del 1883 escludono uno schiacciamento sensibile.

3. D'altronde una serie assai concorde di misure intorno al 1865, epoca in cui Urano appariva circolare e se ne vedeva il semiasse *maggiore*, dà per valori di quello

35″,61
34, 15
34, 75
34, 72

Aggiungendo a queste le numerose mie misure, pressochè tutte per $p=0^{\circ}$, cioè presso a poco in coincidenza col semiasse maggiore, sembrerebbe che questo di poco dovesse allontanarsi da

$$35''.$$

Se tale valore fosse il vero o lo schiacciamento di $\frac{1}{10}$ è troppo forte, oppure serbandolo intatto i valori degli assi ottenuti dall'illustre astronomo di Milano dovrebbero subire ambedue una leggera diminuzione.

4. Di fronte a questi dubbî sorge il bisogno di ricorrere di nuovo alle osservazioni nelle prossime opposizioni, già ancora opportune per la questione dello schiacciamento.

Nello studio che io feci dei diversi valori avuti dagli astronomi su questa *costante* e nel tenue contributo alla determinazione della medesima colle mie osservazioni, intesi di richiamare su questa l'attenzione degli astronomi ed ebbi la ventura di sapermi prevenuto dallo Schiaparelli. Che se ora le piccole incertezze restano affidate per noi italiani alle sue cure per levarle via, non avremo in avvenire che ad esser grati a lui e soddisfatti.

Blastoporo e linea primitiva dei Vertebrati.

Memoria del prof. GIUSEPPE BELLONCI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 marzo 1884.

(Con sei tavole).

INTRODUZIONE

La corrispondenza morfologica fra tutta la linea primitiva degli uccelli e dei mammiferi e le labbra del blastoporo di molti vertebrati inferiori non è, a mio credere, completamente dimostrata. La linea primitiva è una formazione molto complessa in sè, e più ancora in rapporto alla genesi dell'embrione; e con troppa facilità fu rinchiusa in uno schema morfologico semplicissimo.

Io ho creduto di trovare nell' axolotl un germe di linea primitiva e di solco primitivo, insieme al vero blastosporo; e partendo da questo fatto ho studiato le funzioni embriogeniche del blastoporo e della linea primitiva e il rapporto di queste formazioni col primo abbozzo embrionale, per stabilire fino a qual punto possa legittimamente estendersi la loro omologia.

Le mie ricerche sono ben poca cosa rispetto all'immensa vastità dell'oggetto: mi limitai a cercare di chiarire i punti più essenziali, ancora oscuri, per la risoluzione di questo problema. D'altra parte però il materiale di comparazione accumulato da valentissimi embriologi è di già sufficientemente abbondante.

Nella discussione dei rapporti è inevitabile introdurre l'idea filogenetica. Io ho cercato però che nella mia mente quest'idea non diventi un preconcetto a detrimento degli altri fattori embriogenici, per evitare così la formazione di astratti schemi, non corrispondenti alla realtà delle cose.

PARTE I.

Le prime fasi dello sviluppo dell' axolotl. (1)

Dal gennaio al giugno del 1883, ebbi a mia disposizione un numero grandissimo di ova d'axolotl; e potei quindi studiarne, in tutte le loro interessanti particolarità, le prime fasi di sviluppo (2).

(1) G. Bellonci. *Intorno alla formazione della linea primitiva e del solco primitivo nella gastrula dell'axolotl.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Vol. XVI, fasc. X-XI. 1883.

(2) Raccolsi coteste ova dagli axolotl esistenti nel Museo Civico di Milano, e specialmente da quelli posseduti dal preparatore del Museo, sig. Barazzetti, al quale rendo qui molti ringraziamenti.

Metodo di preparazione. — Tentai dapprima di spogliare le ova [1] del glutine, innanzi di porle ad indurire, secondo che consigliano Scott e Osborn [2]. Ma questo processo penosissimo esige un tempo troppo lungo, e sol poche volte le ova, così isolate, rimangono perfettamente incolumi; perciò dovetti abbandonarlo. Allora risolsi di levare delicatamente colle forbici quanto più potevo glutine, e di immergere così le ova nell'acido picrico solforico di Kleinenberg. Questo liquido penetra benissimo e in poco tempo. Dopo sei od otto ore di immersione in questo reagente, passavo le ova nell'alcool a 25° e ve le lasciavo per pochi minuti, a fine di rendere meno glutinoso e più facilmente isolabile l'invoglio. Poi isolavo l'ovo dal suo inviluppo; e mi riusciva di far ciò con molta facilità. Dopo i soliti passaggi in alcool sempre più forte, coloravo col carminio borico di Grenacher, poi compenetravo di paraffina per mezzo di cloroformio e finalmente eseguivo i tagli col microtomo Thoma e secondo il processo Giesbrecht.

Perchè con questo metodo la massa di cellule vitelline non si screpoli o non diventi troppo friabile è necessario: 1° che l'azione dell'acido picrico-solforico e dell'alcool non si protragga troppo a lungo; 2° che la sostituzione della paraffina al cloroformio si faccia lentamente e regolarmente, e perciò non vi siano mai forti oscillazioni nella temperatura, mentre quella si compie.

Per altro le ova indurite col metodo suddetto sono abbastanza consistenti per poter esser tagliate senza previa compenetrazione con massa omogenea, e dopo essere state semplicemente incluse in una miscela di paraffina, cera e olio comune. Così feci, a mano libera, parecchie buone serie di sezioni, abbastanza sottili in rapporto alla grossezza degli elementi.

Adoperai anche, come reattivo per indurire, la miscela di acido cromico e acetico di Hertwig [3], che mi diede talvolta buoni risultati. Essa coagula i liquidi contenuti nelle cavità interne e rende così superflua ogni compenetrazione per l'esecuzione dei tagli, che possono benissimo esser fatti a mano libera. Non mi riuscì però di colorare le ova intere, così trattate; ottenni un sufficiente coloramento delle sezioni col carminio acido di Schweigger-Seidel.

Adoperando or l'uno, or l'altro di questi due processi, preparai le serie di circa ottanta ova nelle prime fasi del loro sviluppo. Studiai però un numero di gran lunga maggiore di ova intere o a fresco o indurite e spogliate del loro invoglio glutinoso.

I. *Formazione della blastula.*

L'emisfero animale nell'ovo di axolotl, come in altri anfibi, è fortemente pigmentato in bruno, mentre l'emisfero vegetativo è del tutto privo di pigmento. Al polo animale trovasi quasi sempre una piccola area circolare biancastra. Nell'emisfero animale si raccoglie principalmente il protoplasma attivo, che contiene

[1] In mancanza d'un termine generale per indicare le prime forme dello sviluppo, adopero la parola *ovo*.

[2] W. B. Scott and E. F. Osborn, *On some points in the early development of the common newt*. Quarterly journal of microscopical science. Vol. XIX. 1879.

[3] O Hertwig, *Die Entwicklung des mittleren Keimblattes der Wirbelthiere*, I Theil. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Jena, 1881; II Theil ib. Jena, 1882.

piccole granulazioni vitelline disseminate; mentre nell'emisfero vegetativo il protoplasma è in poca quantità e le granulazioni vitelline sono invece molte, grosse e stipate. Quindi, in ragione del predominio dei componenti, denomino le cellule provenienti dal primo emisfero *protoplasmatiche*, quelle invece provenienti dal secondo *vitelline*. Però fra le sostanze dei due emisferi non vi è una separazione netta, bensì un passaggio graduato.

Com' è noto, l'emisfero pigmentato o protoplasmatico è volto sempre in su, in causa del maggior peso delle granulazioni vitelline dell'altro emisfero.

La segmentazione segue generalmente il tipo già conosciuto per le ova degli anfibî ([1]); talvolta essa è asimmetrica. Ho osservato anche alcuni casi, molto interessanti, di segmentazione straordinariamente ineguale, a tipo quasi meroblastico. Sembra che in tali casi nell'emisfero vitellino la forza di segmentazione non fosse sufficiente a produrre la divisione della massa in cellule, e giungesse soltanto a moltiplicare i nuclei. Anche nelle ova di rospo ostetrico (Alytes obstetricans), secondo Vogt ([2]), si riscontrerebbe l'incompleta segmentazione dell'emisfero vitellino.

La cavità di segmentazione comincia ad apparire nello stadio di otto blastomeri; e, pel fatto stesso della segmentazione ineguale, essa corrisponde, com' è noto, all'emisfero protoplasmatico. La segmentazione procede molto rapidamente nell'emisfero protoplasmatico, accompagnata da splendide figure cariocinetiche, che ho indicato nelle fig. 1 e 2 della tav. II ([3]). Il risultato di questo processo è una blastula simile a quella veduta da O. Hertwig nel tritone ([4]). Il tetto della cavità di segmentazione è formato di numerose cellule protoplasmatiche (tav. II, fig. 1 e 2, C*p*); le quali, allorchè la blastula è negli ultimi stadî, non formano un solo strato semplice, ma cinque o sei strati semplici sovrapposti. È notevole il fatto che le cellule protoplasmatiche degli strati esterni sono stipate e perciò poligonali, mentre quelle degli strati interni non si comprimono e rimangono rotonde e come nuotanti nel liquido che trovasi nell'interno dell'ovo. Ciò si vede molto bene nei preparati fatti coll'acido cromico acetico, perchè questo coagula i liquidi intercellulari che poi si colorano in rosso col carminio.

Il pavimento della cavità di segmentazione è pressochè piano e formato di cellule vitelline (C*v*).

Nei casi di segmentazione molto ineguale, l'emisfero vitellino della blastula risulta formato di una o due enormi masse vitelline, sulle quali, nel pavimento della cavità di segmentazione, s'adagiano poche cellule vitelline di grandezza normale.

Fra le cellule che limitano la cavità di segmentazione, e più spesso nel pavimento di questa, ho osservato non di rado alcune piccole sfere (fig. 2, *x*) non nucleate e formate di granulazioni vitelline. Son queste forse sfere vitelline di nutrizione, simili a quelle che si trovano nelle ova meroblastiche.

([1]) Vedi anche: Ch. van Bambeke, *Nouvelles recherches sur l'embryologie des Batraciens*. Archives de Biologie Bd. I. 1880.

([2]) Non conosco il lavoro di Vogt che per la citazione che ne fa Moquin-Tandon nel suo lavoro: *Développement des Batraciens anures*. Annales des Sciences Naturelles, Vol. III. 1875.

([3]) *Di alcune particolarità importanti della cariocinesi nell'ovo di axolotl*, tratterò in una nota separata.

([4]) O. Hertwig, l. c.

II. *Formazione della gastrula.*

La prima traccia dell'invaginazione è una fossetta trasversa, che si forma generalmente in una regione dell'emisfero vitellino prossima all'emisfero protoplasmatico, sicchè rimanga più in giù della cavità di segmentazione. Questa fossetta rapidamente si estende secondo un arco il cui centro è nell'emisfero vitellino e diventa il ben noto solco falciforme.

In un ovo di cui conservo le sezioni longitudinali ([1]), il solco falciforme trovavasi più in su del luogo dove suole apparire: esso era nell'emisfero protoplasmatico, al livello del pavimento della cavità di segmentazione (tav. II, fig. 3 *sf*). Questo fatto eccezionale dimostra che il luogo d'invaginazione, in rapporto alla blastula, non è assolutamente fisso; e verrà richiamato utilmente nella discussione sullo spostamento del blastoporo ([2]).

Visto in sezione, il solco falciforme apparisce di solito come una regolare introflessione della superficie (tav. II, fig. 4 *sf*). Nel caso eccezionale testè citato esso aveva piuttosto l'aspetto di una fenditura (fig. 3 *sf*).

Le sezioni mostrano con chiarezza che il lavorio di moltiplicazione delle cellule protoplasmatiche e di invaginazione è, fin da questo momento, attivissimo. Le figure cariocinetiche nelle cellule protoplasmatiche sono frequentissime, rare invece nelle vitelline. L'invaginazione è resa manifesta dal cangiamento di forma della cavità di segmentazione, il cui pavimento diventa sempre più convesso.

In questo primo stadio della gastrulazione le cellule limitanti superiormente la cavità di segmentazione sono, come nella semplice blastula, rotonde e discoste fra loro, sì che possano liberamente muoversi; così pure son quelle (vitelline) che formano il pavimento di questa cavità. È dunque molto probabile che il cangiamento di forma che notasi nell'interno sia causato, oltrechè dalla introflessione della superficie, anche da uno spostamento interno di cellule, che potrebbe anche essere il risultato di movimenti ameboidi (movimenti ameboidi di Stricker). E ciò è tanto più probabile, inquantochè tal cangiamento di forma è più grande di quello che la leggera introflessione della superficie potrebbe di per sè produrre.

Non si tratta però di due fatti disgiunti; è sempre uno spostamento di cellule, che, laddove esse sono stipate, si manifesta come introflessione, laddove invece sono discoste, con movimenti liberi.

La gastrulazione progredisce rapidamente; e può considerarsi come il risultato di una forza inegualmente ripartita nella sfera ovulare: massima cioè nell'emisfero protoplasmatico, minima nell'emisfero vitellino. Il primitivo strato protoplasmatico si estende alla superficie verso il polo vitellino, ma più fortemente si muove in corrispondenza dell'orlo superiore del solco falciforme, dove si ripiega indentro su di sè stesso. Si vedono, difatti, le cellule protoplasmatiche internarsi gradatamente da quest'orlo in su e in avanti e occupare la parte esterna della massa invaginata, che, in questa regione, tende ad applicarsi contro lo strato protoplasmatico esterno

([1]) Mi riferisco fin d'ora all'orientazione del futuro embrione.

([2]) Questo fatto ha forse rapporto colle recenti esperienze di Pflüger, *Sull' influsso della gravità sulla segmentazione delle cellule* (Archiv f. d. gesam. Physiol. Bd. 31, 32. 1883).

(fig. 5 *Cp'*). La massa vitellina si muove poco; e il suo movimento è, in gran parte almeno, determinato da quello delle cellule protoplasmatiche. La superficie esterna rimane sferica.

Il solco falciforme si approfonda rapidamente; e così si forma una specie di fenditura arcuata (fig. 5, 6 *ci*), che separa le cellule protoplasmatiche interne dalle vitelline, ed è il primo indizio della cavità gastrale. Questa, dapprincipio, è quasi sempre una ben manifesta introflessione (fig. 4, 5, 7 *sf*); dipoi l'introflessione si fa meno evidente, perchè le due superficie opposte di essa si applicano l'una contro l'altra, strette dalla pressione invaginante: così formano la fenditura che separa nettamente le cellule protoplasmatiche interne dalle vitelline (fig. 6). E poichè quelle s'internano più rapidamente di queste, può dirsi che la fenditura s'estende principalmente per opera del ripiegamento interno dello strato protoplasmatico che scivola, in certo modo, sulla massa di cellule vitelline.

Nei casi di incompleta segmentazione dell'emisfero vitellino, l'apparenza di una fenditura che separa lo strato protoplasmatico internato dalla massa vitellina, è più che mai chiara (fig. 8, 13).

Il semplice ripiegamento interno dello strato primitivo protoplasmatico, senza formazione di una vera cavità d'introflessione della superficie, sarebbe il caso normale negli anuri [1].

Oltre tutto questo movimento, nell'axolotl notasi un fatto importantissimo, ed è che per un certo tratto all'innanzi dell'orlo superiore del solco falciforme, lo strato protoplasmatico primitivo si continua direttamente colla massa interna di cellule protoplasmatiche (fig. 5, 6, 8, 9, 13 P). Ciò dimostra che in questa regione (P) avviene la diretta penetrazione di cellule protoplasmatiche, indipendentemente dal ripiegamento interno dello strato.

In questo stadio, le cellule protoplasmatiche che formano la volta della cavità di segmentazione sono stipate e poligonali; quelle invece che trovansi all'innanzi del solco falciforme, fra lo strato esterno e la massa vitellina e formano, in parte, il pavimento della cavità di segmentazione, ormai qui obliterata, sono rotonde come le cellule vitelline che formano il resto del pavimento stesso. È perciò probabile che, anche in questo stadio, esse, oltre all'essere sospinte dalla introflessione e dall'espansione interna dello strato protoplasmatico, si spostino nell'interno in virtù di movimenti ameboidi. In questa condizione sono specialmente le cellule che direttamente penetrano nel tratto P.

I rapporti della nuova forma di sviluppo ci provano all'evidenza che l'estensione superficiale dello strato protoplasmatico e la formazione della massa interna di cellule protoplasmatiche sono prodotte da una vera espansione e penetrazione di cellule protoplasmatiche primitive proliferanti, e non da trasformazione in sito di cellule vitelline, come si potrebbe sospettare. Difatti, lo strato protoplasmatico esterno, che prima era formato di 5 o 6 strati semplici di cellule, nello stadio della fig. 5 è già ridotto a soli 3 o 4 strati semplici, benchè le cellule protoplasmatiche siano

[1] V. Stricker, Romiti, V. Bambeke, Moquin-Tandon, e principalmente: Götte, *Entwickelungsgeschichte der Unke*.

diventate più piccole Inoltre si vedono le cellule vitelline come sospinte indietro e verso la volta della cavità di segmentazione, la quale diventa sempre più bassa e il cui pavimento assume superficie sferica. Pensando ancora che le cellule protoplasmatiche sono molto più attive delle vitelline e che rapidamente si moltiplicano, acquistiamo la certezza del loro movimento, che pur direttamente non si può osservare.

E d'altra parte è molto improbabile che le cellule vitelline così d'un tratto assumano i caratteri delle protoplasmatiche, e che rapidamente si dividano e suddividano, mentre di rado mostrano figure cariocinetiche.

I caratteri distintivi delle due specie di cellule sono indicati nelle figure, e servono sempre a riconoscerle a colpo d'occhio.

In questo primo stadio si manifesta già tutto il processo di gastrulazione. Essa è prodotta da una espansione dello strato protoplasmatico primitivo (tetto della cavità di segmentazione) e da una deformazione, in gran parte passiva, della massa vitellina che tende ad essere invaginata. L'espansione dello strato protoplasmatico è in parte superficiale (epibolia), in massima parte interna. Quest'ultima si determina in tre momenti: 1° introflessione della superficie e ripiegamento interno dello strato; 2° diretta penetrazione delle sue cellule per un tratto al davanti del solco falciforme; 3° movimenti ameboidi (molto probabili) delle cellule protoplasmatiche.

Tutti questi momenti del processo di gastrulazione dipendono evidentemente dall' ineguale natura degli elementi della blastula. Nell'axolotl nessuno di essi può esser escluso; epperò qui si conciliano le disparate opinioni che furono causa di controversie fra quelli che studiarono lo sviluppo degli anfibî e specialmente degli anuri. Riandando la letteratura di questo argomento si vede che, negli anuri, la gastrulazione si inizia essenzialmente nello stesso modo.

E fors'anche nel tritone, oltre la semplice invaginazione (Scott e Osborn, Hertwig), hanno qualche parte la diretta penetrazione e i movimenti ameboidi delle cellule protoplasmatiche.

Il tratto P dove si opera la diretta penetrazione di cellule protoplasmatiche ha una grande importanza comparativa, poichè, *prescindendo ora da ogni considerazione di omologia*, pei suoi rapporti colla genesi dei foglietti embrionali, corrisponde alla linea primitiva dei sauropsidi e dei mammiferi.

Secondo Stricker ([1]) e Romiti ([2]), in alcuni anuri, già fin nello stadio di blastula, al davanti del luogo dove poi si formerà il solco falciforme, trovasi un grosso strato di cellule protoplasmatiche, che si continua col tetto della cavità di segmentazione. Questo strato corrisponde evidentemente al tratto P dell'axolotl.

Questo tratto è anche più sviluppato del solito in quei casi in cui la segmentazione non si estende a tutta la massa vitellina, in cui cioè si ha un passaggio alla forma meroblastica. Le fig. 8, 9 e 13 della tav. II rappresentano sezioni longitudinali di questi casi singolari. Nelle fig. 8 e 9, appartenenti alla stessa serie, si vede che il solco falciforme limita superiormente la massa vitellina non segmentata e contenente nuclei sparsi come il vitello bianco delle ova meroblastiche; e

([1]) S. Stricker, *Untersuchungen über die ersten Anlagen in Batrachier-Eiern*. Zeitschrift f. wiss. Zool., Bd. XI. 1861.

([2]) Romiti, *Zur Entwickelung von Bufo cinereus*. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XXIII.

sembra che questo solco sia piuttosto la manifestazione esterna di una fenditura che una vera introflessione della superficie.

Disgraziatamente non ho trovato questa condizione di cose che in tre casi e sempre in questo stadio; perciò non ho potuto vederne lo sviluppo e la ulteriore evoluzione, che certamente sarebbero stati importantissimi. Tuttavia, riferendosi ai casi di gastrulazione normale, si può ammettere, a buon dritto, che le cellule protoplasmatiche che trovansi nel tratto P e sotto la cavità di segmentazione (Cp') sianvi trasportate, per analogo processo, anche nelle forme semimeroblastiche, e che non vi si trovino fin dallo stadio di blastula. E ciò è confermato dal fatto che anche in questi casi lo strato protoplasmatico esterno è molto assottigliato.

Queste forme eccezionali nello sviluppo dell'axolotl possono paragonarsi a quelle normali che riscontransi negli stadî corrispondenti degli elasmobranchi ([1]). Senonchè, nell'axolotl esse hanno maggiore importanza, perchè lo sviluppo grande del tratto P (che negli elasmobranchi sembra manchi totalmente) fornisce un eccellente termine di confronto col processo che si compie nella linea primitiva dei vertebrati allantoidei.

Le cellule protoplasmatiche che già fin d'ora sono penetrate nell' interno (Cp'), rappresentano un primo germe di due formazioni non ancora poste; il così detto *entoblasto cordale* (Hertwig) e il *mesoblasto*. Queste cellule formano una massa che si estende, dapprima, poco in avanti e ai lati (fig. 9, 12).

Hertwig indica, nel tritone, la massa di cellule corrispondente a questa dell' axolotl col nome di *entoblasto*. Essa non avrebbe rapporto colla genesi del mesoblasto, la quale sarebbe pari. Vedremo che, almeno per l'axolotl, ciò è falso.

Calberla ([2]) nel Petromyzon e negli anuri denomina questa massa di cellule protoplasmatiche *entoblasto primitivo*. Però questa denominazione dovrebbe comprendere anche le cellule vitelline. D'altra parte il rapporto di quelle cellule colla genesi successiva degli strati embrionali è assai diverso da quello ammesso da Calberla.

L' avanzare della gastrulazione conduce alla rapida formazione della cavità gastrale, per allargamento della fenditura di introflessione. Il tetto della cavità gastrale rimane formato di cellule protoplasmatiche (tav. II, fig. 14 Cp'; tav. III, fig. 2, 3 Cp'); il pavimento invece, di cellule vitelline. La massa interna di cellule protoplasmatiche comincia ad applicarsi, dall' indietro all' innanzi, contro lo strato protoplasmatico esterno, il quale può essere denominato *ectoblasto primitivo* (E c'). Essa spinge, in tal modo, indietro la cavità di segmentazione, che, pel fatto stesso dell' invaginazione ognor crescente, tende a sparire.

Ora è importante notare che le cellule protoplasmatiche che rivestono la volta della cavità gastrale diventano prismatiche e formano uno strato ben distinto dalle altre cellule protoplasmatiche interne, il quale ha carattere schiettamente epiteliale (tav. II, fig. 6, 14; tav. III, fig. 2, 3 En'). Le cellule protoplasmatiche che rimangono fra questo strato e l' ectoblasto primitivo sono irregolarmente poligonali e, specialmente le più esterne, rotonde. Lo strato così differenziato è il primo indizio

([1]) Balfour, *A monograph on the development of Elasmobranch Fisches*. London, 1878. — Lo stesso, *A Treatise on comparative embryologie*. London, 1881.

([2]) Calberla, *Zur Entwickelung des Medullarrohrs und der Chorda dorsalis der Teleostier und der Petromyzonten*. Morpholog. Jahrbuch, Bd. III. 1877.

dell' entoblasto cordale. Le cellule che gli stan sopra sono ancora cellule indifferenti; non essendo possibile dire d' alcuna fra esse se, scivolando ai lati, andrà a formar parte del mesoblasto, ovvero se, portandosi in avanti, diventerà cellula di nuovo entoblasto cordale. L'individualità degli strati interni non è ancora posta.

Però un primo germe di mesoblasto si ha fin dallo stadio rappresentato nella fig. 6 della tav. II. Difatti, nella fig. 12 della stessa tavola, rappresentante una sezione appartenente alla medesima serie longitudinale della fig. 6, si vede in C p' un lembo laterale della massa protoplasmatica interna, il quale non è più in corrispondenza della cavità gastrale, ma all'esterno di questa, e forma quindi senza dubbio un germe di mesoblasto. E questo germe si continua colle cellule che trovansi, nella regione mediana, fra lo strato entoblastico differenziato En' e il primitivo ectoblasto.

Adunque, nell'axolotl, il primo distinto germe di mesoblasto non è assolutamente interrotto sotto la linea mediana da una formazione da lui affatto diversa, come, secondo Scotte Osborn, nel tritone e secondo Hertwig nel tritone e nella rana, dovrebbe accadere. Egli è certo però, d'altra parte, che la massa mediana indifferente di cellule protoplasmatiche non corrisponde al mesoblasto cordale che Götte descrive negli anuri (¹).

Il primitivo ectoblasto non tarda a circoscrivere l'area vitellina e al tempo stesso, intorno a questa, si estende il primitivo solco d'invaginazione, che, divenuto circolare, delimita il tappo vitellino. Il vero blastoporo è adesso costituito.

La penetrazione delle cellule protoplasmatiche continua, e si estende anzi a tutto l'orlo del blastoporo; ma rimane massima nella parte superiore, minima nell'inferiore.

Nello stadio di cui la fig. 14 della tav. II rappresenta una sezione longitudinale mediana, lo strato protoplasmatico interno che forma il tetto della cavità gastrale è già considerevolmente assottigliato; più ancora lo è nello stadio della fig. 7, tav. IV, cioè allorchè il blastoporo è totalmente circoscritto. Anche in questo stadio però esso è ancora formato di due o tre strati semplici di cellule. Questo strato aderisce ora completamente all' ectoblasto primitivo; dal quale però è ben distinto. Le cellule ectoblastiche sono piccole, stipate, allungate radialmente e contengono granulazioni finissime; le cellule protoplasmatiche interne invece sono più grandi, contengono granulazioni meno fine e, ad eccezione di quelle che tappezzano la volta della cavità gastrale, sono rotonde e discoste fra loro.

In corrispondenza del fondo della cavità gastrale vi è passaggio graduato fra le cellule protoplasmatiche interne e le vitelline. Le cellule di passaggio e le adiacenti vitelline sono di continuo spinte innanzi e in basso pel progredire dell' internamento dello strato protoplasmatico, e si muovono immediatamente sotto l'ectoblasto primitivo.

Allorchè il blastoporo è circoscritto completamente, la cavità di segmentazione è del tutto obliterata (tav. IV, fig. 7).

Le sezioni trasverse e le frontali sono molto utili per lo studio degli stadî di questo periodo: esse ci mostrano principalmente la formazione del mesoblasto. Le

(¹) Götte, l. c. Lo stesso, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Wirbelthiere*. Archiv f. mikr. Anatomie, Bd. XV, 1878.

fig. 2 e 3 della tav. III rappresentano due sezioni di una sola serie trasversale, in uno stadio corrispondente a quello della fig. 14, tav. II. La fig. 2 rappresenta una sezione posteriore, e mostra le due ali di mesoblasto in formazione (*Me*) che si continuano colla massa mediana indifferente. Le cellule di questo germe di mesoblasto sono rotonde e discoste fra loro, poco pigmentate e contengono granulazioni vitelline di media grandezza: sono quasi tutte cellule di passaggio fra le protoplasmatiche e le vitelline. La fig. 3 rappresenta una sezione anteriore, in corrispondenza della cavità di segmentazione; e in essa, come si vede, la formazione del mesoblasto è meno manifesta. Questa, difatti, procede regolarmente dall' indietro all' innanzi, come dimostrano ancora le serie di stadî più avanzati. In molti casi, fra le cellule mesoblastiche estreme e le vitelline vi ha un limite netto; in altri casi invece si vede un passaggio graduato. Nelle sezioni anteriori, in questo stadio, questo passaggio si verifica sempre.

Le sezioni frontali poi (tav. III, fig. 8, 9) ci mostrano come il processo di penetrazione delle cellule protoplasmatiche si estenda gradatamente a tutto l'orlo del blastoporo (*b l*). Queste cellule si internano insinuandosi fra la massa vitellina e l'ectoblasto primitivo. E ciò dipende dalla maggior forza di espansione interna delle cellule protoplasmatiche in confronto alle vitelline, le quali pure vengono invaginate, ma molto più lentamente; sicchè quelle sono costrette ad internarsi fra queste e lo strato esterno. E nemmeno esse restano separate dalla massa vitellina per mezzo d'uno spazio qualunque, poichè ai lati e in basso non si estende la cavità gastrale.

Le cellule del mesoblasto sono tutte rotonde e discoste fra loro e nuotanti in un liquido, il quale coll' acido cromico-acetico si coagula, e il coagulo col carminio acido si tinge in rosso, mentre le cellule stesse poco si colorano. Anche nei preparati fatti coll'acido picrico-solforico, e *senza compenetrazione nessuna*, queste cellule appariscono rotonde e discoste. Adunque non può esservi il dubbio che questi caratteri siano, come crede Hertwig (¹), prodotti artificiali delle masse compenetranti. Da quanto si rileva dalle figure di Scott e Osborn e da alcune dello stesso Hertwig, sembra che anche nel tritone le cellule mesoblastiche siano dapprincipio così sciolte l'una dall'altra. E così anche sarebbe, secondo Götte (²), il mesoblasto degli anuri.

Questo fatto è di grande importanza, perchè mostra quanto, negli anfibî, e massime nell' axolotl, il mesoblasto si allontani dalla forma tipica epiteliale degli enteroceli, che esso dovrebbe avere secondo la dottrina dei fratelli Hertwig (³).

Nella parte inferiore dell'orlo del blastoporo, il processo di penetrazione di cellule protoplasmatiche è poco accentuato (tav. IV, fig. 7 *m e*).

Tutto questo dimostra che le cellule protoplasmatiche irradiano dall' orlo del blastoporo tutt' all'intorno sotto la superficie interna dell' ectoblasto primitivo; e questo processo ha il suo massimo nella parte superiore del blastoporo, il suo minimo nella parte inferiore. A quel massimo corrisponde il tratto P di diretto internamento delle

(¹) Hertwig, l. c. II Theil.

(²) Götte, *Beiträge zur Entw. d. Wirbelthiere.*

(³) O. Hertwig und R. Hertwig, *Die Cœlomtheorie.* Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 1881.

cellule. Da ciò noi dobbiamo arguire che la massa primitiva internata di cellule protoplasmatiche indifferenti, che già vedemmo porre ai lati il primo germe del mesoblasto, contribuisce, espandendosi lateralmente, in avanti e in basso, a formare il mesoblasto definitivo.

Questo complesso movimento delle cellule protoplasmatiche tende naturalmente ad abolire il passaggio graduato fra esse e le vere vitelline; perciò, in generale, fra il mesoblasto e le cellule vitelline vi ha una netta distinzione. Questa distinzione si ha anche ai lati della cavità gastrale, nel punto dove il mesoblasto laterale si unisce alla massa protoplasmatica primitiva che forma il tetto di questa cavità. E dev'essere così: perchè, mentre le cellule vitelline restano pressochè immote, le protoplasmatiche invece si spostano rapidamente in avanti, e altre ne penetrano; sicchè il luogo dove si conserva il passaggio resta solo il fondo della cavità gastrale, dove il movimento dei differenti elementi è sincrono.

Prima ancora che il tappo vitellino sia completamente invaginato, la parte media del tetto della cavità gastrale si riduce a un solo strato semplice di cellule protoplasmatiche prismatiche (tav. II, fig. 1; tav. III, fig. 5, 6 E *nc*): sono queste le cellule del così detto entoblasto cordale. Esso si continua ai lati col mesoblasto; il quale così, a questo punto, è veramente interrotto lungo una striscia mediana da uno strato peculiare ben determinato. In questo stadio, ma non prima, è dunque vera per l'axolotl l'opinione di Scott e Osborn, Hertwig e Calberla. L'entoblasto cordale è più stretto indietro che in avanti, dove si espande a ventaglio e si continua senza limite netto colle cellule vitelline del fondo della cavità gastrale. Quanta somiglianza, anche per la forma, col processo cefalico della linea primitiva dei vertebrati superiori!

Le cellule vitelline che tappezzano la cavità gastrale arrivano precisamente fino ai lati dell'entoblasto cordale.

Continuando la gastrulazione, il blastoporo si restringe sempre più e il tappo vitellino s'invagina. Notevole è la forma che spesso assume in questo stadio il blastoporo: essa è rappresentata nella fig. 10, tav. III. Nella porzione inferiore più larga rimane ancora incluso il residuo del tappo vitellino. Questa forma rammenta il modo di inclusione del vitello negli elasmobranchi [1].

Infine il tappo vitellino viene completamente invaginato e il blastoporo diventa una fenditura longitudinale (tav. I, fig. 8, 12, 13, 14 *b l*).

Il processo di gastrulazione può dirsi terminato; ma se la forma gastrula è compiuta, non lo è del pari la genesi dei foglietti embrionali. Il labbro superiore del blastoporo rimane sempre molto grosso (come anche nel tritone) e forma così un ingrossamento tanto più manifesto quanto più si assottigliano l'ectoblasto e l'entoblasto cordale. Questo ingrossamento indica il luogo di massima attività d'invaginazione; indica ancora il luogo dove dapprima avviene l'internamento diretto delle cellule protoplasmatiche: internamento che continua ancora ed è di grande importanza pei rapporti che assume coll'embrione, i quali si rivelano anche all'esterno.

[1] Balfour, *Comparative embryologie.*

III. *Dei cangiamenti che avvengono in vicinanza del blastoporo e dei loro rapporti collo sviluppo dell' embrione.*

Due singolari formazioni esterne della gastrula dell' axolotl fissarono dapprima la mia attenzione e mi mossero a queste ricerche; sono esse il *rilievo primitivo* e il *solco primitivo*.

Il *rilievo primitivo* è un leggero rilievo della superficie della gastrula, situato al davanti del blastoporo; ha forma di triangolo sferico, colla base nel blastoporo e l' apice in avanti, a circa 80 o 90 gradi, ed è largo alla base circa 30 gradi. Esso comincia a formarsi prima ancora che il tappo vitellino sia completamente invaginato (tav. I, fig. 5 *r p*). Questo rilievo è, nella parte posteriore, più manifesto: qui corrisponde all'ingrossamento superiore del labbro del blastoporo; nella parte anteriore, cioè nell'apice, si continua indistintamente colla superficie della gastrula.

Nella linea mediana del rilievo primitivo, non tarda a manifestarsi un solco (*s p*); la cui formazione progredisce dal blastoporo in avanti: esso è il *solco primitivo*.

Nel tritone, secondo Hertwig, si forma intorno al blastoporo, ma eccentricamente in avanti, un rilievo poco esteso in avanti, il quale non presenta nessun solco mediano.

Allorchè si compie l' invaginazione del tappo vitellino, cominciano a disegnarsi i rilievi midollari: e dico a disegnarsi, perchè difatti dapprincipio si nota soltanto una linea più intensamente pigmentata che indica il contorno dal quale sorgono appresso i rilievi stessi (fig. 5 *r m*). Questo contorno ha forma di una senusoide; la quale posteriormente non circonda del tutto il blastoporo, ma è da questo interrotta (fig. 10) sicchè una parte di esso (metà circa) rimanga compresa nello scudo midollare, l'altra parte invece (posteriore) ne rimanga fuori (fig. 8).

Nel tempo stesso si forma la prima traccia del vero solco midollare, a circa 40 gradi al davanti dell'apice del rilievo primitivo (fig. 8, 9 *s m*).

I rilievi midollari cominciano intanto a sorgere. Fra essi e il solco midollare la superficie dello scudo midollare forma come due gobbe: *gobbe midollari*.

Il solco midollare si estende indietro, ma non si congiunge al solco primitivo; anzi, giunto all' apice del rilievo primitivo, quasichè questo gli impedisse di estendersi oltre, si bipartisce e si congiunge ai solchi che limitano ai lati il rilievo stesso, il quale così viene compreso fra le due gobbe midollari indietro divaricate (tav. I, fig. 1, 2, 3, 4).

È in questo stadio che il rilievo primitivo e il solco primitivo sono maggiormente manifesti; anzi prima di questo momento essi sono generalmente ben poco appariscenti.

Come si vede, questi rapporti del primo disegno embrionale dell' axolotl corrispondono mirabilmente ai rapporti che si osservano nell' embrione degli uccelli e dei mammiferi allorchè si sollevano i rilievi midollari. Questi rilievi abbracciano, divaricandosi indietro, circa la metà della linea primitiva, la quale presenta il proprio solco mediano. Il rilievo primitivo e il blastoporo dell' axolotl corrispondono, pei loro rapporti col solco midollare e coi rilievi midollari, alla linea primitiva degli uccelli e dei mammiferi. Però sembra che nell' axolotl siavi una notevole differenza: poichè

oltre il largo avvallamento che rimane fra i due rilievi o cercini midollari, si forma uno stretto solco midollare mediano e si ha quindi la distinzione fra questi rilievi e le gobbe midollari.

Ma questa differenza è sol di grado: la distinzione suddetta esiste, benchè pochissimo manifesta, anche negli uccelli e nei mammiferi. Difatti, in questi vertebrati, sono propriamente i margini esterni dei così detti rilievi midollari, che più s'innalzano e che, presso la chiusura del canale midollare, fanno manifesta sporgenza e poi si toccano e insieme si fondono; mentre nella linea mediana si approfonda un vero solco ristretto. Io posseggo una serie di sezioni d'un embrione di anitra con 4 protovertebre in cui questa distinzione è già ben manifesta. Per gli uccelli, nei primi stadî (nei quali è meno appariscente) è stata notata e disegnata anche da Mihalkovics (1). Pei mammiferi le fig. 196 e 211 di Kölliker (2) ne danno già un indizio. Negli stadî ulteriori essa si vede molto più facilmente; e conduce, per la chiususa del canale, allo schema morfologico di Löwe (3).

Ritengo anzi che la notata distinzione sia fondamentale pei vertebrati; poichè essa corrisponde anche al modo d'origine del canale midollare nell'Amphioxus.

Ciò posto, per l'axolotl è in parte risoluta la questione sollevata da V. Bambeke intorno al significato del solco dorsale degli anfibî (4); in quantochè, nell'axolotl il solco midollare e il primitivo sono perfettamente distinti. V. Bambeke ed O. Hertwig (5) hanno torto di credere che il solco dorsale degli anfibî (*sillon médian*, *Rückenrinne*) non corrisponda a nessuna parte del solco midollare dei vertebrati superiori. Solco midollare si può denominare anche il solco dorsale del tritone, benchè in questo animale manchi il vero solco primitivo.

In altri anfibî invece i due solchi sono manifestamente in continuazione diretta l'uno dell'altro e perciò ne formano un solo. Così avviene nell'*Amblystoma punctatum*, secondo Clarke (6); e così pure in molti anuri.

Nella rana esculenta si forma un unico solco, che procede dal blastoporo in avanti. Tuttavia, osservando attentamente, si vede che dapprincipio al davanti del blastoporo vi è un leggero rialzo (tav. I, fig. 7 *r p*) nel quale si forma la prima traccia (*s p*) del solco dorsale, la quale corrisponde realmente al solco primitivo. Dipoi questo solco si estende in avanti per l'avvicinarsi dei rilievi midollari (*r m*); mentre nel luogo dove nell'axolotl comincia la formazione del solco midollare indipendente, si trova invece qui un notevole rilievo dello scudo midollare.

Il rilievo primitivo non è altro che l'espressione esterna del forte processo di diretta invaginazione che si compie al davanti del labbro superiore del blastoporo;

(1) Mihalkovics, *Entwickelungsgeschichte des Gehirns*. Leipzig, 1877.

(2) Kölliker, *Entwickelungsgeschichte d. Menschen u. der höheren Thiere*. Leipzig, 1879.

(3) Löwe, *Beiträge zur vergleichenden Morphogenesis des centralen Nervensystems der Wirbelthiere*. Mittheil. a. d. Embriol. Institute. Wien. 1880.

(4) Van Bambeke, *Formation des feuillets embryonnaires et de la notocoxde chez les urodèles*. Bulletins de l'Académie royale de Belgique, tome L, n. 8, 1880.

(5) O. Hertwig, *Entwick. mittl. Keimbl.*

(6) S. F. Clarke, *Development of Amblystoma punctatum*. Part. I, External. Studien from the Biological Laboratory of the John Hopkins University, n. II, 1880.

processo pel quale si forma l'ingrossamento del labbro stesso. Anche per questo, come pei rapporti esterni, diventa ognor più giusta la comparazione fatta più sopra colle prime apparizioni embrionali dei vertebrati superiori. Prima però di dare alla corrispondenza rilevata un netto e preciso valore morfologico, è mestieri studiar bene la linea primitiva dei vertebrati allantoidei.

Le formazioni che ho descritto nella superficie dell'embrione dell'axolotl si vedono molte volte colla massima chiarezza; in alcuni casi però esse sono poco manifeste. Talvolta anzi la superficie non presenta con chiarezza nemmeno i rilievi midollari: essa rimane quasi completamente liscia fino alla formazione del tubo midollare, e il solco primitivo e il midollare, appena visibili, sono in diretta continuazione fra loro.

Le ova di alcune deposizioni mi presentarono le descritte forme superficiali evidentissime, altre no. Non so darmi ragione di questo fatto.

Allorchè i cercini midollari si avvicinano molto fra loro, per congiungèrsi sulla linea mediana, il rilievo primitivo, anche quando è dapprima molto manifesto, si perde a poco a poco, e il solco primitivo finisce col congiungersi col midollare. L'area del rilievo primitivo diventa il pavimento del seno romboidale (tav. I, fig. 11). Rimangono però ancora l'ingrossamento del labbro superiore del blastoporo e in esso certi rapporti strutturali che ora descriverò.

La fig. 7 della tav. III rappresenta una sezione frontale fatta in corrispondenza dell'*ingrossamento primitivo* (P) [1], prima della formazione dei cercini midollari. Essa essendo molto vicina al blastoporo, mostra già il solco primitivo (*sp*). L'ectoblasto è in continuazione diretta colle cellule dell'ingrossamento, e da questo partono due ali di mesoblasto (M*e*). L'ingrossamento presenta un solco poco profondo anche nella sua superficie interna.

La fig. 10 rappresenta una sezione corrispondente per luogo e direzione a quella testè descritta, ma in uno stadio un po' più avanzato. In essa il rilievo primitivo è ben manifesto, e le due ali di mesoblasto che partono dall'ingrossamento primitivo sono alquanto più estese in avanti.

È notevole come l'ingrossamento primitivo talvolta si ripieghi in dentro (come disegnano anche Scott e Osborn nel tritone), sicchè, in alcune sezioni trasverse, la sua parte più interna riesca tagliata e separata dal resto della piega (tav. II, fig. 11 P).

Le sezioni trasverse mostrano molto bene il solco mediano della superficie interna dell'ingrossamento. Questo solco si fa sempre più profondo, massime in vicinanza del blastoporo (tav. IV, fig. 2 *sp'*). In queste sezioni (tav. IV, fig. 2, fig. 4) si vedono anche molto bene il solco primitivo (*sp*), il rilievo primitivo (*rp*), le gobbe midollari e i rilievi midollari (*rm*). Le sezioni di queste serie, fatte più innanzi dell'ingrossamento primitivo, mostrano come il rilievo primitivo e il rispettivo solco si estendano per un certo tratto al davanti di quello (tav. IV, fig. 9, 4)

Nelle sezioni trasverse, come nelle frontali, si vedono le due ali di mesoblasto che partono dall'ingrossamento primitivo.

Nelle sezioni longitudinali si vede che dapprima lo strato dorsale protoplasmatico

[1] Così denomino per brevità l'ingrossamento del labbro superiore del blastoporo.

invaginato parte dall' ingrossamento primitivo (tav. IV, fig. 7); e, in uno stadio più avanzato, che l'entoblasto cordale e il mesoblasto dorsale sono in diretta continuazione coll'ingrossamento stesso (tav. IV, fig. 11, 12).

Come il solco primitivo si continua indietro col blastoporo, così l'ingrossamento primitivo si continua colle labbra laterali del blastoporo. Quando il tappo vitellino è invaginato, una sezione frontale condotta pel blastoporo non differisce da quelle che passano per l'ingrossamento primitivo che per la presenza della stretta fenditura cui è ridotto il blastoporo; e dalle labbra laterali di questo partono le due ali di mesoblasto.

Se le sezioni frontali sono dirette un po' obliquamente in basso, le due ali di mesoblasto terminano per lo più nettamente, senza passaggio graduato nella massa vitellina; se invece sono dirette un po' in alto mostrano questo passaggio. E dev'essere così: poichè in queste ultime la parte anteriore corrisponde al fondo della gavità gastrale dove appunto si mantiene, come ho detto più sopra, il passaggio graduato delle cellule protoplasmatiche nelle vitelline.

L'ingrossamento primitivo persiste anche allorchè si chiude il tubo midollare; e in allora torna a fare sporgenza in su e chiude in tal modo posteriormente il lume di questo. Perciò nell'axolotl, quando il canale midollare è formato, non si riscontra il canale neurenterico. La fig. 6 della tav. IV rappresenta una sezione longitudinale mediana di questo stadio. In essa si vede il residuo del blastoporo (*b l*) e la traccia della saldatura dei cercini midollari al disopra dell'ingrossamento primitivo.

L'ingrossamento primitivo finisce col prender parte alla formazione della coda dell'embrione.

Adunque il forte processo invaginante che nell'axolotl si inizia fin dai primi momenti della gastrulazione al davanti del blastoporo, negli stadî ulteriori si determina all'esterno colla formazione d'un rilievo solcato longitudinalmente e all'interno con un ingrossamento, i cui rapporti coi foglietti embrionali sono simili a quelli delle labbra laterali del blastoporo: e difatti questo ingrossamento può essere considerato semplicemente come il labbro superiore del blastoporo stesso. Questi rapporti sono pure simili a quelli della linea primitiva dei vertebrati allantoidei.

IV. *Dei foglietti embrionali.*

Nei primi stadî dello sviluppo, i foglietti embrionali sono formazioni che ad ogni momento acquistano nuovo significato. Fu forse per volerne conservare rigidamente l'individualità che si sollevarono contrasti, che un più adeguato concetto della natura delle cose ha di recente quasi eliminato. Epperò la loro distinzione non ha qui valore assoluto.

La genesi dei foglietti embrionali è già stata descritta nella storia della gastrulazione: qui conviene esaminarla un po' più particolarmente.

a) *Ectoblasto.* — Durante la gastrulazione, l'ectoblasto in divenire (E*c'*) diminuisce a grado a grado di spessore. Al termine di questa esso è ridotto a uno strato semplice di cellule (E*c*); però resta alquanto grosso in vicinanza dell'ingrossamento primitivo (tav. IV, fig. 11), nel quale si continua coll'entoblasto cordale e col mesoblasto.

Le cellule ectoblastiche sono prismatiche o piramidali, piccole, pigmentate, e contengono granulazioni finissime; nella regione ventrale soltanto esse sono basse, cubiche.

La prima modificazione che si nota nell'ectoblasto per la formazione dell'embrione è un ispessimento in corrispondenza dello scudo midollare e in particolar modo dei cercini midollari (tav. III, fig. 12; tav. IV, fig. 1, 11, 12). In queste regioni l'ectoblasto è allora formato di due o tre strati di cellule.

Allorchè il canale midollare è completamente chiuso, l'ectoblasto si è diviso in due strati: uno esterno (strato corneo) (tav. IV, fig. 8), l'altro interno (strato mucoso o nervoso). Questa divisione dell'ectoblasto avviene adunque nell'axolotl nello stadio corrispondente a quello in cui si compie nel tritone (Scott e Osborn); mentre negli anuri si ha fin dapprincipio.

Quanto ai rapporti genetici dell'ectoblasto cogli altri due strati, si può dire che esso ha comune l'origine con l'entoblasto cordale e col mesoblasto, e che quando è in divenire, cioè durante la gastrulazione, è da lui che prendono origine principalmente questi strati.

La genesi dell'entoblasto cordale e del mesoblasto dall'ectoblasto, o almeno dalle cellule dell'ingrossamento primitivo e delle labbra del blastoporo continua probabilmente, come vedremo, anche dopo il compimento della gastrula.

b) *Mesoblasto* ed *entoblasto cordale.* — L'entoblasto cordale, come ben osserva Hertwig, non può essere del tutto assimilato nè al mesoblasto, nè all'entoblasto.

Da principio il mesoblasto e l'entoblasto cordale sono posti in un germe unico; e fin presso il termine della gastrulazione non è possibile distinguerli l'uno dall'altro. Dipoi la lamina mediana invaginata è ridotta a un solo ordine di cellule piramidali e si distingue dal mesoblasto laterale: allora essa forma il vero entoblasto cordale. Sono però queste due formazioni così strettamente collegate nella loro genesi, che è impossibile parlarne separatamente; e anche nella loro successiva evoluzione è necessario considerarle insieme.

Il processo genetico di questi strati è già stato descritto ne' suoi punti principali: esso è principalmente un' espansione interna di cellule protoplasmatiche dalle labbra del blastoporo e dall'ingrossamento primitivo.

La fenditura (derivata dall'estendersi e approfondarsi del solco falciforme) che circoscrive il tappo vitellino separa questo dallo strato protoplasmatico che si ripiega indentro. Essa comunica superiormente colla cavità gastrale, ai lati e in basso però non si insinua nel mesoblasto per formare (come, secondo Hertwig, nel tritone) un primo accenno del celoma. Questa fenditura, nell'axolotl, s'interna poco, come mostrano le sezioni frontali (tav. III, fig. 8, 9 *c*); e separa la massa mesoblastica dalla vitellina.

Il mesoblasto, fin nello stadio che precede la completa formazione della gastrula, non presenta traccia di divisione in due foglietti: esso è formato di cellule nuotanti in un liquido e, nei preparati, rotonde.

Superiormente la detta fenditura divide l'ingrossamento primitivo dalla sottostante massa vitellina (tav. II, fig. 14; tav. IV, fig. 7), e in avanti comunica colla cavità gastrale. Le sezioni frontali mostrano come essa, anche qui, si estenda poco ai lati e non si insinui nella massa del mesoblasto (tav. III, fig. 7, 10).

Al termine della gastrulazione, essa si riduce ai lati a due strette cavità, le quali certamente non immettono nel mesoblasto, ma piuttosto nella massa vitellina (tav. III, fig. 11 *c*). In questo stadio il mesoblasto non ha per anco assunto forma epiteliale, e il celoma non è ancora 'posto.

Anche la parte inferiore della fenditura, benchè sia meno sviluppata, ha col mesoblasto gli stessi rapporti (tav. IV, fig. 7, 11).

Intorno al blastoporo, non si può dunque in alcun modo riconoscere l'origine del celoma da un' estroflessione della cavità gastrale, come ammette Hertwig nel tritone. Non nego però recisamente che nel tritone le cose avvengano come dice Hertwig; tuttavia, considerando la diversità dei rapporti nell'axolotl, mi pare di dover concludere che il luogo dove trovasi la suddetta fenditura, rispetto al mesoblasto, può facilmente spostarsi pel variabile rapporto delle cellule protoplasmatiche colle vitelline e per la loro ineguale penetrazione; sicchè le deduzioni morfologiche di Hertwig non abbiano un solido fondamento. Anche nelle osservazioni è facile illudersi: per esempio, nella fig. 8, della tav. III a destra, dove la invaginazione protoplasmatica è appena iniziata, al termine interno della fenditura trovansi cellule di passaggio fra le protoplasmatiche e le vitelline; e ciò può far credere che questa penetri nel mesoblasto. Questa apparenza dura poco e allora si vede con chiarezza come il vero mesoblasto sia tutto esternamente alla fenditura. Bisogna notare ancora, e ciò forse toglie alle osservazioni di Hertwig molto valore, che egli allora ammetteva una grande partecipazione della massa vitellina alla formazione del mesoblasto, cosa che ora nega, e perciò poteva considerare, nei primi stadî, come mesoblastiche molte cellule vitelline [1].

Importantissimo è lo studio del luogo dove avviene la separazione dell'entoblasto cordale dal mesoblasto, perchè qui pure Hertwig cerca un appoggio per la sua teoria del celoma.

La separazione della striscia mediana invaginata dallo strato protoplasmatico laterale (mesoblasto) avviene perchè le cellule del tratto mediano diventano prismatiche, allungate radialmente, mentre le laterali restano rotonde. Le figure 11, tav. II e 4, 5, 6, tav. III rappresentano sezioni di una serie trasversale in cui è già manifesta questa distinzione. La prima è una sezione delle più posteriori; e vi si vede il taglio dell'ingrossamento primitivo (P). L'entoblasto cordale (E*n c*) anche qui, cioè in prossimità del blastoporo, comincia già a delimitarsi, benchè non siavi fra esso e il mesoblasto una netta separazione. La sezione fig. 4, tav. III è fatta alquanto al davanti della prima: l'entoblasto cordale è distinto dal mesoblasto secondo un piano diretto dall'alto al basso e dall'interno all'esterno. Questa distinzione è dovuta a una specie di decrescimento dall'alto al basso delle cellule prismatiche dell'entoblasto, le quali, presso il limite col mesoblasto, diminuiscono di altezza, restando però colla base interna nella curva del tetto della cavità gastrale. Perciò il lembo esterno dell'entoblasto cordale non tocca l'ectoblasto, ma fra questo e quello s'interpongono alcune cellule rotonde del mesoblasto. In questa sezione il mesoblasto forma uno strato continuo anche nella regione ventrale. La sezione fig. 5, tav. III capita nella

(¹) Nel tritone, la mancanza di pigmento nelle cellule protoplasmatiche rende facile l'errore.

regione mediana dell'embrione, e in essa pure è posta, non però tanto nettamente, la distinzione fra entoblasto cordale e mesoblasto: questo s'arresta presso la regione ventrale (*). Infine la sezione fig. 6, tav. III capita in vicinanza del fondo della cavità gastrale; e in essa vedesi lo strato superiore invaginato più grosso e non bene differenziato come entoblasto cordale. In questa regione le cellule che formano il tetto della cavità gastrale passano insensibilmente nelle vitelline che ne formano il pavimento, e il mesoblasto è poco esteso ai lati.

Questa serie dimostra che l'entoblasto cordale tende a separarsi dal mesoblasto, mediante la formazione di una specie di fenditura diretta dall'alto al basso e dall'interno all'esterno.

È chiaro che la diversa distribuzione del mesoblasto in queste sezioni è una conseguenza del modo di penetrazione delle cellule protoplasmatiche che lo formano [1].

Allorchè si formano i rilievi midollari, l'individualità dell'entoblasto cordale si fa completa e i suoi lembi cominciano, dall'avanti all'indietro, a piegarsi in basso per formare una doccia (tav. III, fig. 12; tav. IV, fig. 9, 10). Così la primitiva distinzione di esso dal mesoblasto, si fa più manifesta; poichè, per l'incurvamento, la superficie superiore dell'entoblasto cordale viene a poggiare ai lati, contro le caratteristiche cellule rotondeggianti delle lamine mesoblastiche.

La separazione fra l'entoblasto cordale e il mesoblasto in questo stadio è quella stessa fenditura già iniziata nello stadio anteriore, che qui ha acquistato maggiore sviluppo per l'incurvamento dei lembi di quello strato.

Da tutto ciò risulta chiaro che dapprima l'entoblasto cordale si continua con *tutto* il mesoblasto. Dipoi, per la direzione della fenditura di separazione e perchè le cellule entoblastiche decrescono dalla loro parte superiore, può tutt' al più vedersi una continuazione dell' entoblasto cordale colle cellule mesoblastiche più interne. Ed anzi, poichè in questo stadio comincia un accenno di separazione del mesoblasto in due lamine, diremo che l'entoblasto cordale è meno disgiunto dal foglietto splancnico che dal foglietto somatico. Nelle serie cui appartengono le sezioni trasverse fig. 12, tav. III; fig. 10, tav. IV, il mesoblasto è già diviso ne' suoi due strati secondarî, ma ogni continuazione fra esso e l'entoblasto cordale è abolita.

Altrimenti avverrebbe, secondo Hertwig, nel tritone. Hertwig rappresenta le cellule dell'entoblasto cordale decrescenti ai lembi, ma continuantisi col foglietto esterno del mesoblasto: la prima fenditura di separazione dei due strati sarebbe diretta dal basso all'alto e dall'interno all'esterno e immetterebbe nella fenditura pleuroperitoneale. Essa dovrebbe rappresentare la comunicazione dei due diverticoli del celoma colla cavità enterica. Nella fig. 2, tav. XIV di Hertwig [2] parmi però che l'estrema cellula sinistra dell'entoblasto cordale indichi una decrescenza in basso, verso il foglietto splancnico.

Secondo Hertwig, allorchè l'entoblasto cordale s' è formato a mo' di doccia, la fenditura che ai lati lo separa dal mesoblasto sarebbe prodotta da un ripiegamento dell'unico strato formato dall'entoblasto stesso e dal foglietto mesoblastico somatico

[1] Secondo Scott e Osborn (l. c.), nel tritone, il mesoblasto ventrale si porrebbe dall'avanti all'indietro, al contrario di ciò che si verifica nell'axolotl.

[2] O. Hertwig, l. c. I Theil.

con cui direttamente si continua. D'altra parte, il foglietto splancnico si continuerebbe coll'entoblasto intestinale.

Non dubito dell'esattezza delle osservazioni e delle figure di Hertwig. Però è certo che nell'axolotl non si riscontrano questi rapporti; e quindi, in questo antibio, non si può trovare un argomento in favore della teoria del celoma. Noterò ancora che osservando le sezioni trasverse è facile credere di vedere continuazioni e comunicazioni rudimentali che in fatto non esistono. Per esempio, nella mia sezione fig. 12, tav. III, a sinistra, si può, se si vuole, vedere una continuazione fra l'entoblasto cordale e il foglietto somatico, per mezzo delle cellule mesoblastiche adiacenti all'entoblasto. Però lo studio della genesi di questa forma ci dimostra che tale apparenza è del tutto accidentale, come sarebbero gli allineamenti di palle riunite in un piano.

La fig. 3, tav. IV rappresenta una sezione trasversa posteriore d'un embrione ancor più avanzato; e qui la distinzione fra l'entoblasto cordale e il mesoblasto è così chiara e netta che non si può nemmeno sospettare una continuità qualsiasi: l'entoblasto cordale confina nel punto * coll'entoblasto vitellino, il quale certamente non si continua col foglietto splancnico del mesoblasto.

Anche nella rana, benchè i rapporti vi siano più complicati, Hertwig [1] cerca di giustificare la sua teoria. Nella rana la separazione dell'entoblasto cordale dal mesoblasto, anche stando alla descrizione di Hertwig, è una vera fenditura. Le ali dell'entoblasto cordale rimangono a formare il tetto della cavità intestinale. La fenditura si prolunga fino al limite esterno dell'entoblasto e qui s'arresta; e poichè qui pure cessa la separazione fra l'entoblasto vitellino e il mesoblasto, questi tre strati sono, in questo luogo, in continuazione fra loro. In questo punto, segnato da Hertwig con un asterisco, si forma, nella volta della cavità enterica, un solco longitudinale che egli indica come un rudimento di comunicazione col celoma. Mi sembra però che questo fatto si possa interpretare in modo più semplice. Difatti, qui s'arresta l'entoblasto vitellino che, col suo canto interno, fa sporgenza nella cavità intestinale; e ciò perchè esso è uno strato che poggia internamente sulla superficie dell'unico strato protoplasmatico invaginato (entoblasto primitivo di Calberla): il solco è così spiegato; e tanto meglio se si considera che i diversi strati che in esso confinano sono animati da movimenti diversi e di diversa intensità. In simil guisa credo si possa spiegare la continuazione del suddetto solco nella regione del blastoporo, dov' esso sembra propriamente insinuarsi nel mesoblasto. Comparando fra loro le fig. 6, 7, 8 e 12 della tav. XVI di Hertwig si capisce come il solco profondo in quest'ultima figura sia dovuto al forte processo di internamento delle cellule protoplasmatiche, che nel punto * ha il suo limite rispetto alla superficie interna della cavità intestinale. Se nella mia fig. 11, tav. III si considera la massa vitellina ridotta a un solo strato periferico (com' è nella rana) si hanno rapporti quasi simili a quelli della figura testè citata di Hertwig.

Parmi che questa spiegazione che si ricava dal processo meccanico dello sviluppo nella rana, sia molto più accettabile di un' ipotetica spiegazione poggiante su di un principio esso pure ipotetico. Epperciò credo che il rapporto del solco suddetto col celoma sia illusorio.

[1] O. Hertwig, l. c. II Theil.

Allorchè si comincia a formare la cavità pleuro-peritoneale, le cellule mesoblastiche diventano di mano in mano più stipate e i due strati del mesoblasto assumono la vera forma epiteliale.

Dapprima dunque il mesoblasto per le sue cellule nuotanti e forse ameboidi somiglia a un germe mesenchimoide; poi esso assume la forma schiettamente epiteliale: il celoma dell'axolotl è piuttosto, per l'origine, di tipo schizocele che di tipo enterocele.

Il processo che pone il mesoblasto durante la gastrulazione continua forse anche dopo; non sappiamo però a qual grado. E la regione donde emana l'espansione mesoblastogenica è sempre il contorno del blastoporo e l'ingrossamento primitivo. Questa regione conserva a lungo i caratteri primitivi; mentre il differenziamento dell'embrione procede principalmente dall'avanti all'indietro. E poichè lo sviluppo massimo si ha nella regione dorsale, il minimo invece nella regione ventrale, il blastoporo si porta sempre più lontano dalla regione cefalica dell'embrione che s'incurva in alto, e finisce col diventare ventrale. Ciò si vede bene nella sezione longitudinale fig. 6 tav. IV.

Per altro, il mesoblasto, una volta posto, può accrescersi e si accresce difatto per moltiplicazione delle proprie cellule. E non di rado mi è occorso di vedere in esse delle splendide figure cariocinetiche.

Fin qui, per non intralciare la descrizione, ho detto, senza restrizione, che le cellule mesoblastiche sono protoplasmatiche o quasi e invaginate; ora osservo che non tutte lo sono. Molte cellule del mesoblasto ventrale, meno le più posteriori, hanno i caratteri delle vitelline, sono cioè affatto prive di pigmento e contengono grosse granulazioni; e si distinguono dalle vitelline prossime soltanto perchè sono più piccole e perchè appartengono a uno strato ormai ben definito. Anzi in alcuni casi, si vedono queste cellule mesoblastiche d'origine vitellina ancora incastonate fra quelle della massa vitellina; si dimostra così la loro formazione *in sito*.

Scott e Osborn, nel tritone, hanno dato molta importanza a questo modo di formazione in sito di cellule mesoblastiche. Nell'axolotl certamente esso ne ha poca; nel tritone io credo che Scott e Osborn abbiano esagerato, ma non escludo affatto, come fa Hertwig, ogni possibilità di formazione in posto di cellule mesoblastiche: la fig. 4, S H di Scott e Osborn assomiglia a molte sezioni che ho ottenuto nell'axolotl, e dimostra a sufficienza questo modo d'origine.

La doccia formata dall'entoblasto cordale si chiude, cominciando dalla parte anteriore, e forma così la corda dorsale (tav. IV, fig. 5 C*h*). Qualche cellula esterna dell'entoblasto cordale resta però sotto la corda a formar parte dell'entoblasto intestinale. Ciò si può osservare nelle serie in cui la corda è del tutto costituita. Abbiamo così un passaggio al tipo degli anuri, in cui un tratto laterale di entoblasto cordale resta a formare parte del tetto della cavità intestinale.

Queste cellule protoplasmatiche che restano sotto la corda sono forse il germe del funicolo sottocordale.

c) *Entoblasto.* — La massa di cellule vitelline è il vero entoblasto (entoblasto intestinale). Essa viene lentamente invaginata, nel tempo stesso che le cellule protoplasmatiche rapidamente s'internano; e da questa disuguaglianza di movimento risulta la particolare gastrula degli anfibî. Già ho detto come per effetto del movimento diverso nell'interno si perda, meno in alcuni punti, il passaggio graduato che nella blastula esisteva fra cellule protoplasmatiche e vitelline.

La cavità gastrale si estende sempre più in avanti. Essa dapprincipio è molto larga; e portandosi in avanti rimane larga alquanto nel fondo, mentre la parte posteriore si restringe. Le cellule vitelline tappezzano il pavimento e le pareti laterali della cavità gastrale e si arrestano dove l'entoblasto cordale confina col mesoblasto. Esse seguono l'incurvamento della doccia cordale, portandosi così sempre più verso la linea mediana, per rivestire completamente la volta della cavità gastrale.

A mano a mano che la corda si forma, i due lembi di entoblasto vitellino si riuniscono lungo la linea mediana, includendo qua e là alcune cellule di entoblasto cordale. Questo processo si fa di pari passo colla formazione della corda, cioè dall'avanti all'indietro.

La massa vitellina, la quale dà pure origine ad alcune cellule mesoblastiche, diventa in tal modo il vero entoblasto; e serve non solo al nutrimento dell'embrione, ma ancora a formare l'epitelio intestinale e degli organi che derivano dal primitivo intestino.

V. *Riassunto e considerazioni.*

Nell'axolotl, come negli altri anfibî, si ha una gastrulazione ineguale e complicata. La parte più attiva della blastula, cioè l'emisfero protoplasmatico, è quella che più rapidamente s'invagina, per formare la massima parte del mesoblasto e l'entoblasto cordale.

Nell'axolotl, è di grande importanza il movimento di penetrazione diretta di cellule protoplasmatiche, che si compie per un certo tratto al davanti dell'orlo superiore del blastoporo, aggiungendo i suoi effetti al semplice ripiegamento dello strato protoplasmatico nell'interno. Questa penetrazione dura fino al termine della gastrulazione, ed anche dopo, e si manifesta con un ingrossamento del labbro superiore del blastoporo e, all'esterno, colla formazione del rilievo primitivo solcato longitudinalmente.

I rapporti genetici e morfologici di queste formazioni le fanno paragonare già alla linea primitiva e al solco primitivo degli uccelli e dei mammiferi. Il blastoporo, ridotto a fessura lineare al termine della gastrulazione, forma il prolungamento posteriore del solco primitivo; e le sue labbra si continuano col rilievo primitivo.

Il modo di formazione del mesoblasto è esso pure di importanza generale. Le cellule generatrici di mesoblasto sono dapprima mobili in un liquido interstiziale; sicchè dapprima il mesoblasto si avvicini alla forma di germe di mesenchima. Verso il termine della gastrulazione le cellule mesoblastiche diventano stipate e si dispongono in due strati fra i quali si forma la cavità generale del corpo, quasi come un vero schizoceloma.

Nell'axolotl, inoltre, non esiste traccia di comunicazione fra la cavità gastrale e il celoma; e perciò non si può supporre la derivazione di questo da due estroflessioni di quella.

Certamente nell'axolotl non si ha un tipico *pseudocele*, nel senso dei fratelli Hertwig; poichè il germe del mesoblasto non è formato di cellule ameboidi migranti in una sostanza *gelatinosa* di secrezione (secondo la definizione dei fratelli Hertwig), e perchè il celoma si forma ben presto intero e il mesoblasto diventa tosto un vero mesoderma: molto meno però si ha un vero *enterocele*.

Io credo che ciò, in grado minore o maggiore, valga anche per gli altri anfibî, nonostante gli sforzi fatti da O. Hertwig per farli rientrare nel suo schema. Epperò non solo i vertebrati superiori, ma anche gli anfibî, e fors' anche gli altri vertebrati inferiori a gastrulazione ineguale, non possono rientrare nell'ingegnoso concetto dei fratelli Hertwig.

Morfologicamente si può derivare il modo di formazione del mesoblasto e del celoma nell'axolotl da quello di un tipico enterocele, qual' è l'Amphioxus, facendo intervenire nel processo di gastrulazione di quest' ultimo due nuovi elementi: la disuguaglianza delle cellule (protoplasmatiche e vitelline) e l'accelerazione nella formazione del mesoblasto. E a questa considerazione si può dare anche un valore filogenetico. Ciò non toglie però che la nuova forma sia molto diversa da quella da cui deriva e s' accosti molto al tipo pseudocele.

Aggiunta. — Questo lavoro era già scritto allorchè venne a mia conoscenza la comunicazione di Gasser [1] intorno allo sviluppo dell'*Alytes obstreticans.* Oltre alcuni fatti di molta importanza comparativa per la formazione della gastrula ineguale, Gasser descrive un ingrossamento anteriore ed uno posteriore delle labbra del blastoporo, *e li considera come equivalenti alla linea primitiva.*

PARTE II.

La linea primitiva degli uccelli.

(Pollo, colombo, anitra).

Lo scopo che mi sono prefisso nello studio del primo sviluppo degli uccelli è: 1° la precisa determinazione della linea primitiva e della falce (Sichel), del solco primitivo e del solco della falce (Sichelrinne), in rapporto alla formazione dell'embrione; 2° la determinazione del luogo dove si formano i fori che attraversano il blastoderma, in rapporto alle suddette formazioni e all' embrione. E ciò per riconoscere colla massima approssimazione fin a qual punto la linea primitiva corrisponda esattamente al blastoporo dei vertebrati inferiori e in particolar modo degli anfibî.

Il materiale d' osservazione che finora ho potuto avere non è certo molto abbondante: esso è però sufficiente al mio scopo: e se non altro per discutere i fatti e le idee da altri esposti sullo stesso argomento. Ho esaminato oltre 60 blastodermi interi di pollo, per trasparenza e per incidenza, i quali presentavano i diversi stadî dalla linea primitiva breve e non solcata fino all' embrione con 12 protovertebre; ho osservato anche 6 embrioni di colombo, due dei quali nello stadio della prima apparizione dei rilievi midollari e gli altri negli stadî di 14, 16, 20 protovertebre, e infine 15 embrioni di anitra comune negli stadî: della giovane linea primitiva, linea primitiva e solco midollare e di 4, 9, 13, 14, 17, 20 protovertebre.

Dei blastodermi di pollo posseggo 21 serie microtomiche, 4 serie di colombo e 8 di anitra, con un totale di circa seimila sezioni.

[1] Gasser, *Zur Entwickel. von Alytes obstetricans*, Sitzgsbr. d. Marburg. naturf. Gesellschaft, 7 Oct. 1882.

Metodo di preparazione. — Scopro il blastoderma, levando poco guscio e facendo in modo che intorno a quello l'albume si retragga per poco. Poi con una pipetta e usando grande diligenza depongò presso la periferia del blastoderma una goccia di acido osmico $^1/_{100}$, sicchè questa si espanda a poco a poco, senza produrre guasti, sul blastoderma stesso. Dopo pochi minuti il blastoderma è fissato; lo isolo allora sott'acqua. La membrana vitellina si stacca da sè, anche nei più giovani stadî. Metto poscia il blastoderma isolato di nuovo in acido osmico, per pochi istanti, poi lo passo nel liquido di Müller allungato con acqua; e dopo alcune ore di permanenza in questa soluzione e alcuni lavaggi, lo passo definitivamente nel liquido di Müller normale. Dopo pochi giorni si possono fare le sezioni.

Alcune volte ho adoperato, invece dell'acido osmico, l'acido picrico-solforico di Kleinenberg, nello stesso modo, passando poi, ben inteso, i blàstodermi in alcool.

Ho isolato anche alcuni blastodermi direttamente nell'acqua salata e tiepida per fissarli tosto dopo con acido osmico o picrico-solforico, e ho fatto questo per vedere le alterazioni che, con questo metodo, subiscono.

Le mie serie microtomiche sono tutte eseguite col metodo indicato nella prima parte di questo lavoro.

I. *Falce e linea primitiva.*

Le ricerche di Koller (¹) hanno fatto conoscere quella singolare formazione del bordo dell'area pellucida, che precede talvolta l'apparizione della linea primitiva e che, per la sua forma, si denomina la *falce* (Sichel).

Comunque siavi ancora divergenza di opinioni intorno alla parte che prendono i due strati primitivi nella formazione della falce (Koller, Gerlach (²), Balfour (³), Wolff (⁴), Gasser (⁵)), egli è stabilito che in essa s'inizia il processo mesoblastogenico, e s'inizia, in parte almeno per proliferazione ectoblastica, la quale estendendosi rapidamente in avanti forma la così detta linea primitiva.

Koller ha descritto nella falce un solco trasverso (Sichelrinne), il quale segnerebbe il luogo donde germoglia in avanti la vera linea primitiva.

Allorchè la linea primitiva si estende in avanti, la falce tende a scomparire e si riduce ad un rudimentale allargamento posteriore della linea primitiva stessa. Secondo Koller scomparirebbe pure il solco della falce, e indipendentemente da esso si formerebbe il solco primitivo. Secondo Kuppfer (⁶), nel passero, la falce persistente e portata su nell'area pellucida formerebbe colla linea primitiva sviluppata un solo

(¹) Koller, *Untersuchungen über die Blätterbildung im Hühnerkeim.* Archiv für mikr. Anatomie Bd. XX. 1881.

(²) L. Gerlach, *Die Entstehungsweise der Doppelmissbildungen* etc. Stuttgart, 1882.

(³) Balfour and Deighton, *A renewed study of the germinal layers of the chick.* Quarterly journal of microscopical science. 1882.

(⁴) Gasser, *Beiträge zur Kenntniss der Vogelkeimscheibe.* Archiv für Anatomie und Physiologie. Anat. Abth. 1882.

(⁵) Wolff, *Ueber die Keimblätter des Huhnes.* Archiv f. mikr. Anatomie, Bd. XXI. 1882.

(⁶) Kuppfer, *Die Gastrulation an dem meroblastichen Eiern der Wirbelthiere und die Bedeutung des Primitivstreifs.* Archiv für Anat u. Phys.-Anat. Abth. 1882.

sistema e, quel che più importa, il solco della falce non sarebbe altro che un'appendice posteriore del solco primitivo. Così anche nel pollo di cocincina, nel quale il solco primitivo sarebbe fin dapprincipio incrociato con quello della falce. Gasser invece nega questo rapporto dei due solchi.

Nei miei più giovani blastodermi di pollo comune (¹) la linea primitiva era già alquanto sviluppata, e la falce appariva come un allargamento posteriore di essa, similmente a quello che hanno figurato Balfour e Deighton. In essi non vidi traccia di solco della falce. In uno stadio un po' più avanzato (tav. V, fig. 1) vedevasi ancora un residuo della falce (*f*); il solco primitivo era appena manifesto e la sua profondità decresceva dall'avanti all'indietro: nessuna traccia di solco della falce. Questi blastodermi furono isolati dopo la fissazione coll'acido osmico. Alcuni blastodermi, nello stadio di formazione del processo cefalico (tav. V, fig. 3, 4), isolati direttamente nell'acqua salata e tiepida, poi trattati coll'acido osmico, mostravano nella parte posteriore dell'area pellucida, due rilievi laterali (*r*) di forma irregolare, i quali, veduti per trasparenza, apparivano molto opachi. Posteriormente questi rilievi erano limitati da una piega (*p*) incrociata col solco primitivo; e dietro questa piega restava una porzione terminale dell'area pellucida corrispondente al luogo della falce.

L'opacità in corrispondenza dei detti rilievi è dovuta, come mostrano le sezioni, a un ispessimento del mesoblasto (tav. VI, fig. 4, *me'*), e in alcuni casi anche dell'entoblasto. Talvolta, in questa regione, per trasparenza si vedono soltanto due linee curve fortemente opache (tav. V, fig. 5 *x*).

I rilievi e le pieghe non si trovano però ben manifesti nei blastodermi isolati dopo essere stati fissati coll'acido osmico. Soltanto in un blastoderma, così isolato, vedevasi al davanti del residuo della falce (fig. 6 *f'*) la traccia poco sicura d'un solco trasverso (*s*). Però in un blastoderma di pollo di cocincina, quasi nello stesso stadio e isolato nello stesso modo (fig. 15), vedevasi nella corrispondente regione la traccia ben manifesta d'un solco trasverso incrociato col primitivo. Mentre in alcuni blastodermi di pollo comune isolati direttamente in acqua il solco trasverso era molto evidente e ben diverso dalle grinze che facilmente produconsi con questo metodo d'isolamento.

Perciò parmi si possa ammettere che nello stadio del processo cefalico esiste talvolta al davanti del residuo della falce una traccia d'un solco trasverso, il quale si fa evidentissimo quando l'embrione è isolato nell'acqua salata e tiepida, la quale determina una leggera contrazione nel blastoderma. E al davanti di questo solco trovansi spesso, ai lati dell'area pellucida, due aree irregolari in cui il mesoblasto e l'entoblasto sono ispessiti; le quali per effetto del raggrinzamento indotto dall'acqua si sollevano alquanto sulla superficie del blastoderma.

Però per stabilir colla massima precisione questi fatti occorrono più numerose osservazioni e con altri metodi, poichè la stessa azione dell'acido osmico può modificare e appianare la superficie del blastoderma.

Del resto anche il contorno dell'area pellucida è nella regione posteriore di questa assai irregolare e tende a delimitarne un segmento posteriore (tav. V, fig. 3, 4, 5, 6, 15, 19).

(¹) Sviluppati sempre per incubazione naturale.

Notevole è il caso rappresentato nella fig. 2 dove nella regione posteriore sono come appiccicate all'area pellucida due porzioni rotonde trasparenti.

La traccia di solco trasverso che ho notato rappresenta essa un residuo del vero solco della falce ? Per rispondere a questa domanda mi manca assolutamente la continuità dell' osservazione. E credo anche che le osservazioni di Kuppfer siano insufficienti.

Secondo Gerlach [1], la biforcazione che talvolta presenta il solco primitivo nella sua estremità posteriore, anche in stadî più avanzati e che si vede nelle mie fig. 14 e 18, tav. V sarebbe un residuo del solco della falce. Anche questo però sembrami non bastantemente provato.

Fin dalla formazione del processo cefalico, nei blastodermi trattati con acido osmico e osservati per trasparenza, si possono distinguere nella linea primitiva tre parti, che si conservano anche negli stadî successivi: una anteriore più opaca, cioè più spessa (tav. V, fig. 6, 7, 8, 9, 13, 19 *l'*), in cui termina il solco primitivo formando una fossetta profonda; una media ancora opaca (*l''*), separata dalla prima per mezzo d' un tratto più trasparente; e una posteriore trasparente (*l'''*): in quest' ultima, che può molto variare di lunghezza, trovasi per lo più il residuo della falce (*f'*). L'estremo posteriore della parte mediana ispessita corrisponde al limite posteriore dello scudo midollare; e in esso si sfumano dipoi i due rilievi midollari.

Mesoblasto e corda. — La quistione della genesi del mesoblasto, dopo le ricerche classiche di Kölliker [2] e le nuove di Gerlach [3], Gasser [4], Balfour e Deighton [5], rimane tuttavia indecisa. Egli è che in certi casi lo studio delle sezioni ben difficilmente può darci un' idea esatta del processo dinamico dello sviluppo; poichè una data forma è suscettibile di opposte interpretazioni. Difficilissima quistione è cotesta, e se qui cito alcune mie osservazioni, è solo perchè credo che esse possano essere un tenue contributo alla sua risoluzione.

Sulla prima formazione della linea primitiva e sulla possibile partecipazione dell' entoblasto ad essa non ho fatto ricerche. È stabilito già con certezza che se l' entoblasto primitivo e le cellule residue dello scudo embrionale prendono qualche parte in questa formazione, pure essa è dovuta principalmente a proliferazione ectoblastica. Mi sono occupato soltanto della genesi del mesoblasto laterale e del processo cefalico.

Ha una certa importanza una serie trasversa (ac. picrico-solforico; grossezza delle sezioni: mm. 0,015) d' un blastoderma di pollo comune nello stadio che precede immediatamente la formazione del processo cefalico. Nella fig. 1, tav. VI è rappresentata una sezione di questa serie, fatta innanzi al termine anteriore della linea primitiva: nella parte media si vede l' entoblasto nettamente formato di un solo

[1] Gerlach, l. c.

[2] Kölliker, *Entwicklungsgeschichte.*

[3] L. Gerlach, *Ueber die entodermale Entstehungsweise der Chorda dorsalis.* Biologisches Centralblatt. Bd. I, n. 1.

[4] Gasser, l. c. Lo stesso, *Der Primitivstreifen bei Vogelembryonen.* Cassel, 1879.

[5] Balfour and Deighton, l. c.

strato di cellule piatte (in sezione fusiformi); ai lati invece l'entoblasto è ingrossato irregolarmente e formato di cellule rotonde o poliedriche e molto granulose. Questa apparenza si ha per 12 sezioni al davanti della linea primitiva; poi tutto l'entoblasto è formato di cellule rotonde o cubiche e granulose, fino al bordo anteriore dell'area pellucida, cioè per circa 20 sezioni. La fig. 2 della stessa serie mostra come dalla linea primitiva non partano ancora le ali laterali di mesoblasto e come l'entoblasto sia ben costituito da un solo strato semplice di cellule piatte, tanto sotto la linea primitiva, quanto per un certo tratto ai lati di essa. Invece verso i bordi laterali l'entoblasto è ispessito e formato delle solite cellule granulose.

Questa serie dimostra che in quel blastoderma l'entoblasto al davanti e ai lati della linea primitiva era formato da uno strato semplice di cellule molto piatte: solo presso la periferia dell'area pellucida esso era ingrossato e formato di cellule rotonde o cubiche e granulose. Può darsi che questo caso sia un po'anormale, poichè la formazione del mesoblasto è certamente ritardata. Tuttavia è molto probabile che il mesoblasto e il processo cefalico avrebbero tardato poco a svilupparsi. Ora l'entoblasto ai lati e al davanti della linea primitiva non mostrava nessuna tendenza a proliferare. Perciò bisogna ammettere che non da esso, ma dalla linea primitiva, che ha tutta l'apparenza d'un blastema proliferante, quelle formazioni sarebbero derivate: solo verso il bordo dell'area pellucida esse potevano provenire dalle cellule entoblastiche primitive, che in questa regione sono qua e là accumulate irregolarmente.

Le sezioni fig. 5 e 6, tav. VI appartengono a una serie un po'obliqua del blastoderma rappresentato nella fig. 1, tav. V; e capitano: la prima nel termine anteriore del processo cefalico, la seconda nel termine posteriore di esso (ac. osmico; grossezza delle sezioni: mm. 0, 01). Il processo cefalico comprende 9 sezioni. Come si vede nella fig. 6 le sue cellule sono di forma irregolare, ma non hanno prolungamenti sottili e anastomizzati: esse sono come nuotanti in un liquido e forse ameboidi. L'entoblasto nella parte media è abbastanza bene distinto come uno strato semplice di cellule piatte (*ce*); e solo alcune delle cellule entoblastiche (*ce'*) non si distinguono per la forma nè per altri caratteri dalle soprastanti del processo cefalico. Ai lati l'entoblasto è formato delle solite cellule primitive. Anche nella sezione fig. 5 esso è, nella parte mediana, formato di cellule piatte.

Sotto le linea primitiva e ai lati di essa l'entoblasto è pure abbastanza bene distinto dalle soprastanti cellule.

La fig. 3 rappresenta una sezione trasversa del processo cefalico del blastoderma rappresentato nella fig. 4, tav. V (ac. osmico, grossezza delle sezioni mm. 0,01). L'entoblasto mediano è anche qui abbastanza nettamente distinto dalle cellule del processo cefalico; ed è formato di cellule molto piatte, sicchè talvolta, nei tagli sottili, per certi tratti non se ne incontrino i nuclei. Le cellule del processo cefalico sono anche qui di forma irregolare e nuotanti in un liquido. Alcune cellule (*c'*), per forma simili a queste, sono come appiccicate alla membrana formata dalla riunione dei corpi piatti delle cellule entoblastiche; e posson dar l'idea di cellule che siano sul punto di staccarsi dall'entoblasto per formar parte del processo

cefalico. Ma non è forse più naturale ammettere che siano cellule venute ad aderire all' entoblasto membraniforme? Anche alcune cellule decisamente incastonate nell'entoblasto (*c e'*) hanno forma e caratteri delle cellule del processo cefalico.

La fig. 7, tav. VI rappresenta una sezione longitudinale mediana d' un embrione in uno stadio com' è quello della fig. 3, tav. V. Non si vede la distinzione netta che secondo Gerlach sarebbevi fra la linea primitiva e il processo cefalico. Sotto di questo, per un certo tratto al davanti della linea primitiva, l'entoblasto è ancora ben distinto e formato di cellule piatte; più in avanti le cellule entoblastiche acquistano a poco a poco la forma di quelle del processo cefalico, colle quali sono intimamente unite; più avanti ancora, cioè anteriormente al processo cefalico, l'entoblasto risulta formato delle solite cellule primitive granulose.

Molto interessante è la serie trasversa (ac. osmico; gross. mm. 0,01) del blastoderma di pollo-cocincina indicato nella fig. 15, tav. V. Nella fig. 8, tav. VI è rappresentata la 3ª sezione al davanti della linea primitiva. L'entoblasto è ben distinto e formato di cellule piatte, tanto sotto il processo cefalico, quanto sotto il mesoblasto laterale. Nella fig. 11 è rappresentata la 8ª sezione al davanti della linea primitiva: le piatte cellule entoblastiche (che contengono anche molte goccioline adipose) sono qua e là separate da cellule (*c e'*) aventi i caratteri delle soprastanti cellule del processo cefalico. La fig. 10 è una piccola porzione laterale di questa sezione: si vede una cellula incastonata nell' entoblasto (*c e'*), che ha un prolungamento diretto in alto, dal quale parte un ramo che sembra terminare in una cellula sovrapposta all' entoblasto. Queste apparenze continuano ancora per 9 sezioni al davanti della linea primitiva, dove il processo cefalico comincia a sfumarsi: le cellule entoblastiche si fanno di mano in mano meno piatte e meno distinte da quelle che loro stan sopra. Si hanno poi altre 25 sezioni attraverso l'area pellucida. Sotto tutta la linea primitiva e ai lati di essa l' entoblasto è, in questa serie, molto bene distinto e formato delle caratteristiche cellule piatte. È notevole che poche cellule del mesoblasto o del processo cefalico hanno i prolungamenti descritti da Balfour. È probabile che questi siano, come sospetta Hertwig [1], opera dei reagenti.

In alcune serie però si vedono bene, tanto nel processo cefalico, quanto nel mesoblasto laterale, numerose cellule stellate. Ma dato anche che questa forma preesistesse, non mi sembra che essa indichi la origine entoblastica di quelle cellule, ma possa dipendere piuttosto dall' essere esse fra loro discoste, ciò che rende possibile l' emissione di lunghi prolungamenti. E così possono i prolungamenti che pure mostrano le cellule entoblastiche essere semplicemente il risultato di movimenti ameboidi nella parte libera di queste cellule. Quanto all'apparente connessione di tali prolungamenti, essa è troppo incerta per essere considerata come indizio della comune origine delle cellule.

Mi sembra dunque che il processo cefalico e il mesoblasto che si forma ai lati di esso derivino, almeno in gran parte, dalla linea primitiva. Le cellule che talvolta si vedono appiccicate all' entoblasto è probabile che siano cellule migranti semplicemente aderenti ad esso.

(1) O. Hertwig, l. c. II Theil.

Vi sono però cellule con tutti i caratteri di quelle del processo cefalico, le quali stanno qua e là incastonate fra le piatte cellule entoblastiche. Sono esse cellule migrate in avanti dalla linea primitiva e insinuatesi fra le preesistenti entoblastiche; ovvero sono cellule dell' entoblasto preesistente che stanno a mostrarci una connessione genetica del processo cefalico con questo strato? La prima ipotesi mi sembra probabile per tre ragioni: 1ª perchè le serie che ho citato non mostrano indizî di proliferazione entoblastica per la formazione del germe del processo cefalico; 2ª perchè, per la rapida estensione in avanti dell'area pellucida, la superficie dell'entoblasto a cellule piatte aumenta e il contorno ispessito di esso si porta sempre più lontano dalla regione del processo cefalico; 3ª perchè infine la proliferazione fortissima che certamente si compie nella linea primitiva basta a spiegarci la formazione del processo cefalico e del mesoblasto.

Questa ipotesi è resa più probabile dal fatto che nei rettili, secondo Strahl [1], le cellule invaginate che debbono formare la corda non hanno sotto di loro cellule dell' entoblasto primitivo. Anche nell'anitra, le cellule che formano il fondo e l'orlo della fossetta in cui s'apre inferiormente il canale neurenterico hanno tutti i caratteri delle cellule della corda e della linea primitiva, colle quali sono intimamente unite. Esse rappresentano, in parte, vero entoblasto cordale: il vero entoblasto intestinale è ben distinto in tutto il resto del blastoderma.

Si può tuttavia anche ammettere che, negli uccelli, l'entoblasto primitivo partecipi alla formazione del processo cefalico. Ma sembrami che una partecipazione, forse maggiore, della linea primitiva a questa formazione non si possa in alcun modo negare.

Il processo cefalico si fonde anteriormente colle cellule grossolane dell'entoblasto primitivo, nello stesso modo che nell' axolotl l' entoblasto cordale passa nelle cellule vitelline.

Quanto al mesoblasto laterale della regione della linea primitiva, mi sembra potersi ammettere che soltanto verso la periferia dell'area pellucida esso abbia origine o dall' entoblasto primitivo o da indifferenti cellule di segmentazione. Questa origine ha pure, molto probabilmente, il mesoblasto delle due aree posteriori (*r*); poichè esso si continua direttamente con quello dell'area opoca (tav. VI, fig. 4), ed è invece separato dalla linea primitiva per mezzo d'un tratto di rade cellule mesoblastiche.

II. *La linea primitiva e l' accrescimento dell' embrione.*

La linea primitiva è dunque il luogo donde, per proliferazione ectoblastica, emana una gran parte almeno del mesoblasto embrionale e, molto probabilmente, del processo cefalico.

Per quanto tempo continua la funzione della linea primitiva; e che cosa avviene di questa allorchè l'embrione si sviluppa? Sono questi due quesiti la cui risoluzione è necessaria per comprendere il significato comparativo della linea primitiva. E la risoluzione fu già data, io credo, principalmente da Kölliker. Tuttavia

[1] Strahl, *Beiträge zur Entwick. v. Lacerta agilis.* Archiv f. Anat. u. Phys. 1882. — Lo stesso, *Beiträge zur Entwick. der Reptilien.* Ib. 1883.

una discussione intorno ad essi è opportuna, poichè embriologi illustri, come Balfour, tendono a considerare la linea primitiva come un rudimento che per poco o per nulla prende parte alla formazione dell'embrione.

Il termine anteriore della linea primitiva corrisponde al luogo dove si forma la prima fenditura protovertebrale (tav. V, fig. 7). Lo scudo midollare e i rilievi midollari terminano nell'estremo posteriore del tratto medio ispessito della linea primitiva (fig. 7, 8, 13, 14, 19). Ecco già un rapporto fra questa e il tronco dell'embrione. Ma questi punti rapidamente si spostano; poichè la linea primitiva s'accorcia. Come punto relativamente fisso possiamo considerare il termine posteriore di essa, dove trovasi il residuo della falce; almeno esso si scosta di poco dal margine posteriore dell'area pellucida, e questo tutt'al più può spostarsi indietro. In alcuni casi eccezionali però, come osservarono anche Pander [1] e Rauber [2], la linea primitiva e il suo solco si prolungano per un tratto anche nell'area opaca: allora questo punto fisso manca. Dall' insieme però delle apparenze che normalmente si succedono, noi possiamo giudicare che l'accorciamento della linea primitiva avviene dalla sua parte anteriore verso la posteriore, e che il suo termine anteriore si porta rapidamente indietro, mentre si raccorciano insieme i due tratti ispessiti anteriore e medio (tav. V, fig. 7, 8, 13), e si avvicinano anche al termine posteriore. L'estremità anteriore più profonda del solco primitivo si retrae così nel mezzo del seno romboidale (fig. 8, 13). Negli stadî successivi (12 protov. fig. 10) le due parti anteriori ispessite della linea primitiva sono ancor più raccorciate, fuse insieme e spostate alquanto indietro; talchè sono quasi totalmente fuori (indietro) del seno romboidale. E notisi che la retrazione della linea primitiva rispetto al termine posteriore dei rilievi midollari è forse maggiore di quel che appare; poichè è probabile che i rilievi stessi, come avviene certamente in alcuni rettili ed anfibî, si estendano indietro [3].

Mi pare che ciò dimostri che una parte considerevole della linea primitiva, forse due terzi, entra direttamente a costituire il tronco dell'embrione. Si può forse ragionevolmente sospettare che il decrescimento notato significhi qualche cosa di diverso da una successiva trasformazione, dall'avanti all'indietro, della linea primitiva in parti dell'embrione?

Se rimanesse su ciò qualche dubbio, se si sospettasse cioè un'atrofia interstiziale della linea primitiva, lo studio delle sezioni trasverse potrebbe toglierlo. È facile difatti

[1] Pander, *Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des Hühnchens im Ei.* Würzburg, 1817 (di questo lavoro non conosco che la citazione di Rauber).

[2] Rauber, *Noch ein Blastoporus.* Zool. Anzeiger N. 135, 1883.

[3] Le misure riferite da Balfour dall'opera di Gasser (*Primitivstreifen*) hanno certo minor valore della diretta osservazione delle aree embrionali intere; e d'altra parte, nei casi in cui la parte posteriore della linea primitiva è anormalmente lunga, il numero totale delle sezioni fatte non è comparabile coi casi normali. Nei primi stadî infatti le due porzioni della linea primitiva non sono tanto bene distinte da poter dire, esaminandone le sezioni, dove termina l'una e dove comincia l'altra. L'osservazione diretta invece mostra sempre lo spostamento dell'apice della linea primitiva, perchè questo può riferirsi al termine posteriore dei rilievi midollari. Ad ogni modo, anche a giudicare dal numero delle sezioni ottenute, il raccorciamento considerevole della linea primitiva nella regione embrionale apparisce manifesto.

seguire in tutti i suoi stadî la trasformazione della parte anteriore della linea primitiva in ectoblasto midollare, corda dorsale [1] e lamine protovertebrali. E rimane anche dopo questa trasformazione una traccia del solco primitivo, nella regione già trasformata come si vede in alcune figure di Gasser [2], e come ho rappresentato nella fig. 9 della tav. VI. Però la fossetta profonda del solco primitivo si ritira sempre indietro e segue l' ingrossamento anteriore della linea primitiva.

È probabile che l'attività generatrice di mesoblasto e della corda, che si ha dapprima nella linea primitiva, continui anche nei primi stadî dello sviluppo dell'embrione. Difatti l' accrescimento dell' embrione si compie in gran parte dalla sua regione posteriore, dove la linea primitiva ispessita e larga si continua direttamente colle lamine mesoblastiche rachidiane, dalla cui segmentazione provengono le protovertebre.

In tal modo la linea primitiva prenderebbe parte alla formazione dell'embrione: 1° col porre gran parte del mesoblasto e del germe della corda; 2° col trasformarsi in parte in organi del tronco dell' embrione; 3° continuando anche ne' primi stadî dello sviluppo dell' embrione a generare, innanzi a sè, mesoblasto e corda dorsale.

Il residuo della linea primitiva forma parte, come è noto, della porzione caudale dell' embrione.

III. *Canali neurenterici.*

Il vero canale neurenterico degli uccelli, per quanto è noto fin qui, si forma in corrispondenza della fossetta anteriore del solco primitivo. Le ricerche di Gasser [3], di Braun [4] e di altri han già posto fuor di dubbio questo fatto. Io stesso, nell'anitra, ho potuto verificare in tutto e per tutto i reperti di Gasser. La suddetta fossetta è talvolta molto profonda anche allorchè la linea primitiva ha la sua massima lunghezza, e può, fin d'allora, giungere a perforare l'ectoblasto (Balfour e Deighton). *Però il canale neurenterico completo non si forma che quando lo sviluppo dell' embrione è avanzato e la linea primitiva si è retratta, dall' avanti all' indietro, per circa due terzi della sua primitiva lunghezza.*

Il più giovane canale neurenterico osservato negli uccelli è quello descritto da Braun; e si forma un po' al davanti dell' estremità posteriore del canale midollare non ancora completamente chiuso: esso può considerarsi come un' appendice anteriore del canale neurenterico di Gasser.

Nell'anitra, poco prima dell'apertura del canale neurenterico, si forma, nella superficie ventrale del blastoderma, in corrispondenza della fossetta anteriore del solco primitivo, un solchetto longitudinale. Approfondandosi, in senso inverso, questo e la

[1] L'indole di questo lavoro non mi permette di entrare in dettagli rispetto a questa questione, che mi sembra già risoluta dalle osservazioni di valorosissimi embriologi e specialmente di Kölliker. Non so spiegarmi come Hoffmann (*Ueber die Entwicklungsgeschichte der Chorda dorsalis.* Festschrift für Henle), ammetta che la corda dorsale si forma indietro, nella regione della linea primitiva, per proliferazione entoblastica e per penetrazione del mesoblasto laterale sotto la linea primitiva.

[2] Gasser, *Primitivstreifen*, ecc.

[3] Gasser, *Der Primitivstreifen bei Vogelembryonen.* 1879. — Lo stesso, *Beiträge zur Kenntniss der Vogelkeimscheibe.* Archiv für An. u. Entwickl. 1882.

[4] Braun, *Die Entwicklung des Wellenpapageies.* Arbeiten aus dem zoolog. zoot. Institut in Würzburg. Bd. V.

fossetta che gli sta sopra, si congiungono insieme e così formasi il canale. Come ho notato, intorno all'apertura inferiore di questo, manca il vero entoblasto intestinale.

Il canale amnioallantoideo di Kuppfer ([1]) si aprirebbe invece presso l'estremo posteriore della linea primitiva. In un embrione di colombo con 16-17 protovertebre (tav. V, fig. 16, 17) ho veduto, in questo punto, una fossetta circolare profonda (*fo*), tanto nella superficie dorsale, quanto nella ventrale, sicchè per poco il blastoderma non era forato. Questa fossetta è forse un rudimento del canale amnioallantoideo, rudimento notato anche da Rauber ([2]) nel pollo. Difatti, le sezioni trasverse mostrano che in corrispondenza di essa l'ectoblasto infossato è fuso con l' entoblasto. Questo medesimo embrione presentava un rudimento di canale neurenterico, ed era questo un canaletto che dal tubo midollare metteva in una piccola cavità dell' estremità posteriore della corda.

La fossetta della giovane linea primitiva e il rudimento di canale neurenterico che eventualmente vi si forma, non corrispondono ancora, pel sito, al canale neuroenterico dei vertebrati inferiori ; il vero canale neurenterico di Braun e Gasser sì. Questo si forma in vicinanza della regione dove prima era il solco della falce; non si può dire però che con questa coincida, come crede Kuppfer. Ma evidentemente Kuppfer confonde il canale neurenterico con l' amnioallantoideo.

IV. *Riassunto e considerazioni.*

La falce e la linea primitiva rappresentano luoghi di formazione di una gran parte del mesoblasto. A questa formazione nella falce prende forse parte considerevole, oltre all'ectoblasto, anche l' entoblasto; nella linea primitiva certo principalmente l' ectoblasto. L'intero processo si estende a poco a poco dal margine posteriore dell' area pellucida fino al terzo anteriore di essa ([3]). Il tessuto così generato (vi comprendo anche il blastema della corda) è spinto ai lati e in avanti; e qua e là è siffattamente unito all' entoblasto che non si può escludere del tutto una partecipazione di questo strato alla genesi di quello. Specialmente nel processo cefalico (blastema della corda) le cellule sono qua e là intimamente riunite al primitivo entoblasto. Le mie osservazioni mi conducono però ad ammettere che almeno molte cellule del processo cefalico derivano da proliferazione ectoblastica nel termine anteriore della linea primitiva. È anche probabile che alcune di queste cellule si insinuino fra le cellule del preesistente entoblasto, formando delle piccole plaghe di entoblasto cordale invaginato, simile a quello degli anfibî e dei rettili (Strahl). Non escludo però la massima partecipazione di cellule entoblastiche primitive alla formazione del mesoblasto periferico e dell' espansione anteriore del processo cefalico.

Il sistema della falce e della linea primitiva equivale, per la funzione genetica, alle labbra del blastoporo di alcuni vertebrati inferiori e principalmente degli anfibî. Il mesoblasto primitivo assomiglia, ancor più che in questi, a un germe di mesenchima.

([1]) Kuppfer, l. c.

([2]) Rauber, l. c.

([3]) Non entro a discutere se l' accrescimento della linea primitiva sia interstiziale, come ammette Koller, ovvero si faccia, come sembra più probabile, pel progresso in avanti della proliferazione ectoblastica.

La linea primitiva degli uccelli, allorchè raggiunge il suo massimo sviluppo, arriva ad un punto molto anteriore a quello cui corrisponde il blastoporo dei vertebrati inferiori. E perciò essa, nella sua parte anteriore, corrisponde, anche pei rapporti di posizione, al tratto di diretto internamento di cellule protoplasmatiche che sta al davanti del blastoporo nell'axolotl.

Il solco primitivo non è altro che un principio d'introflessione lineare della superficie, nel processo di proliferazione e di espansione del blastema mesodermico, che è quanto dire nel processo bilaterale d'invaginazione longitudinale, che negli uccelli non riesce ad un vero ripiegamento interno del primitivo ectoblasto. Questo solco è generalmente più profondo laddove è massima l' invaginazione, cioè nella estremità anteriore della linea primitiva. Così il solco della falce non sarebbe altro che un principio d'introflessione nel processo di invaginazione trasversa (falce).

Il canale neurenterico si apre nella fossetta anteriore del solco primitivo, allorchè questa s' è portata molto indietro insieme all' estremità anteriore della linea primitiva: esso si avvicina così alla regione dove prima trovavasi il solco della falce.

Il canale neurenterico degli uccelli corrisponde allora, pe' suoi rapporti di luogo, a quello dei rettili ed anche a quello degli anfibî, cioè alla parte anteriore del blastoporo dei vertebrati inferiori.

PARTE III.

Riflessioni generali.

La corrispondenza fra le labbra del blastoporo e la linea primitiva, fra l'apertura del blastoporo e il solco primitivo, può avere diversi significati.

Si può intendere semplicemente che le labbra del blastoporo e la linea primitiva si corrispondano per la loro funzione embriogenica, senza preoccuparsi d'altro. Questa corrispondenza è già qualche cosa di più di una semplice analogia, perchè include un rapporto morfologico coi foglietti embrionali, ma non basta a stabilire la vera omologia. Perchè questa sussista è mestieri che le labbra del blastoporo e la linea primitiva abbiano i medesimi rapporti con tutte le formazioni embrionali. L'omologia, inoltre, può essere parziale o totale.

Si può anche, introducendo il concetto filogenetico, ammettere che la linea primitiva derivi geneticamente dal vero blastoporo. E qui possono darsi tre casi: 1° che l' antico blastoporo si sia puramente e semplicemente chiuso; 2° che prima di chiudersi siasi spostato o in tutto o in parte; 3° che ad esso si sia aggiunta qualche nuova formazione per costituire insieme al blastoporo chiuso ciò che oggi è la linea primitiva.

Ciò posto, passo a discutere qual sia il grado di corrispondenza che si può ammettere fra la linea primitiva e il blastoporo dei vertebrati; dapprima senza introdurre il concetto filogenetico, dipoi cercando di interpretarl. con questo concetto.

Fra i cordati, la prima forma di blastoporo integro la troviamo nella gastrula quasi eguale di alcuni urocordati e dei cefalocordati. Nell' Amphioxus e in alcuni

tunicati è nota la posizione del blastoporo rispetto al formantesi embrione, e come quello stabilisca una communicazione fra la parte terminale del tubo midollare e l'intestino: il canale neurenterico.

Già nei Ciclostomi la gastrula è molto ineguale, per la forte prevalenza di vitello nutritivo nella parte ventrale; ma il blastoporo rimane integro e corrisponde perfettamente a quello dell'Amphioxus. Il modo di formazione del mesoblasto e del celoma appare però nel Petromyzon un po' diverso, poichè si scosta alquanto dalla tipica forma enterocele dell'Amphioxus.

I ciclostomi ci conducono direttamente agli anfibî; poichè, prescindendo dai poco studiati ganoidi, gli elasmobranchi e i teleostei ci presentano due tipi di gastrulazione profondamente modificata, per lo sviluppo di una grande quantità di vitello nutritivo.

Gli anfibî s'avvicinano più che gli elasmobranchi e i teleostei al tipo primitivo di gastrulazione dei vertebrati; e d'altra parte sono un buon termine di confronto coi rettili, gli uccelli e i mammiferi. Negli anfibî la gastrulazione è ineguale e in parte embolica, in parte epibolica. Il blastoporo rimane integro e corrisponde, per la sua posizione rispetto all'embrione, esattamente a quello del Petromyzon e dell'Amphioxus, e forma, colla sua parte anteriore, un canale neurenterico. Dalle labbra del blastoporo si genera l'entoblasto cordale e la massima parte del mesoblasto, con forma che s'avvicina al mesenchima. Il celoma devia dalla forma tipica enterocele e s' avvicina al vero schizocele.

Nell' axolotl, in connessione col labbro superiore del blastoporo, apparisce un fatto nuovo e di grande importanza comparativa: egli è quel tratto di penetrazione diretta di cellule protoplasmatiche (strato primitivo esterno), il quale può anche considerarsi come un ingrossamento del labbro superiore del blastoporo, che però ad ogni modo rappresenta una forte attività invaginatrice al davanti del blastoporo. E questa attività si rivela all'esterno nel rilievo primitivo solcato longitudinalmente. Quel tratto, giova notarlo fin d'ora, corrisponde, pe' suoi rapporti colle prime formazioni embrionali, alla parte anteriore della linea primitiva degli uccelli, e il solco del rilievo primitivo al solco primitivo di questa.

Nelle forme decisamente meroblastiche dei vertebrati, l'enorme sviluppo della massa vitellina conduce per necessità alla prevalenza del processo epibolico nella gastrulazione.

Già negli anfibî l'inclusione della massa vitellina è dovuta principalmente all'estendersi dell' ectoblasto primitivo alla sua superficie; e il blastoporo, in un certo stadio, presenta una porzione vitellina più larga e una porzione embrionale: quest'ultima diventa il canale neurenterico. Negli elasmobranchi questa forma del blastoporo è molto più manifesta; sembra che ogni processo d'invaginazione embolica sia in essi abolito, non solo nella parte vitellina, ma anche nella parte embrionale; sicchè le cellule che formano il tetto della cavità gastrale siano poste già durante la segmentazione e questa cavità si formi come una semplice fenditura.

Malgrado ciò la cavità gastrale degli elasmobranchi corrisponde perfettamente a quella dei vertebrati inferiori; poichè i suoi rapporti coll' insieme della gastrula e colla genesi dell' embrione sono essenzialmente gli stessi; le differenze d'origine

non sono essenziali, e si spiegano benissimo colla differente costituzione della blastula. E così, suppongasi dapprima che la distinzione di entoblasto protoplasmatico e vitellino sia essenziale e perciò rispetto ad essa debbasi derivare la forma gastrale degli elasmobranchi da quella tipica di molti anfibî (axolotl, rana). Sarà facile comprendere come l' entoblasto vitellino del tetto debba trovarsi fin dapprincipio in sito; poichè esso è compreso nella massa invaginata per epibolia. E ciò si ha già parzialmente negli anfibî. Quanto all' entoblasto protoplasmatico, pel semplice spostamento in avanti o per la scomparsa della cavità di segmentazione può prodursi un ingrossamento protoplasmatico posteriore che renda superfluo un internamento di cellule protoplasmatiche: queste, per tal cangiamento non essenziale nella blastula, son già poste nel loro luogo interno. Ciò si verificherebbe, secondo Stricker ed altri, anche in alcuni anuri.

Senonchè la suddetta distinzione dei due blastemi interni può essere affatto secondaria e solo determinata in certi tipi; sicchè le cellule entoblastiche degli elasmobranchi possano considerarsi o come tutte corrispondenti alle vitelline, ovvero come indifferenti e pertinenti, pel loro rapporto colla gastrulazione, alla massa che viene invaginata per epibolia. Così nell' *Alytes*, secondo Gasser, tutte le cellule del tetto della cavità gastrale sarebbero vitelline.

Anche negli anfibî la cavità gastrale si estende in parte come una fenditura. E negli elasmobranchi, come nota Balfour, lo spostamento in avanti della cavità di segmentazione è un' ultima traccia dell'invaginazione embolica.

In ogni caso le differenze si spiegano senza essenziali variazioni nel tipo della gastrulazione; e perciò nulla tolgono alla completa omologia della cavità gastrale nelle due forme, omologia chiaramente confermata poi dai rapporti colle successive formazioni. E non parmi necessario, per affermarla, invocare con Balfour una pseudo-invaginazione, la quale sarebbe indicata dalla successiva trasformazione, dal blastoporo in avanti, delle cellule primitive interne in cellule dell' entoblasto definitivo. Questo fatto stabilisce certo un' altra importante somiglianza cogli anfibî, ma fra esso e la vera invaginazione rimane una lacuna che solo un ipotetico concetto filogenico può colmare.

Nelle forme meroblastiche dei vertebrati l'essere tutta l'attività formativa concentrata nella regione del blastoderma fa sì che l'ectoblasto e l'entoblasto cellulare (parte vitellina segmentata) si estendano contemporaneamente, per comune processo genetico, alla superficie del vitello: l' epibolia assume così forma diversa dalla comune.

Nei sauropsidi la parte formativa dell'ovo diventa diblastica in seguito alla segmentazione [1]. Coll'estensione del blastoderma comincia l'epibolia; e la cavità che sotto questo si forma corrisponde alla cavità gastrale dei vertebrati inferiori. Per la sua posizione, questa cavità differisce da quella degli elasmobranchi e degli anfibî solo perchè non si apre nell'orlo del blastoderma. Ma ciò dipende unicamente dall'essere, nei sauropsidi, il segmento vitellino del blastoporo affatto disgiunto dalla regione embrionale.

[1] Come nelle altre forme meroblastiche di vertebrati, ciò dipende dalla forma discoide della parte segmentata e dalla mancanza d'una vera cavità di segmentazione: le cellule del primitivo entoblasto (che possono considerarsi, in parte almeno, come spettanti alla massa vitellina) sono perciò dapprincipio adiacenti all'ectoblasto primitivo (cellule protoplasmatiche).

E il blastoporo embrionale si forma nei sauropsidi, e qual è la natura del loro primitivo entoblasto?

Nei rettili, grazie specialmente alla ricerche di Kuppfer [1], Balfour [2] e Strahl [3], è noto che presso il margine posteriore dell'area embrionale si forma una specie di bottone opaco (*linea* primitiva), dovuto principalmente a proliferazione ectoblastica. E nel mezzo di questo bottone si forma un' introflessione che s'apre nell' interno, formando un canale (c. neurenterico), dalla cui parete superiore ha origine entoblasto cordale (Strahl).

Questo canale corrisponde perfettamente a quello omonimo dei vertebrati inferiori, e perciò anche alla parte embrionale del loro blastoporo. Esso, anche prescindendo da questa corrispondenza, deve considerarsi pure come un vero blastoporo, principalmente perchè: 1° dalla sua parete superiore ha origine entoblasto che entra a formar parte del tetto della cavità gastrale; 2° perchè intorno a lui, come intorno al blastoporo degli anfibî, si genera mesoblasto che irradia nell' interno [4].

La genesi del mesoblasto comincia nella linea primitiva prima che si formi l'introflessione; la quale non ha perciò, rispetto ai foglietti embrionali, l' importanza che ha il blastoporo degli anfibî, e tende ad acquistare, come blastoporo, natura di rudimento.

Il canale neurenterico potrebbe tuttavia avere qualche altra funzione ignota.

Il blastoporo dei rettili è dunque scisso in vitellino ed embrionale: quest'ultimo corrisponde esattamente alla parte anteriore del blastoporo dei vertebrati inferiori.

Kuppfer [5] ha notato che, dietro l' introflessione, la linea primitiva dei rettili è allargata in forma di mezza luna (*falce*). Pei rapporti che ha coll'embrione, questa falce dei rettili corrisponde al labbro inferiore del blastoporo chiuso degli anfibî, il quale pure talvolta è ispessito. La corrispondenza fra queste due formazioni non è però completa, poichè gran parte dell'orlo posteriore del blastoporo rimane, nei rettili, lontana e separata dalla regione embrionale, nel blastoporo vitellino.

La linea primitiva degli uccelli (compresavi la falce) corrisponde, *per la propria natura, e rispetto alla genesi dei foglietti embrionali*, alla linea primitiva dei rettili e alle labbra del blastoporo degli anfibî. Da essa, difatti, ha origine una gran parte di mesoblasto embrionale, e, molto probabilmente, anche entoblasto cordale. Essa è dunque un vero blastema di invaginazione gastrale; presenta anzi un' introflessione lineare poco profonda (solco primitivo) in cui eventualmente si forma un canale perforante il blastoderma, il quale deve considerarsi come un vero blastoporo embrionale

(1) Kuppfer, l. c.

(2) Balfour, *On the early development of the Lacertilia,* ecc. Quartely journal of microscopical science, vol. XIX, 1879.

(3) Strahl, o. c. e: *Ueber frühe Entwicklungsstadien von Lacerta agilis.* Zool. Anzeiger, 1883, n. 142.

(4) Chiunque si formi un concetto chiaro della gastrulazione nelle forme meroblastiche dei vertebrati, può con facilità rendersi ragione di alcune differenze notate da Strahl (*Ueber frühe Entwicklungsstadien von Lacerta agilis.* Zool. Anzeiger 1883, n. 142) fra l'invaginazione dei rettili e quella degli anfibî.

(5) Kuppfer, l. c.

rudimentale, più rudimentale ancora di quello dei rettili; se pure come canale neurenterico esso non ha qualche altra funzione.

Ciò si deve ammettere, e senza introdurre concetti filogenetici, anche se, con Balfour ed altri, si nega ogni partecipazione della linea primitiva alla genesi del mesoblasto embrionale e dell'entoblasto cordale; senonchè in tal caso, non solo il blastoporo, ma tutto il processo d'invaginazione dell'ectoblasto primitivo sarebbe rudimentale.

Qualunque sia il grado di partecipazione dell'entoblasto primitivo alla genesi del mesoblasto embrionale e della corda, la gastrulazione nella parte embrionale dei sauropsidi può, riferendosi alla gastrulazione embolica dei vertebrati inferiori, derivarsi da questa in modo simile a quello già considerato per gli elasmobranchi. Così, se la distinzione fra entoblasto protoplasmatico e vitellino si ritiene essenziale, alcune cellule corrispondenti alle protoplasmatiche sarebbero, nei sauropsidi, internate fin dapprincipio insieme a quelle corrispondenti alle vitelline; esse, nell'entoblasto primitivo e nelle cellule migranti fra i due strati primitivi, rappresenterebbero il germe della corda e del mesoblasto. E se quella distinzione non fosse essenziale, si potrebbe ammettere che, nei sauropsidi, cellule corrispondenti alle vitelline o cellule indifferenti avessero preso la funzione genetica che nelle forme tipiche degli anfibî hanno le protoplasmatiche. E già negli anfibî una parte di mesoblasto è prodotta da cellule vitelline; e, secondo Gasser, nell'*Alytes* anche l'entoblasto cordale deriverebbe da cellule vitelline.

Tutto ciò non altera menomamente la completa corrispondenza delle due gastrule.

Egli è certo che il mesoblasto periferico dell'area pellucida e quello dell'area opaca derivano da cellule entoblastiche che, pei loro caratteri, differiscono molto da quelle dello strato primitivo esterno e certamente sono corrispondenti alle vitelline degli anfibî.

Negli uccelli io credo però che nella genesi del mesoblasto embrionale e dell'entoblasto cordale abbia molta parte la proliferazione ectoblastica della linea primitiva. E si noti che nella parte anteriore del processo cefalico le cellule che molto probabilmente derivano da invaginazione ectoblastica si fondono col preesistente entoblasto vitellino, come avviene appunto dell'entoblasto cordale degli anfibî nel fondo della cavità gastrale.

Ed anzi, come ho notato già, tutti i fenomeni di fusione fra la massa proliferante e l'entoblasto primitivo possono interpretarsi come una partecipazione delle cellule internate all'entoblasto stesso, in seguito all'invaginazione.

Ad ogni modo mi sembra certo che il processo genetico della linea primitiva degli uccelli abbia molta più importanza di quello che ammette Balfour, e non scenda al grado di semplice rudimento.

La fossetta anteriore del solco primitivo degli uccelli rappresenta il massimo grado d'introflessione, corrispondente al luogo di più attiva invaginazione. Questa fossetta, nella quale può aprirsi, e si apre difatti, un blastoporo, trovasi dapprincipio molto più innanzi del blastoporo embrionale dei rettili e degli anfibî.

La linea primitiva degli uccelli si estende dalla falce fin circa al terzo anteriore dell'area pellucida: si estende dunque, rispetto a questa, molto più innanzi

che nei rettili, e così anche rispetto all'embrione. La falce degli uccelli corrisponde, per la sua posizione nell'area embrionale, a quella parte della linea primitiva dei rettili che rimane dietro l'introflessione (falce di Kuppfer). E così il fuggevole solco della falce corrisponde certamente a una parte dell'introflessione dei rettili.

L'introflessione dei rettili è generalmente circolare o allargata per traverso (Kuppfer), e non si estende innanzi come il solco primitivo degli uccelli, ma rimane nella regione della falce. Quindi, per la sua posizione nell'area embrionale, gran tratto del solco primitivo degli uccelli non corrisponde esattamente all'introflessione dei rettili.

La linea primitiva degli uccelli, e perciò anche il solco primitivo, si raccorciano dall'avanti all'indietro verso la falce; e non solo rispetto a questa, ma anche rispetto all'embrione. Nei rettili invece l'introflessione non si sposta indietro, e dapprincipio i rilievi midollari non giungono fino a lei. Così quando negli uccelli il canale midollare si chiude, l'estremità anteriore della linea primitiva e del solco primitivo si trova respinta indietro presso la falce, nel luogo dove si forma, nei rettili, l'introflessione.

Adunque la linea primitiva degli uccelli corrisponde perfettamente a quella dei rettili sol quando s'è retratta verso la falce; e il solco primitivo corrisponde all'introflessione dei rettili sol quando s'è raccorciato e ridotto presso il luogo dove erasi formato il solco della falce.

Se nella fossetta anteriore della giovane linea primitiva degli uccelli si aprisse un blastoporo, esso non corrisponderebbe, pel posto, a quello embrionale dei rettili e degli anfibî, ma dovrebbe considerarsi come una nuova formazione. Certo però questo spostamento del blastoporo non altererebbe essenzialmente la forma generale della gastrula.

Questa formazione non è impossibile. E sembra che in alcuni casi la fossetta anteriore del solco primitivo, quand'esso ha ancora la sua maggiore lunghezza, si approfondi sì da forare l'ectoblasto (Balfour e Deighton). Il foro così formato, benchè non s'apra nella cavità gastrale, può considerarsi come un vero blastoporo rudimentale *di nuova formazione*. E se l'entoblasto sotto di esso prendesse parte all'invaginazione mesoblastogenica, quel fòro potrebbe facilmente attraversare tutto il blastoderma e aprirsi nella cavità gastrale. Così nel rilievo primitivo dell'axolotl si forma anche un solco interno, dovuto, come l'esterno, all'invaginazione bilaterale del mesoblasto. E lo stesso potrebbe avvenire nell'entoblasto degli uccelli; e avviene difatto, secondo Braun [1], nel *Melopsittacus undulatus*, per l'apertura di un certo canale neurenterico, e, come io ho osservato, anche nell'anitra.

Tuttavia, per quanto è noto finora, è *soltanto dopo la retrazione della linea primitiva* che negli uccelli, in corrispondenza della fossetta anteriore del solco primitivo, si apre un vero canale neurenterico. Questo corrisponde allora esattamente, anche per la posizione rispetto a tutte le formazioni embrionali, a quello dei rettili, e perciò alla parte embrionale del blastoporo dei vertebrati inferiori.

Una formazione simile alla linea primitiva degli uccelli si trova nell'axolotl al davanti dell'orlo superiore del blastoporo, e corrisponde, per la posizione, alla parte

(1) Braun, l. c.

anteriore di questa. Questo fatto dimostra come insieme al vero blastoporo possa formarsi una vera linea primitiva solcata e rafforza l'idea, comparativamente dedotta, della non perfetta corrispondenza del tratto anteriore della linea primitiva colle labbra del blastoporo dei vertebrati inferiori. Il blastoporo degli anfibî corrisponde infatti, nella sua parte anteriore, al canale neurenterico dei rettili e perciò anche a quello tardivo degli uccelli; corrisponde cioè, pel sito, alla regione prossima al solco falciforme.

La parte anteriore della linea primitiva degli uccelli acquista anche, in confronto al blastoporo dei vertebrati inferiori, nuova importanza genetica, perchè concorre direttamente alla formazione del tronco dell'embrione.

La falce degli uccelli rappresenta, come quella dei rettili, il luogo di chiusura posteriore del blastoporo embrionale; e, fatta la riserva dell'avvenuta separazione del blastoporo vitellino, si può paragonarla al labbro inferiore del blastoporo degli anfibî.

Il canale amnioallantoideo, se realmente esiste, può considerarsi come un rudimento di apertura blastoporica nel tratto ideale di congiunzione fra il blastoporo embrionale e il vitellino.

A queste considerazioni si può annettere un significato filogenetico. È probabile che la linea primitiva dei rettili derivi dalle labbra d'un antico blastoporo integro, che in questi vertebrati si è scisso in vitellino e embrionale. Quel blastoporo sarebbe passato per la forma che trovasi negli elasmobranchi; e della sua parte anteriore si avrebbe, nei rettili, un residuo nel canale neurenterico. Può essere che il canale neurenterico, oltre al rappresentare, rispetto al blastoporo, un rudimento, sia anche mantenuto da una ragione fisiologica ignota; sicchè esso possa aprirsi indipendentemente dall'eredità del blastoporo.

Quanto agli uccelli, dal punto di vista filogenetico, possono darsi due casi: 1° che la loro linea primitiva rappresenti le labbra saldate d'un blastoporo estesosi in avanti, prima di chiudersi, più alquanto di quello dei vertebrati inferiori noti oggidì; 2° che la parte anteriore della linea primitiva non sia mai stata parte dell'orlo d'un vero blastoporo, ma che sia un nuovo processo di internamento e proliferazione cellulare aggiunto, come nell'axolotl, al labbro anteriore dell'antico blastoporo. Il canale neurenterico, che per la posizione corrisponde a quello degli anfibî, può avere lo stesso significato filogenetico che ha quello dei rettili: negli uccelli è ancor più rudimentale.

Le condizioni trovate nell'axolotl rendono più probabile la seconda interpretazione, dandoci un esempio reale del fatto da essa supposto; mentre niun fatto noto è in favore della prima.

Se un vero canale neurenterico si aprisse nella estremità anteriore del solco primitivo allorchè questo ha la sua massima estensione in avanti, allora la prima interpretazione sarebbe resa più probabile, inquantochè cotesto canale potrebbe considerarsi come un residuo di un antico blastoporo. Tal fatto non sarebbe però prova assoluta in favore di essa; poichè il detto canale potrebbe essersi formato secondariamente nel tratto d'internamento diretto, novellamente aggiunto all'antico blastoporo: e ciò pel fatto stesso della nuova invaginazione, ovvero per una necessità fisiologica ignota.

In ogni caso la parte anteriore della linea primitiva sarebbe, rispetto al blastoporo dei vertebrati inferiori, una nuova formazione.

Le due aree relativamente opache che trovansi talvolta nella parte posteriore dell'area pellucida possono avere un significato filogenetico. Esse rappresentano forse un residuo del processo di chiusura del blastoporo embrionale. In tal caso esse ci indicherebbero la vera regione blastoporica della linea primitiva. Così nel blastoderma rappresentato nella fig. 14, tav. V il solco primitivo corrispondente a queste aree laterali opache è profondo e si biforca posteriormente nella falce: esso molto probabilmente rappresenta il vero luogo del primitivo blastoporo embrionale, che sarebbe qui triangolare, com'è talvolta, presso la chiusura, il blastoporo intero degli anfibî.

Si potrebbe infine osservare che, tanto nel rapporto puramente ideale, quanto nel rapporto filogenetico, l'estensione in avanti del processo simile a quello per cui si apre il blastoporo è di poca importanza morfologica e nulla toglie all'omologia della linea primitiva col blastoporo dei vertebrati inferiori: che il blastoporo non solo è in sè stesso un organo in continuo movimento, ma che può anche spostarsi facilmente rispetto all'embrione. Così, come ho mostrato in un caso dell'axolotl, il blastoporo, nella stessa specie può cangiare di posto. Inoltre, il blastoporo vitellino delle forme meroblastiche è certamente omologo ad una parte del blastoporo degli anfibî, benchè sia così spostato nella sfera vitellina.

In questi casi però il movimento e lo spostamento non alterano per nulla le essenziali relazioni. La nuova parte aggiunta al blastoporo nella linea primitiva ha invece grande importanza e nuove relazioni essenziali, poichè essa contribuisce a formare direttamente il tronco dell'embrione.

Egli è vero però che la gastrula nella sua totalità resta la stessa.

Nei mammiferi il processo epibolico, per la scomparsa del vitello nutritivo, è grandemente accelerato, e si compie durante la segmentazione, ma si conserva: il mammifero (oloblastico), derivante dal sauropside (meroblastico), non scende alla forma semplicemente embolica del vertebrato primitivo oloblastico. Il blastoporo epibolico dei mammiferi (blastoporo di Van Beneden) [1] è anche, rispetto a quello dei sauropsidi, spostato verso l'area embrionale.

Colla costituzione della vescicola blastodermica, l'embrione dei mammiferi rientra completamente nel tipo di quello dei sauropsidi. L'epibolia vi è allora già compiuta. Tuttavia, a rappresentare la tarda e prolungata epibolia dei sauropsidi resta il fenomeno che in questi l'accompagna, cioè l'estensione dell'entoblasto vitellino segmentato intorno al vitello non segmentato: quest'ultimo, nei mammiferi è sostituito dal liquido che riempie la vescicola blastodermica.

La linea primitiva dei mammiferi deve essere interpretata come quella degli uccelli: essa rappresenta un momento nel processo generale della gastrulazione.

Anche nei mammiferi si forma un canale neurenterico o intero o rudimentale [2],

[1] E. van Beneden, *Recherches sur l'embriologie des Mammifères*. Archives de Biologie, vol. I, 1880.

[2] W. Heape, *On the Germinal Layers and Early Development of the Mole*. Proceeding roy. Society. V. XXXIII, n. 217. 1882. — Lieberkühn, *Ueber die Chorda bei Säugethieren*. Arch. f. Anat. u. Entwickgs. 1882. — Braun, *Entwicklungsvorgänge am Schwanzende bei Säugethieren*. Arch. f. Anat. u. Entwickgs. 1882. — Kölliker, *Ueber die Chordahöhle und die Bildung der Chorda beim Kaninchen*. Sitzgber. phys.-med. Ges. Würzburg, 1883. Kölliker avrebbe trovato, nell'embrione di coniglio con 3-4 protovertebre, l'indizio di un canale attraversante il blastoderma nell'estremo posteriore della linea

il quale ha lo stesso significato di quello degli uccelli. Nella talpa esso si forma, secondo Heape, allorchè la linea primitiva è ancora giovane, ma s'è già raccorciata di circa la metà; e si forma all'apice di essa nella fossetta anteriore del solco primitivo.

Restano ancora incertezze intorno alla partecipazione del primitivo entoblasto alla genesi del mesoblasto e della corda; nè io ho fatto ricerche in proposito.

Adunque la gastrulazione dei vertebrati, benchè si determini in molte particolari forme, dovute alla varia costituzione dell'ovo, pure mantiene essenzialmente sempre lo stesso tipo. Nei vertebrati superiori, ed eventualmente anche negli anfibî, al blastoporo embrionale si aggiunge un nuovo processo d'invaginazione diretta, che ha molta importanza nella genesi dell'embrione, ma non cangia essenzialmente la totalità della gastrula. Questo processo concorre essenzialmente alla formazione della così detta linea primitiva.

Pei vertebrati la teoria del celoma non ha valore assoluto. A cominciare dagli anfibî e dalle forme embrionali affini, la formazione del celoma e del mesoderma si mostra diversa in molti punti dal tipo schiettamente enterocele; e questa diversità dipende da condizioni di secondaria importanza nel processo della gastrulazione. Epperò ritengo che questa teoria non risponda alla verità delle cose.

APPENDICE

La stampa di questa Memoria era già inoltrata, quando mi pervenne il lavoro di Hoffmann: *Die Bildung des Mesoderms, die Anlage der Chorda dorsalis und die Entwickelung des Canalis neurentericus bei Vogelembryonen* (Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam, 1883). Sono dolente di non poter fare qui un esame serio ed accurato di cotesto lavoro, notevole per la ricchezza di osservazioni comparative. Debbo però confessare che in alcuni punti fondamentali le mie osservazioni mi fanno fortemente dubitare, per lo meno, delle opinioni espresse da Hoffmann. Così, le mie serie di embrioni di pollo, anitra e colombo, attentamente studiate, mostrano, nell'estremità posteriore dell'embrione, quel rapporto della corda col bottone anteriore della linea primitiva, che ho descritto nel testo e che fu già così bene veduto da Kölliker. In alcun modo non ho potuto verificare, fra quelle due formazioni, il distacco descritto e alquanto schematicamente figurato da Hoffmann. Noto ancora che molte volte la fusione della corda coll'entoblasto primitivo è illusoria. Non intendo con ciò negare (si vegga il testo) una partecipazione dell'entoblasto primitivo alla genesi della corda.

Nel marzo di quest'anno uscì la continuazione del lavoro di Kuppfer: *Die Gastrulation an den meroblastischen Eiern der Wirbelth.* etc. (Archiv f. Anatomie u. Phys. — Anat. Abth. I, II H. 1884). In essa, Kuppfer tratta principalmente

primitiva. Cotesto canale potrebbe quindi paragonarsi al canale amnioallantoideo degli uccelli. Tolgo questa notizia dal lavoro di Kuppfer che cito in appendice; poichè non m'è stato possibile procurarmi la nota originale del Kölliker.

della gastrulazione nei teleostei, ma premette alcune considerazioni comparative. Egli sostiene che, nei saurpsidi, l'estendersi del blastoderma intorno al tuorlo indica la formazione della blastosfera dalla morula; poichè egli considera il vitello non segmentato come semplice contenuto della blastosfera. Anche nei vertebrati a segmentazione ineguale mancherebbe, secondo Kuppfer, una vera epibolia: l'estendersi dello strato protoplasmatico (dato, secondo lui, da formazione o trasformazione in sito di cellule della morula) indicherebbe la formazione della blastosfera, e le cellule vitelline internate rappresenterebbero corpi contenuti nella cavità della blastosfera. Quanto ciò sia falso si può rilevare dal testo della mia Memoria e dai lavori antecedentemente pubblicati su quest'argomento.

E se anche nei sauropsidi si volesse considerare il tuorlo come sostanza estranea alla blastosfera, il processo suddetto non sarebbe altrimenti la formazione della blastosfera dalla morula, ma piuttosto una gastrulazione epibolica *sui generis* da una morula discoide. Difatti, il blastoderma primitivo (che sarebbe la morula) è già diblastico; e, nello sviluppo, l'ectoblasto include a poco a poco completamente l'entoblasto, che insieme a lui si estende: si forma così un embrione *a due strati*, con una cavità (piena di vitello nutritivo) e un'apertura (limitata dall'orlo del blastoderma): embrione che, anche in tale ipotesi, è evidentemente una vera gastrula.

Questo ragionamento si applica anche ai mammiferi, nei quali il vitello di nutrizione è sostituito dal liquido che riempie la vescicola blastodermica.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Segni che hanno lo stesso significato in tutte le figure:

a) Per gli anfibî (tav. I, II, III, IV).

bl, blastoporo
c, seno posteriore della cavità gastrale
cc, cavità pleuro-peritoneale
Ch, corda dorsale
ci, intestino primitivo
cm, canale midollare
Cp, cellule protoplasmatiche
Cp', cellule prot. internate
Cv, cellule vitelline
Ec, ectoblasto
Ec', ectoblasto primitivo
En', primitivo entoblasto protoplasmatico
Enc, entoblasto cordale
Eni, entoblasto intestinale
Me, mesoblasto
Me', foglietto somatico
Me'', foglietto splancnico del mesoblasto
P, tratto di diretta penetrazione delle cellule protoplasmatiche — ingrossamento situato al davanti dell'orlo superiore del blastoporo
rm, rilievi midollari
rp, rilievo primitivo
S, cavità di segmentazione
sf, solco falciforme
sm, solco midollare
sp, solco primitivo
sp', solco primitivo interno

b) Per gli uccelli (tav. V, VI).

ce, cellule del primitivo entoblasto
ce', cellule entoblastiche simili a quelle del processo cefalico
c', cellule del processo cefalico
f, falce
f', residuo della falce
l', parte anteriore; *l''*, parte mediana,
l''', parte posteriore della linea primitiva.

Tavola I.

Fig. 1. Embrione di axolotl nel primo stadio di formazione dei rilievi midollari.
» 2. Lo stesso della figura precedente, veduto di sopra.
» 3. Embrione di axolotl un po' più giovane del precedente.
» 4. Embrione di axolotl nel momento in cui cominciano a disegnarsi i rilievi midollari.
» 5. Gastrula di axolotl, con tappo vitellino non ancora completamente invaginato.
» 6. Embrione di *rana esculenta*, con rilievi midollari formati.
R, rilievo centrale dello scudo midollare.
sd, solco dorsale.
» 7. Embrione di *rana esculenta*, colla prima traccia di rilievi midollari.
» 8. Embrione di axolotl, nel primo stadio di formazione del solco midollare e dei rilievi midollari.
» 9. Lo stesso embrione della precedente figura, veduto di sopra.
» 10. Gastrula di axolotl, con tappo vitellino.
» 11. Seno romboidale d'un embrione di axolotl.
» 12. Seno romboidale d'un embrione di axolotl.
» 13. Blastoporo e branche posteriori dei rilievi midollari di un embrione di *rana esculenta*.
» 14. Seno romboidale d'un embrione di axolotl.

Tavola II. — Axolotl.

Fig. 1. Sezione trasversa della giovine blastula.
» 2. Sezione trasversa della blastula a termine:
x, piccole sfere vitelline.
» 3. Sezione longitudinale mediana nel primo momento della gastrulazione.
» 4. Come la precedente.

Fig. 5. Sezione longitudinale mediana di uno stadio un po' più avanzato.
» 6. Sezione longitudinale mediana di uno stadio ancor più avanzato.
» 7. Sezione longitudinale mediana di uno stadio corrispondente a quello della fig. 5.
» 8. Sezione longitudinale mediana del primo stadio della gastrulazione, in un caso d'incompleta segmentazione vitellina:
n, nuclei della massa vitellina non segmentata.
V, massa vitellina non segmentata.
» 9. Sezione laterale della stessa serie della fig. precedente.
» 10. Sezione trasversa fatta presso il blastoporo in una gastrula con tappo vitellino non del tutto invaginato.
» 11. Sezione appartenente alla stessa serie della precedente, un po' più innanzi di quella.
» 12. Sezione laterale della serie cui appartiene la fig. 6.
» 13. Sezione longitudinale mediana del primo stadio della gastrulazione, in un caso d'incompleta segmentazione vitellina.
» 14. Sezione longitudinale mediana di uno stadio della gastrulazione un po' più avanzato dei precedenti.

Tavola III. — Axolotl.

Fig. 1. Sezione trasversa posteriore (in corrispondenza dell'ingrossamento che sta al davanti del blastoporo) di una gastrula con largo tappo vitellino.
» 2. Sezione trasversa fatta un po' al davanti del suddetto ingrossamento, in una gastrula prima della formazione del tappo vitellino.
» 3. Sezione trasversa anteriore della stessa serie cui appartiene la precedente.
» 4. Sezione trasversa della serie cui appartengono le fig. 10 e 11 della tav. II; essa capita un po' più al davanti della fig. 11 (3° posteriore della gastrula).
» 5. Sezione mediana di questa medesima serie:
*, limite del mesoblasto invaginato.
» 6. Sezione anteriore di questa medesima serie.
» 7. Sezione frontale passante pel labbro superiore del blastoporo d'una gastrula con largo tappo vitellino.
» 8. Sezione appartenente alla stessa serie della precedente figura e passante pel blastoporo:
*, limite del mesoblasto invaginato.
» 9. Sezione frontale passante pel blastoporo d'una gastrula con tappo vitellino ristretto.
» 10. Sezione appartenente alla serie della precedente figura e passante pel labbro superiore del blastoporo:
*, limite del mesoblasto invaginato.
» 11. Sezione frontale passante pel blastoporo d'una gastrula a termine.
» 12. Sezione trasversa $x\ x$ fig. 2, tav. I.

Tavola IV. — Axolotl.

Fig. 1. Sezione frontale un po' al davanti del blastoporo d'un embrione con solco midollare.
» 2. Sezione trasversa $x\ x$ fig. 3, tav. I.
» 3. Sezione trasversa fatta poco al davanti dell'ingrossamento superiore al blastoporo d'un embrione con rilievi midollari alquanto avvicinati alla linea mediana:
*, limite dell'entoblasto cordale.
» 4. Sezione trasversa della stessa serie, passante pel suddetto ingrossamento (*P*).
» 5. Sezione trasversa mediana d'un embrione con canale midollare presso a chiudersi.
» 6. Sezione longitudinale mediana d'un embrione con canale midollare completamente chiuso.
» 7. Sezione longitudinale mediana d'una gastrula con tappo vitellino:
*, limite del mesoblasto inferiore invaginato.
» 8. Sezione frontale poco al davanti del blastoporo d'un embrione nello stadio della fig. 6.

Fig. 9. Sezione trasversa *yy* fig. 3, tav. I:
*, limite dell'entoblasto cordale.
» 10. Sezione trasversa *yy* fig. 2, tav. I:
*, limite dell'entoblasto cordale.
» 11. Sezione longitudinale mediana d'un embrione con rilievi midollari.
» 12. Sezione della stessa serie della precedente e passante per la lamina protovertebrale.

Tavola V.

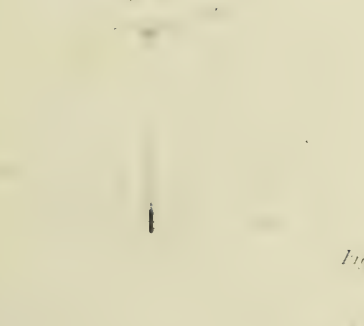
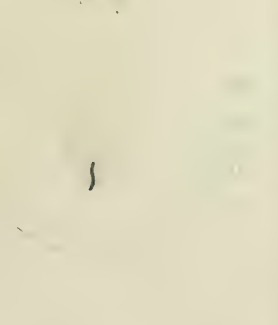
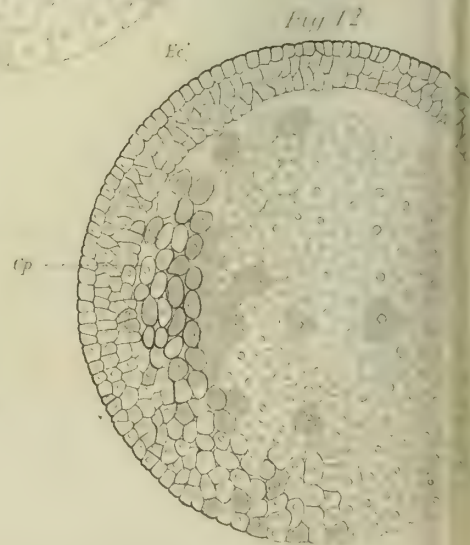
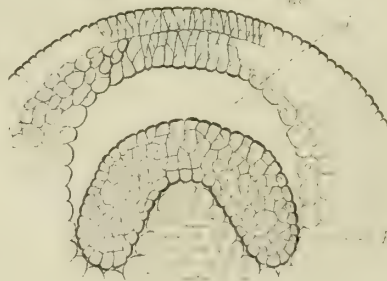
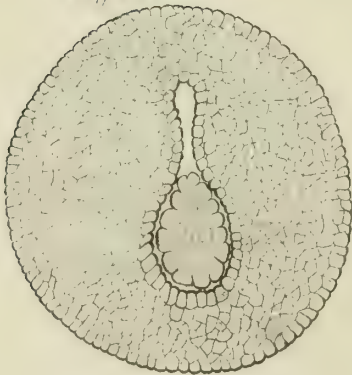
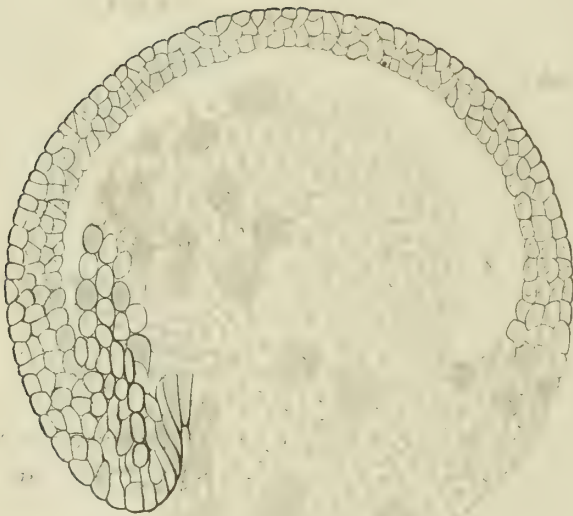
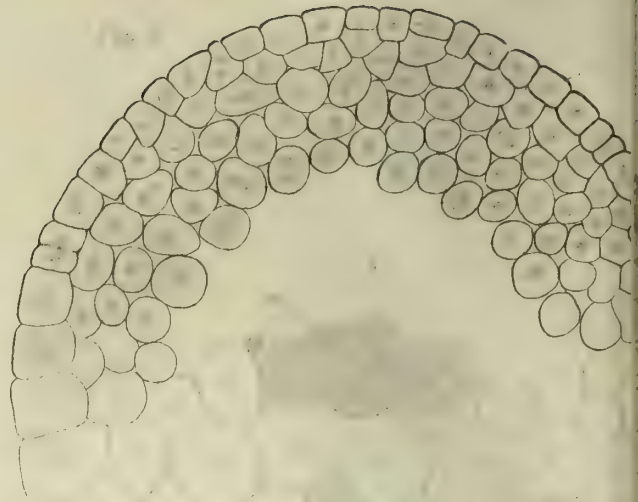
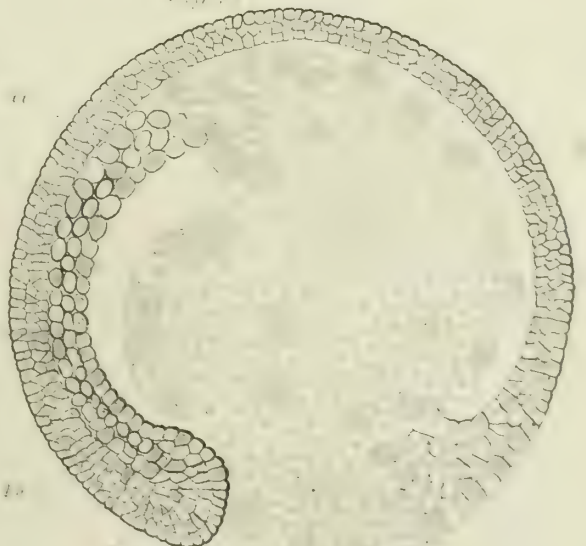
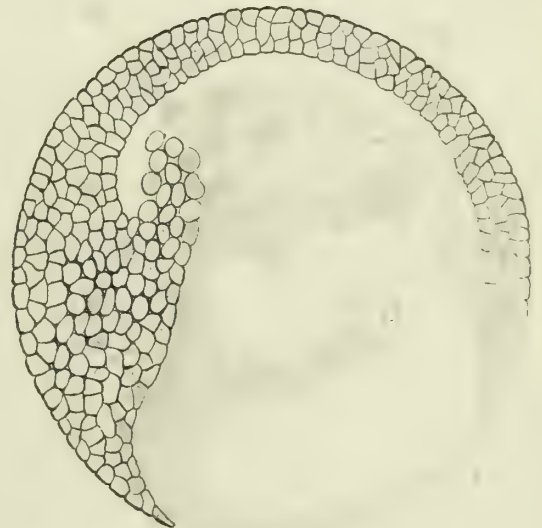
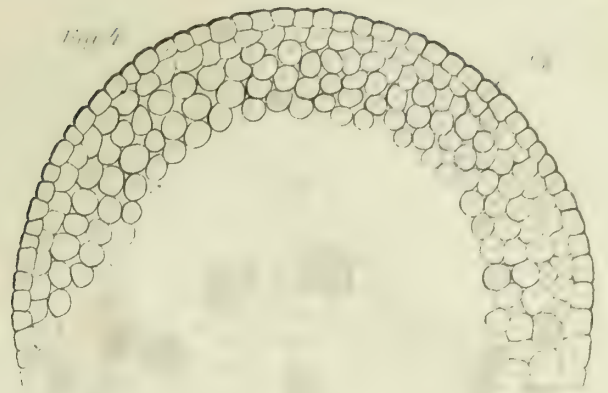
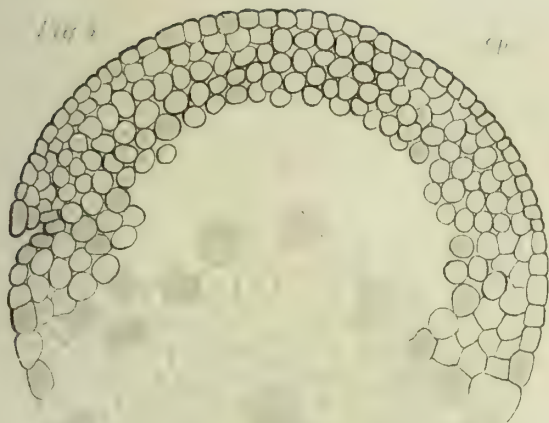
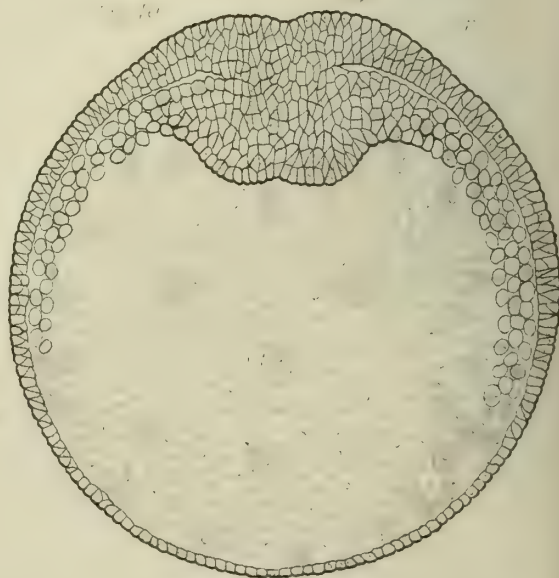
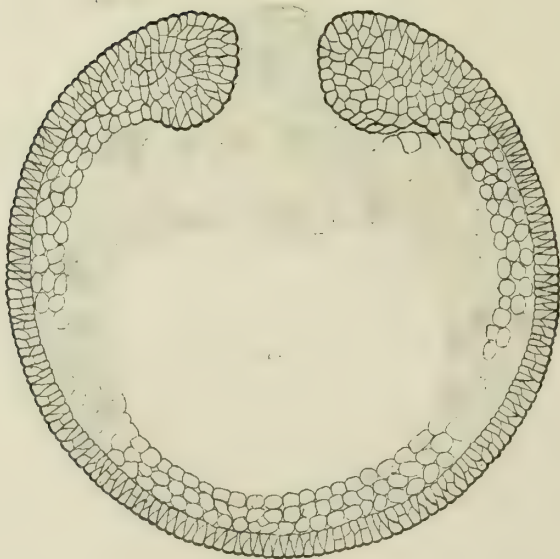
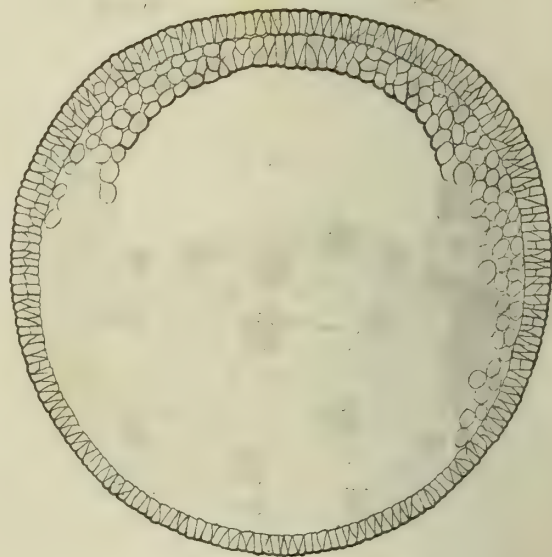
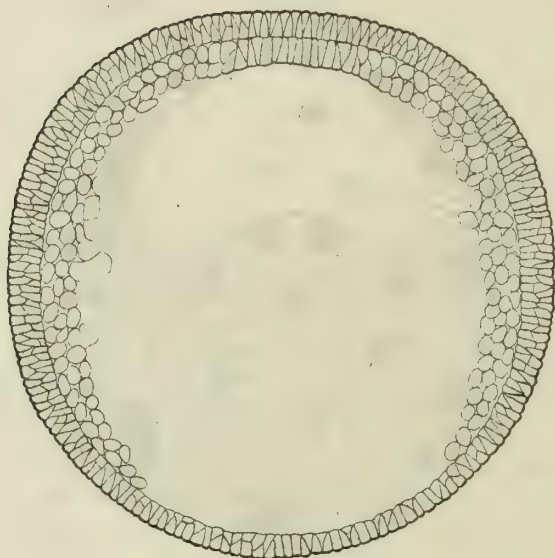
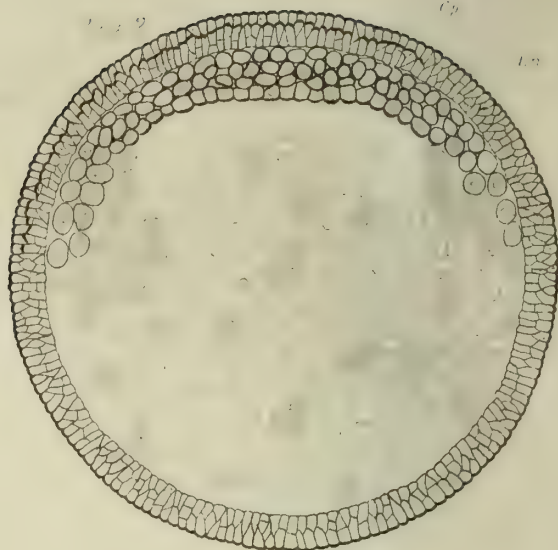
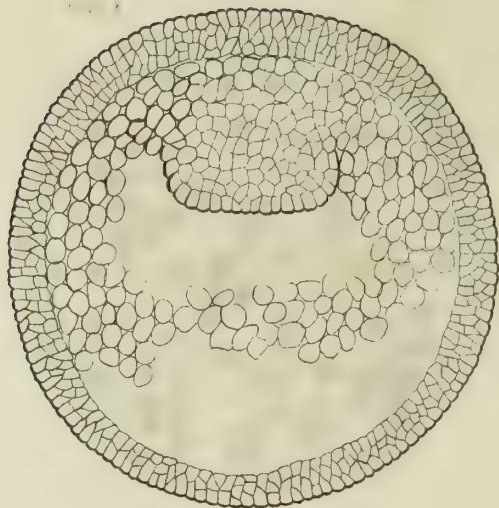
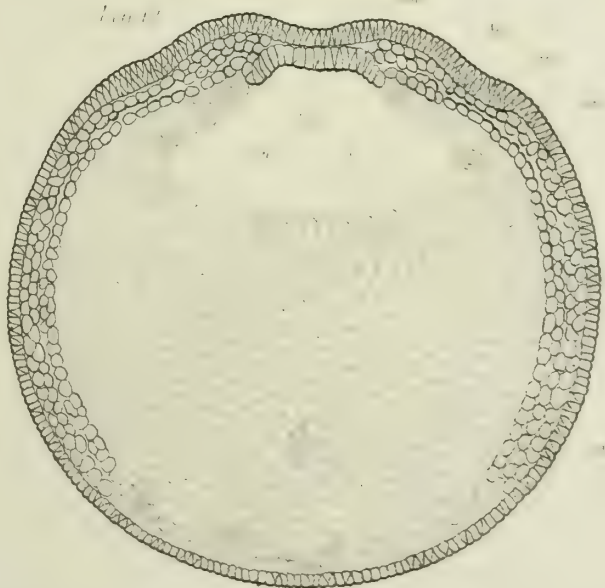
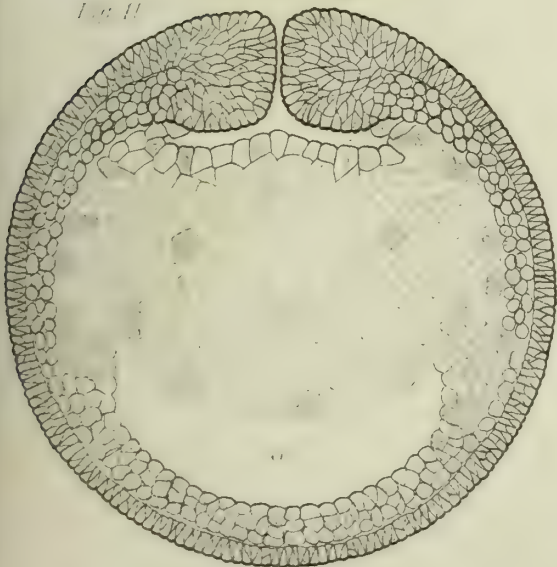
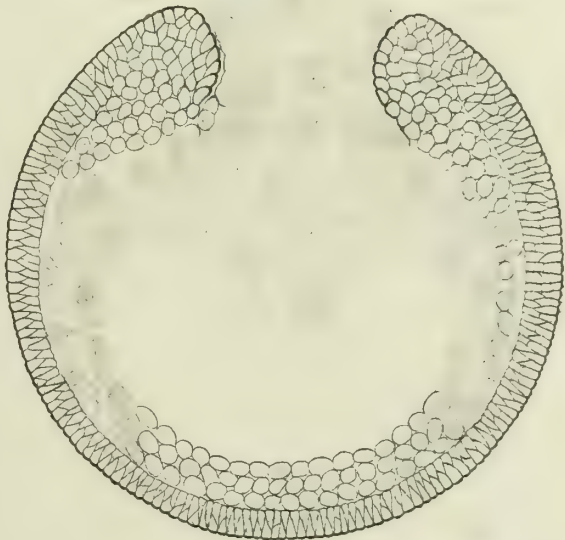
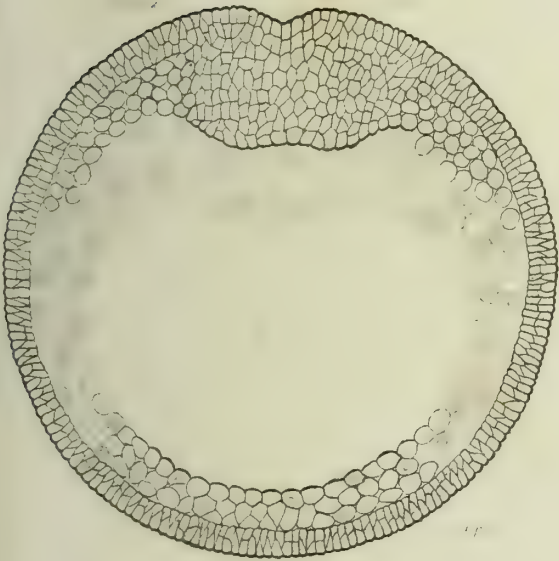
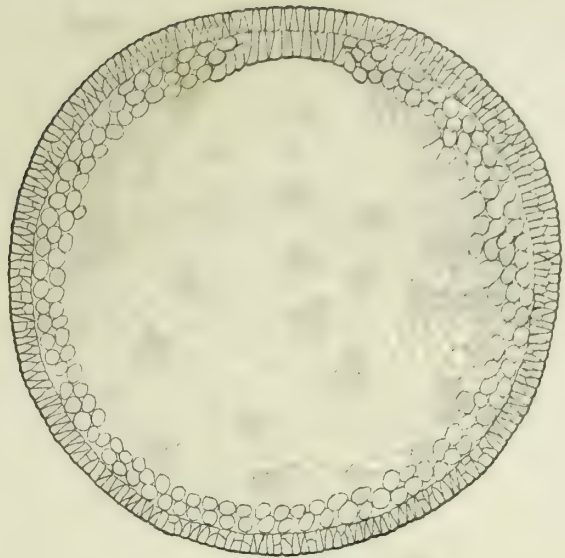
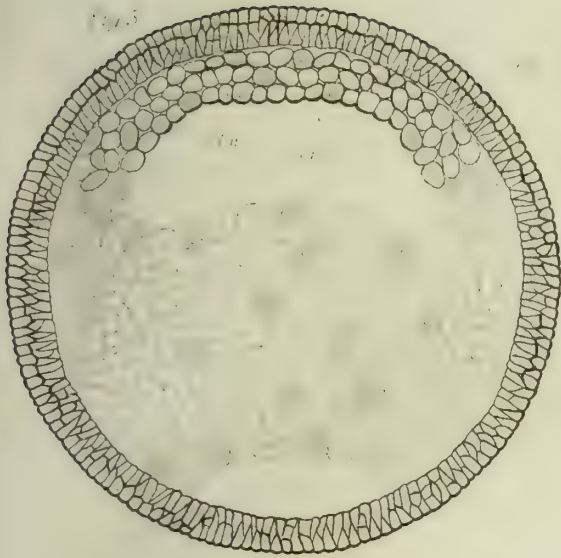
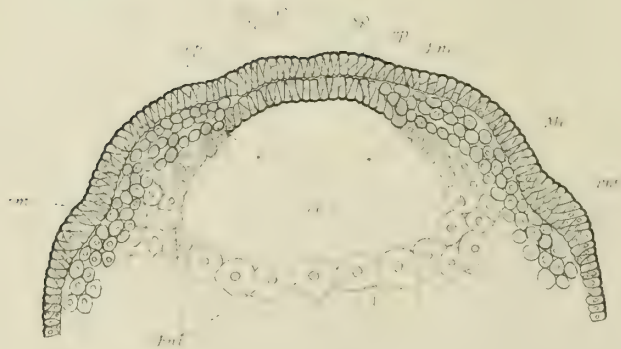
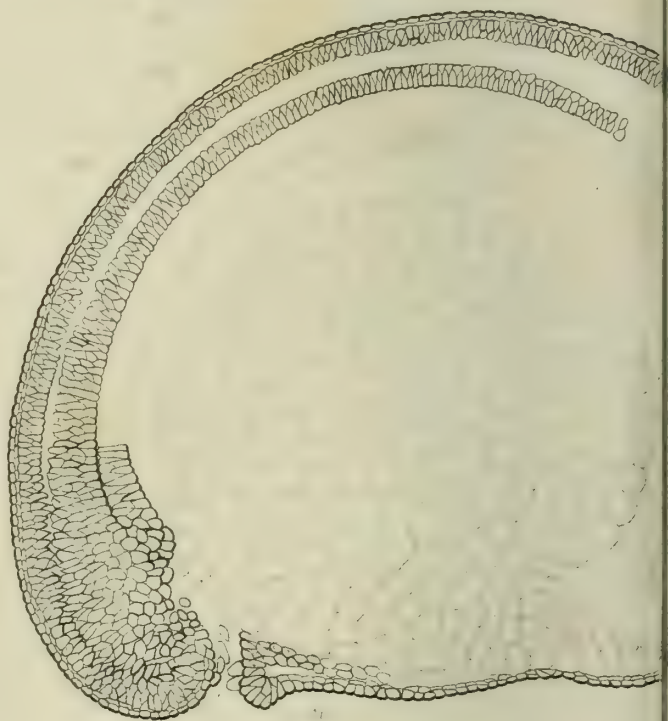
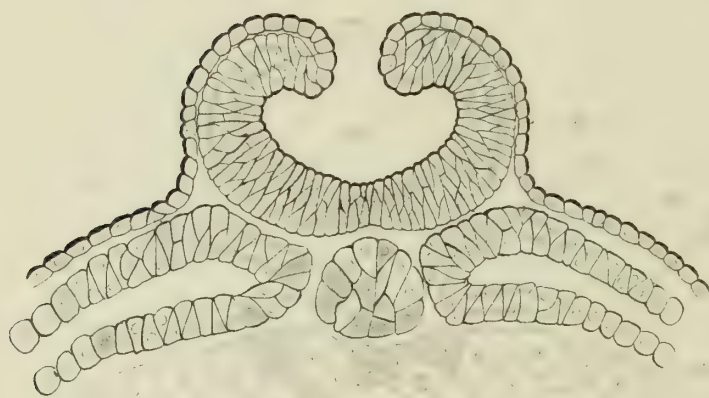
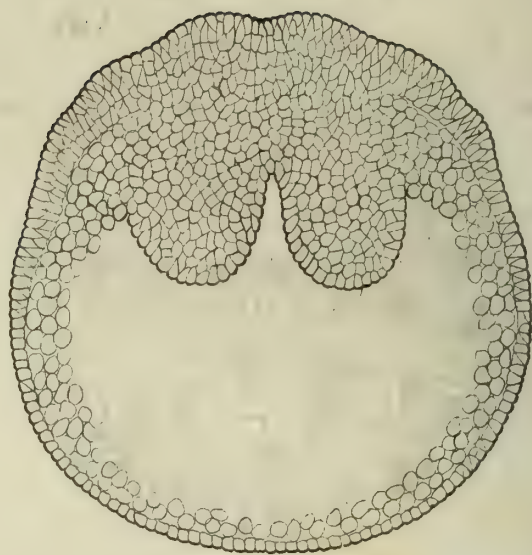
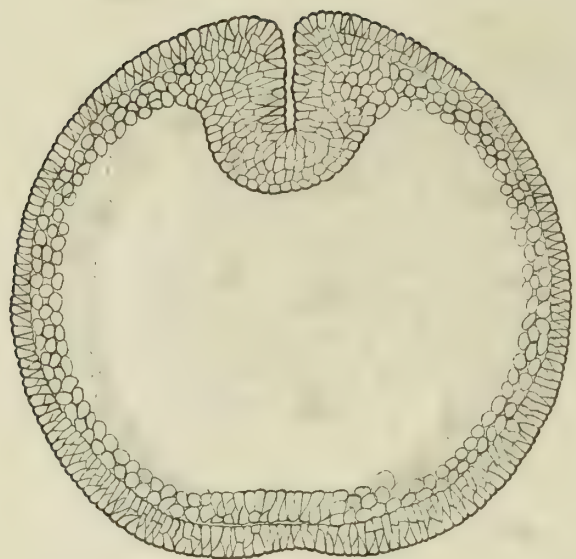
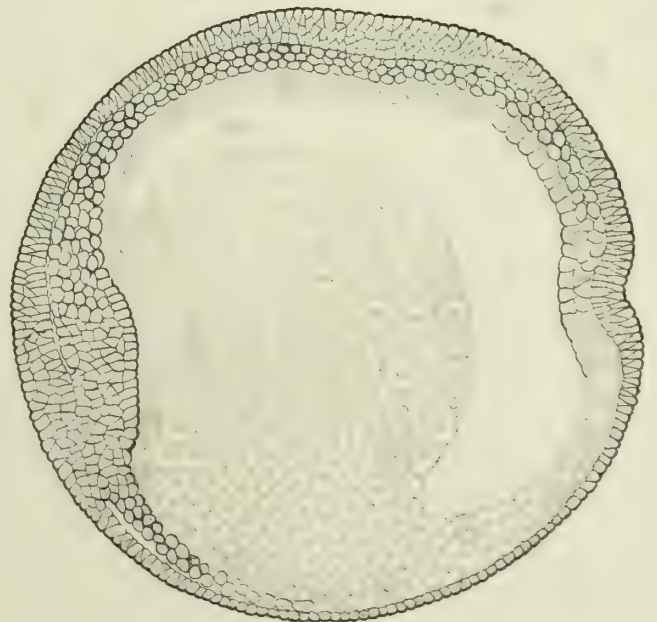
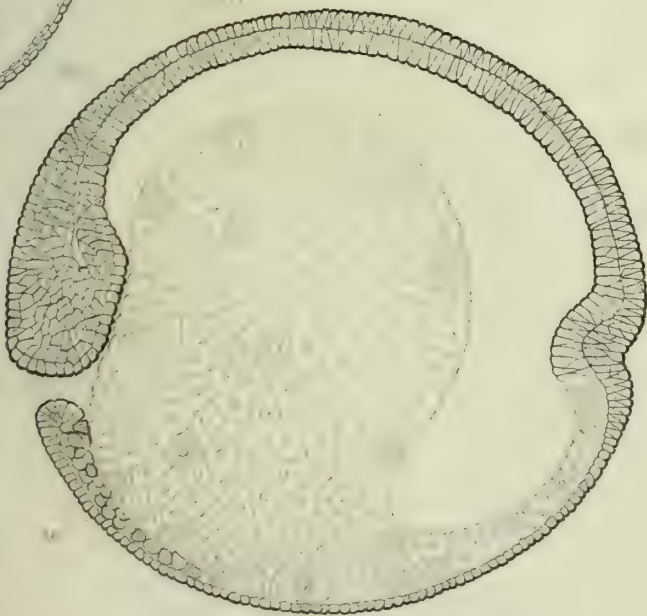
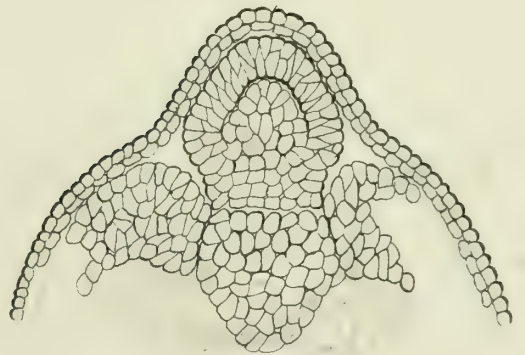
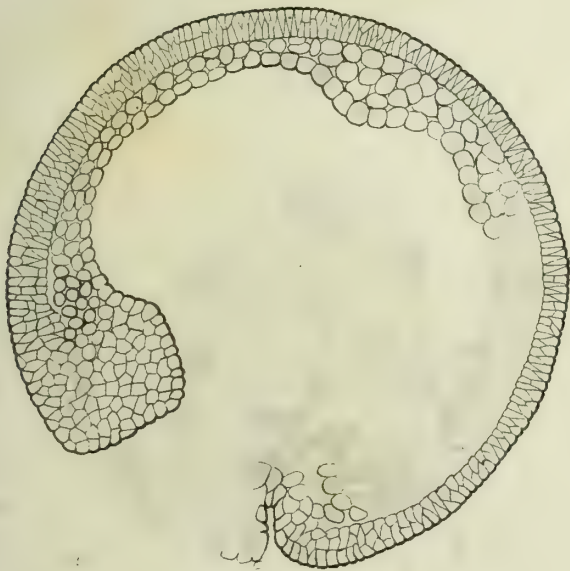
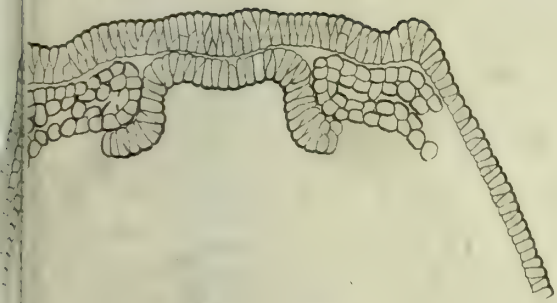
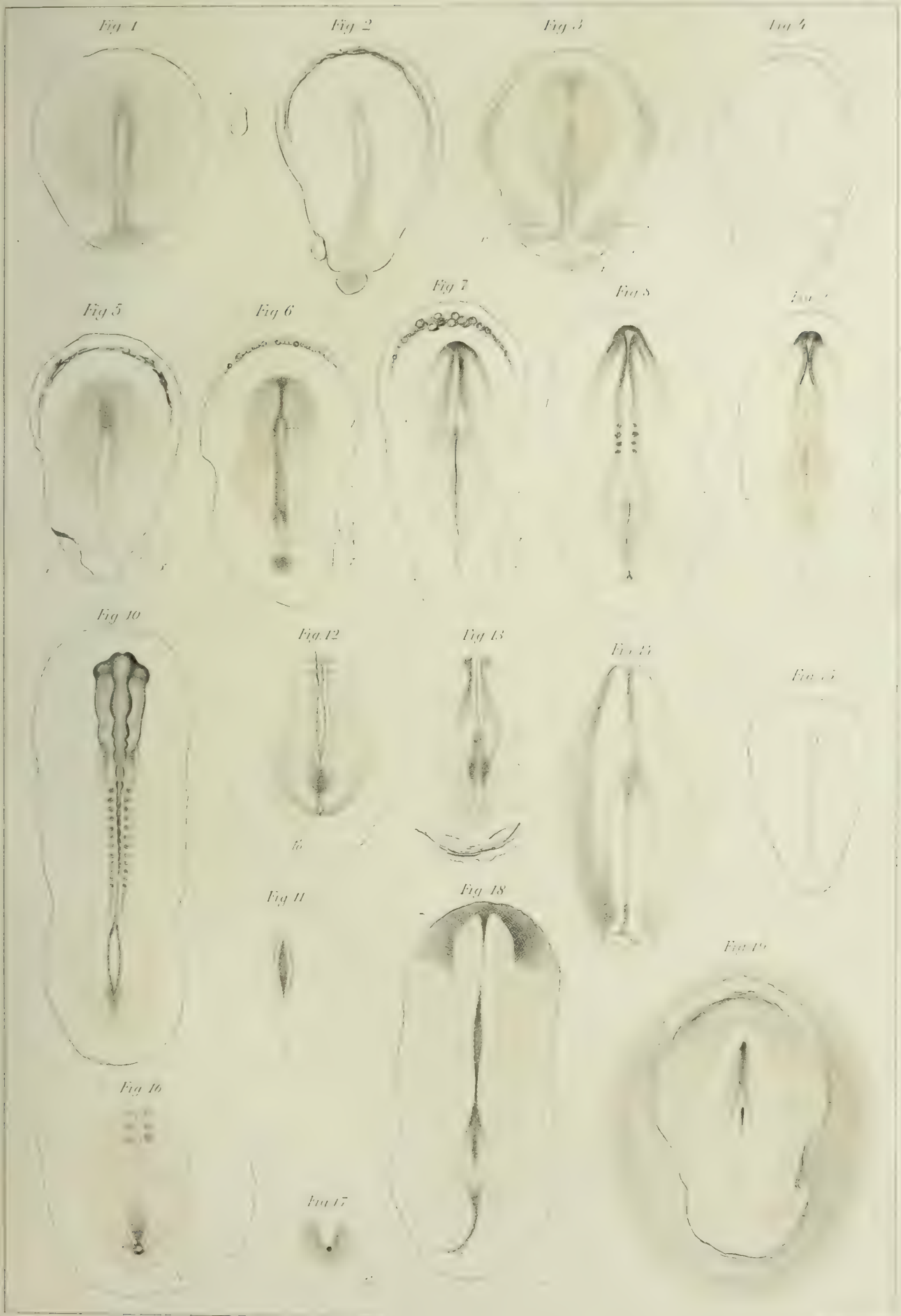
Fig. 1. Area embrionale di pollo con giovane linea primitiva solcata; fissata coll'acido osmico e veduta per trasparenza.
» 2. Blastoderma di pollo con irregolarità nell'area pellucida. Acido osmico, per trasparenza.
» 3. Blastoderma di pollo. Acqua salata, acido osmico, per trasparenza:
r, rilievi laterali opachi dell'area pellucida.
p, piega trasversa dietro questi.
» 4. Blastoderma di pollo. Acqua salata, acido osmico; per incidenza.
» 5. Area embrionale di pollo. Acido osmico; per trasparenza:
x, linea opaca nella parte posteriore dell'area pellucida.
» 6, 7, 8, 9, 10. Aree embrionali di pollo. Acido osmico; per trasparenza.
» 11. Parte posteriore dell'embrione fig. 10, a luce incidente.
» 12. Parte posteriore d'un embrione di colombo con 17-18 protovertebre. Acido osmico; per trasparenza:
fo, fossetta posteriore della linea primitiva.
» 13. Parte posteriore d'un embrione di pollo con 7 protovertebre. Acido osmico; per trasparenza.
» 14. Embrione di pollo. Acido picrico; luce incidente.
» 15. Area pellucida di pollo di cocincina. Acido osmico; luce incidente.
» 16 e 17. Parte posteriore d'un embrione di colombo con 16-17 protovertebre. Acido osmico. La prima per trasparenza; la seconda a luce incidente.
» 18. Embrione della fig. 3, a luce incidente.
» 19. Area embrionale di colombo. Acido osmico; luce incidente.

Tavola VI.

Fig. 1. Sezione trasversa d'un'area embrionale di pollo con giovane linea primitiva solcata, fatta subito al davanti della estremità anteriore di questa. Acido picrico-solforico.
» 2. Sezione che appartiene alla stessa serie della precedente e capita nell'estremità anteriore della linea primitiva.
» 3. Parte della sezione trasversa n. 5 al davanti della linea primitiva del blastoderma fig. 4, tav. V — Zeiss $\frac{2}{J}$, illuminatore Abbe.
» 4. Sezione trasversa *x x* fig. 4, tav. V. *me'*, mesoblasto laterale periferico.
» 5. Sezione obliqua dell'area embrionale fig. 1, tav. V, passante per l'estremo anteriore del processo cefalico.
» 6. Sezione di questa medesima serie, passante per l'estremo posteriore del processo cefalico.
» 7. Sezione longitudinale mediana d'un blastoderma nello stadio della fig. 3, tav. V.
» 8. Sezione trasversa (n. 3) al davanti della linea primitiva del blastoderma di pollo-cocincina rappresentato nella fig. 15, tav. V.
» 9. Sezione trasversa passante per la parte anteriore del seno romboidale d'embrione di anitra con 4 protovertebre:
sp, solco primitivo.
rm, rilievi midollari.
» 10. Porzione laterale della sezione rappresentata in parte nella fig. 11.
» 11. Parte dell'8ª sezione al davanti della linea primitiva del blastoderma fig. 15, tav. V - Zeiss $\frac{1}{F}$.

Fig 4

Ent

G. Bellonci dis

Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.

Memoria del dott. CORRADO SEGRE

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 aprile 1884.

Le omografie, le quali occupano un posto così importante nella geometria proiettiva, paiono essere state finora poco studiate in ispazi lineari a quante si vogliano dimensioni. Quando la corrispondenza omografica è tra due spazi distinti o considerati come tali, il suo studio è assai semplice, riducendosi ad una facile generalizzazione delle proprietà note relative allo spazio a 3 dimensioni. Tale studio equivale analiticamente a quello di una forma bilineare unica, e la classificazione di quelle omografie è ridotta alla considerazione di omografie degeneri dotate di elementi singolari: in tali omografie non vi sono invarianti assoluti. Ma quando si passa a considerare l' omografia tra due spazi ad n dimensioni considerati espressamente come sovrapposti, allora lo studio si complica. Dal punto di vista analitico si hanno, non più una sola, ma due forme bilineari da considerare, vale a dire oltre a quella forma che rappresenta effettivamente la corrispondenza omografica si deve considerare quell' altra forma bilineare, che rappresenta la condizione perchè un punto ed un piano dello spazio considerato siano in posizione unita. La geometria proiettiva delle omografie di spazi sovrapposti coincide così colla teoria analitica invariantiva di una coppia di forme bilineari: la classificazione di quelle omografie nella geometria proiettiva equivale alla classificazione di queste coppie di forme bilineari nell' algebra delle trasformazioni lineari.

Ora il Weierstrass in una Memoria importante e ben nota ha risolto la questione principale della teoria analitica delle coppie di forme bilineari, mostrando quali siano le condizioni necessarie e sufficienti perchè due tali coppie di forme siano identiche dal punto di vista dell'algebra moderna, vale a dire siano trasformabili l' una nell'altra mediante sostituzioni lineari. Traducendo geometricamente l' importante teorema di Weierstrass si ha dunque appunto la classificazione geometrica delle omografie di spazi sovrapposti. Però questa traduzione geometrica non è tanto semplice quanto si potrebbe credere, anzi essa presenta alcune notevoli difficoltà, ed in fatti non crediamo che essa sia stata fatta prima d'ora. Ci pare di aver superato tali difficoltà mediante alcuni teoremi, che conducono ad una distinzione geometrica delle omografie in varie *classi* (corrispondentemente alle varie distribuzioni possibili dei *divisori elementari*) ed alla considerazione degl' invarianti assoluti che corrispondono a ciascuna classe. Per le omografie delle varie classi abbiamo mostrato come la differenza consista nella distribuzione dei punti (o piani) uniti delle omografie stesse; entro ciascuna classe poi le varie omografie hanno la stessa distribuzione dei punti

uniti, ma valori diversi in generale per gl'invarianti assoluti: di questi invarianti si ha un'interpretazione geometrica semplicissima, che fornisce anzi una proprietà importante di tutte le omografie [1]. Aggiungiamo che per queste vale un'altra proposizione notevole, che crediamo nuova, vale a dire ogni omografia particolare gode della proprietà, sia per la distribuzione degli elementi uniti, sia pel significato degl'invarianti assoluti, di corrispondere per dualità a se stessa (quando si scambîno tra loro i due spazi).

Nella 1ª parte di questo lavoro studieremo le omografie tra due spazi considerati come distinti e mostreremo quali siano dal punto di vista proiettivo le varie specie di tali omografie. Con ciò è chiaro che sono pure studiate e classificate le correlazioni tra spazi distinti, perocchè quando due spazi vengono considerati come distinti, i loro elementi appaiono come di natura diversa e quindi prendendo per elementi dell'uno i punti, si possono prendere per elementi dell'altro (corrispondenti a quelli) indifferentemente i punti od i piani, senza dover alterare in alcun modo i ragionamenti od i calcoli. Nella 2ª parte studieremo le omografie tra due spazi sovrapposti, le proprietà dei loro *spazi fondamentali* di punti o di piani uniti, e mostreremo come, senza fare alcun uso di equazioni canoniche variabili da caso a caso, colla sola interpretazione geometrica data dal teorema di Weierstrass, si possa fare la classificazione di quelle omografie ed assegnarne gl'invarianti assoluti [2]. Infine nella 3ª parte applicheremo le cose dette alla classificazione delle omografie non degeneri di due spazi ordinari, cioè a 3 dimensioni, sovrapposti, e di due piani ordinari sovrapposti [3].

[1] Da un corollario del teorema di Weierstrass relativo alle coppie di forme bilineari simmetriche (o forme quadratiche) si può dedurre in modo analogo a quello tenuto nel presente lavoro la classificazione delle coppie di quadriche in uno spazio lineare qualunque, cosa che abbiamo fatta in un paragrafo della nostra dissertazione di laurea. (V. *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* nelle Memorie della R. Acc. d. scienze di Torino, serie 2ª, tomo XXXVI, pag. 59). Però siccome la caratteristica e gl'invarianti assoluti del sistema di due quadriche qualunque coincidono colla caratteristica e gl'invarianti assoluti dell'omografia risultante dalla combinazione delle polarità rispetto a queste quadriche (V. la 2ª nota al n. 11), così si può ritenere la classificazione delle coppie di quadriche come identica in sostanza alla classificazione delle omografie di spazi sovrapposti.

[2] Il sig. Veronese nella Memoria *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions den lettres* etc. (Annali di matematica, serie 2ª, tom. XI, pag. 93-236) considerò, oltre alla omografia più generale di due spazi lineari sovrapposti ad n dimensioni, certe particolari omografie, da esso chiamate *collineazioni* di varie specie, e la cui caratteristica è $[(\overbrace{11\ldots1}^{h_1})\ (\overbrace{11\ldots1}^{h_2})]$, essendo $h_1 + h_2 = n + 1$. La loro proprietà principale, dimostrata altrimenti dal Veronese, risulta immediatamente dalla nostra teoria (v. n. 18).

[3] Le varie specie di omografie del piano e dello spazio ordinario furono già in parte esaminate da vari autori, come Hirst, Sturm, Fiedler, Clebsch e Gordan, Reye, Battaglini. Ma crediamo che la loro classificazione completa sia fatta per la prima volta in un lavoro del nostro carissimo amico dott. Gino Loria, che verrà presto pubblicato nel Giornale di matematiche (Vol. XXII). Tuttavia essendo il metodo da noi seguìto per ottenerla affatto diverso da quello seguìto in quel lavoro, ed essendovi anche tra i nostri risultati l'enumerazione degl'invarianti assoluti relativi ad ogni specie di omografia, abbiamo creduto bene di esporre quella classificazione alla fine di questa nostra Memoria.

I.

1. Rappresentino le x_i $(i=1,2,\dots n+1)$ coordinate omogenee di punti x in uno spazio lineare ad n dimensioni S, e le ξ'_k $(k=1,2,\dots n+1)$ coordinate omogenee di *piani* (spazi lineari ad $n-1$ dimensioni) ξ' in un altro spazio lineare ad n dimensioni S'. Allora un'equazione bilineare qualunque nelle x_i e ξ'_k,

$$(1)\qquad \sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0\,,$$

rappresenta un'*omografia*, vale a dire una corrispondenza in cui ad un punto qualunque x di S corrisponde in S' il punto x' avente per equazione in coordinate ξ'_k di piani la (1), cioè il punto di coordinate:

$$(2)\qquad \rho x'_k = \sum_i a_{ik} x_i\,,$$

e similmente ad un piano qualunque ξ' di S' corrisponde in S il piano ξ avente la (1) per equazione in coordinate x_i di punti, cioè il piano di coordinate:

$$(3)\qquad r\xi_i = \sum_k a_{ik} \xi'_k\,.$$

Viceversa, se è dato in S' un punto qualunque x', le coordinate del punto x corrispondente di S si avranno risolvendo le equazioni (2) rispetto alle x_i. Supponendo adunque anzitutto che il determinante

$$\mathrm{A} = \left| a_{ik} \right|,$$

che diremo determinante dell'omografia, non sia nullo, e chiamando A_{ik} il subdeterminante complementare di a_{ik} in A, avremo:

$$(2')\qquad \sigma x_i = \sum_k \mathrm{A}_{ik} x'_k\,,$$

e similmente risolvendo le (3) si ha che il piano ξ' corrispondente al piano ξ sarà dato da:

$$(3')\qquad s\xi'_k = \sum_i \mathrm{A}_{ik} \xi_i\,.$$

Sommando tra loro le (2') moltiplicate per ξ_i, ovvero le (3') moltiplicate per x'_k, si ha per equazione del punto x corrispondente ad x', ovvero del piano ξ' corrispondente a ξ, l'equazione:

$$(1')\qquad \sum_{ik} \mathrm{A}_{ik} \xi_i x'_k = 0\,.$$

Questa equazione bilineare rappresenta adunque l'omografia considerata in modo analogo alla equazione (1). Abbiamo dunque vari modi, sostanzialmente identici, di rappresentare analiticamente la stessa omografia. Si può partire, come abbiamo fatto, da un'equazione bilineare e dedurne le relazioni lineari tra le coordinate di elementi corrispondenti; ma si può anche partire da tali relazioni lineari e dedurne quell'equazione bilineare. Due forme bilineari aggiunte l'una dell'altra rappresenteranno una stessa omografia, ma con uno scambio dei due spazi.

2. La corrispondenza tra i punti x, x' e i piani ξ, ξ' dei due spazi espressa dalle equazioni lineari (2), (2') e (3), (3') è evidentemente tale che, se x ovvero ξ descrivono spazi lineari ad un numero qualunque di dimensioni di punti o pi piani contenuti in S, anche x' o ξ' descriveranno spazi lineari ad egual numero di

dimensioni contenuti in S', e viceversa. Inoltre anche tra gli elementi di questi spazi corrispondenti così descritti vi sarà corrispondenza omografica. In particolare le punteggiate ed i fasci di piani corrispondenti nei due spazi si corrisponderanno proiettivamente. Più in generale ad uno spazio algebrico di qualunque specie a un numero qualunque di dimensioni contenuto in S, corrisponderà in S' uno spazio algebrico ad altrettante dimensioni e dotato degli stessi caratteri (ordine, classe, singolarità, ecc.), come risulta immediatamente dalla linearità delle equazioni che determinano la omografia.

3. Le cose esposte si modificano quando il determinante A si annulla: in tal caso l'omografia non costituisce più una corrispondenza univoca tra i due spazi. Supponiamo in generale che il determinante A dell'omografia sia nullo insieme coi suoi subdeterminanti degli ordini $n, n-1, \dots n-h+2$. Allora la risoluzione delle equazioni (2) e (3) rispetto alle x_i e alle ξ'_h non si potrà più effettuare nel modo prima usato. In tal caso è noto che il sistema delle $n+1$ equazioni lineari:

$$\sum_i a_{ik} y_i = 0 \tag{4}$$

è h volte indeterminato, è quindi esiste in S uno spazio lineare P_{h-1} ad $h-1$ dimensioni di punti y che lo soddisfano (per $h=1$ un punto solo), spazio che diremo *singolare* per l'omografia. E similmente le equazioni

$$\sum_k a_{ik} \eta'_k = 0 \tag{5}$$

saranno soddisfatte da tutti i piani η' dello spazio S' appartenenti ad un sistema lineare *singolare* Π'_{h-1} ad $h-1$ dimensioni. Ciò posto siano x, x' due punti corrispondenti qualunque dell'omografia, legati perciò dalle equazioni (2). Moltiplicando queste per η'_k e sommandole si ha:

$$\rho \sum_k x'_k \eta'_k = \sum_i x_i \sum_k a_{ik} \eta'_k$$

e quindi se η' è un piano singolare qualunque di S', cioè un piano di Π'_{h-1}, sicchè in virtù delle (5) il secondo membro si annulli, dovrà essere:

$$\sum_k x'_k \eta'_k = 0\,, \quad \text{oppure} \quad \rho = 0\,. \tag{6}$$

Dunque ad un punto qualunque x di S corrisponde ancora per le (2) un punto determinato x', il quale però starà in virtù della (6) su tutti i piani di Π'_{h-1}, e quindi sul sostegno di questo; salvo quando il punto x sia singolare, cioè appartenga allo spazio singolare P_{h-1}, nel qual caso soltanto, le equazioni (2) essendo soddisfatte per $\rho=0$ qualunque siano le x'_k, il punto corrispondente x' è completamente indeterminato. Se invece è dato in S' il punto x' di cui si vuole in S il punto x corrispondente, accadrà che se x' non sta sul sostegno di Π'_{h-1}, cioè su tutti i piani singolari η', dovrà essere in virtù delle (6): $\rho=0$ e allora le equazioni (2) confrontate colle (4) mostrano che ad x' corrispondono in S tutti i punti y dello spazio singolare P_{h-1} e solo questi; mentre se il punto x' sta simultaneamente su tutti i piani di Π'_{h-1}, allora le equazioni (2), essendo (in forza delle (5) e (6)) legate da h identità distinte, formeranno un sistema h volte indeterminato, tale che i punti x che lo soddisfanno formeranno uno spazio lineare ad h dimensioni, cioè un S_h. Questo S_h dovrà necessariamente passare per P_{h-1}, poichè è

chiaro che, qualunque sia x', le equazioni (2) tra le x_i sono sempre soddisfatte da tutti i punti y determinati dalle (4). Similmente si vede dalle equazioni (3) mediante le (4) e (5) che ad un piano qualunque ξ' di S' corrisponde in S un piano ξ determinato passante per P_{h-1}, salvo quando quel piano ξ' sia singolare, cioè appartenga a Π'_{h-1}, nel qual caso il piano corrispondente ξ è affatto indeterminato. Viceversa ad un piano qualunque ξ di S corrispondono in S' soltanto tutti i piani η' dello spazio singolare Π'_{h-1} definito dalle (5), ma se ξ passa per lo spazio singolare di punti P_{h-1}, allora i piani ξ' corrispondenti formano un sistema ad h dimensioni, cioè un Σ'_h, passante per Π'_{h-1}.

4. Una tale omografia si dirà *omografia degenere* o *singolare* di h^{esima} specie. Riassumendo, essa è dunque dotata di uno spazio singolare di punti ad $h-1$ dimensioni P_{h-1} in S e di uno spazio singolare di piani ad $h-1$ dimensioni Π'_{h-1} in S', e stabilisce le seguenti corrispondenze:

Ad un punto di S in generale . . .	un punto di S' posto sul sostegno di Π'_{h-1}
» un punto qualunque di S' . . .	tutti i punti in S di P_{h-1}
« un punto di S su P_{h-1}	tutti i punti di S'
» un punto di S' sul sostegno di Π'_{h-1}	i punti di un S_h passante per P_{h-1}
Ad un piano qualunque di S . . .	tutti i piani di Π'_{h-1}
« un piano qualunque di S' . . .	un piano di S passante per P_{h-1}
« un piano di S passante per P_{h-1} .	i piani di un Σ'_h passante per Π'_{h-1}
« un piano di S' appartenente a Π'_{h-1}	tutti i piani di S.

È facile dedurne quali enti corrispondano in ciascuno dei due spazi S, S' a sistemi lineari qualunque di punti o di piani contenuti nell'altro. Notiamo piuttosto che gli S_h passanti per P_{h-1} sono gli elementi di uno spazio lineare ad $n-h$ dimensioni, il quale è legato (come risulta tosto dalle proprietà viste delle omografie) da un'omografia non degenere allo spazio lineare ad $n-h$ dimensioni di punti costituente il sostegno di Π'_{h-1}, in guisa che in quest'omografia ad ogni punto di questo sostegno corrisponde quell' S_h che, considerato come luogo di punti, vedemmo corrispondergli nell'omografia degenere considerata tra gli spazi S e S'. Correlativamente quest'ultima omografia determina un' omografia non degenere tra lo spazio lineare ad $n-h$ dimensioni dei Σ'_h passanti per Π'_{h-1} e quello dei piani passanti per P_{h-1}. Invece di quei Σ'_h considerando i loro sostegni, è chiaro che essi stanno sul sostegno di Π'_{h-1} e quest'osservazione mostra facilmente che l' omografia non degenere ora considerata e quella che le corrisponde per dualità, sono conseguenza immediata l'una dell'altra.

Viceversa, abbiansi negli spazi S, S' due sistemi lineari ad $h-1$ dimensioni di punti e di piani P_{h-1}, Π'_{h-1}, e si stabilisca un'omografia non degenere tra gli S_h passanti per P_{h-1} ed i punti del sostegno di Π'_{h-1}, e quindi anche tra i piani passanti per P_{h-1} e (gli S'_{n-h-1} posti su quel sostegno, vale a dire) i Σ'_h passanti per Π'_{h-1}. Sarà così determinata tra S, S' un'omografia degenere di h^{esima} specie, in cui P_{h-1}, Π'_{h-1} sono gli spazi singolari, a un punto del sostegno di Π'_{h-1} corrispondono in S tutti i punti del corrispondente S_h passante per P_{h-1}, e ad un punto qualunque di S' corrispondono solo tutti i punti di P_{h-1}; ecc.

5. L'omografia tra i due spazi distinti S, S' rappresentata dall' equazione bilineare

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i \xi'_k = 0$$

rimane proiettiva a se stessa se si fanno per le x_i e le ξ'_k due sostituzioni lineari qualunque, affatto indipendenti tra loro e di moduli non evanescenti. Queste due sostituzioni si possono anche considerare come cambiamenti dei sistemi di riferimento dei due spazi S, S'. Ora esse si possono sempre determinare in modo che quella equazione prenda quest' altra forma (*canonica*):

$$\sum_{i} a_i x_i \xi'_i = 0 .$$

In fatti è chiaro anzitutto che questa forma è caratteristica pel caso in cui gli $n+1$ punti (o piani) di riferimento dello spazio S, corrispondano in quell' omografia agli $n+1$ punti (o piani) omologhi di riferimento dello spazio S'. Ora si può sempre fare una tal scelta di punti di riferimento, poichè la sola condizione da soddisfare è che in ciascuno dei due spazi S, S' quegli $n+1$ punti siano indipendenti, cioè non stiano su un piano; condizione a cui si soddisfa, nel caso di un' omografia non degenere prendendo nell' uno dei due spazi gli $n+1$ punti in modo da soddisfarla, con che anche i punti corrispondenti dell' altro spazio la soddisferanno, e nel caso di un' omografia degenere di h^{esima} specie dotata di uno spazio singolare di punti P_{h-1} in S e di uno spazio singolare di piani Π'_{h-1} in S' prendendo degli $n+1$ punti di S h su P_{h-1} e i rimanenti $n-h+1$ ad arbitrio fuori di P_{h-1}, con che i punti corrispondenti di S' saranno (n. 4) risp. h punti arbitrari di S' non posti sul sostegno di Π'_{h-1} ed $n-h+1$ punti determinati di questo sostegno.

Ogni omografia tra due spazi distinti S, S' si può dunque sempre rappresentare con un'equazione di quella forma particolare, e anzi dalle cose dette dianzi segue che se quell' omografia è degenere di h^{esima} specie lo spazio singolare di punti dello spazio S congiungerà h dei nuovi punti di riferimento di S, e lo spazio singolare di piani di S' avrà il sostegno determinato dal dover congiungere gli $n-h+1$ punti di riferimento di S' non omologhi a quegli h. Ciò risulta pure dal fatto che per definizione l'omografia degenere di h^{esima} specie essendo caratterizzata dall' annullarsi del suo determinante e dei suoi subdeterminanti d' ordine $n-h+2$, affinchè quell'equazione rappresenti una tale omografia occorre e basta che si annullino h dei suoi coefficienti a_i. Quindi un' omografia degenere di h^{esima} specie può sempre rappresentarsi con un' equazione della forma:

$$\sum_{i=1}^{i=n-h+1} a_i x_i \xi'_i = 0 ,$$

donde si scorge che lo spazio singolare di punti in S e quello di piani in S', sono composti di quei punti e quei piani che soddisfanno risp. alle equazioni $x_i = 0$, $\xi'_i = 0$, per tutti i valori di i da 1 ad $n-h+1$.

È chiaro che senza alterare i sistemi di riferimento si può anche scrivere quell' equazione così:

$$\sum_{i=1}^{i=n-h+1} x_i \xi'_i = 0$$

Possiamo dunque conchiudere: Tutte le omografie tra spazi lineari distinti ad n

dimensioni o non degeneri, oppure degeneri della stessa specie, sono identiche dal punto di vista proiettivo. Od in altri termini: Un' omografia tra spazi distinti non ha invarianti assoluti.

II.

6. Due equazioni bilineari tra le x_i e le ξ'_k:

(1) $$A_{x\xi'} \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x_i \xi'_k = 0\,, \qquad B_{x\xi'} \equiv \sum_{i,k} b_{ik} x_i \xi'_k = 0$$

rappresentano due omografie tra gli spazi S ed S' e quindi anche un'omografia tra gli elementi dello spazio S. Consideriamo in fatti un punto qualunque x di S e cerchiamone il punto corrispondente x' di S' nell' omografia $A_{x\xi'}$, e poi di questo il punto corrispondente y di S nell' omografia $B_{x\xi'}$. Se, come noi supporremo, il determinante di questa non è nullo, è chiaro che in generale dato il punto x sarà individuato nel modo detto il punto y. e la corrispondenza che così si ottiene nello spazio S tra i suoi punti x, y è omografica, poichè si può rappresentare colla trasformazione lineare:

(2) $$\sum_i a_{ik} x_i = \rho \sum_i b_{ik} y_i\,,$$

e queste equazioni sono, per l'ipotesi fatta, risolubili rispetto alle y_i. In tal modo dunque le equazioni (1) servono a rappresentarci un'omografia tra due spazi sovrapposti ad S mediante la considerazione di uno spazio ausiliario S'.

7. Cerchiamo i punti *uniti* di quest' omografia, cioè quei punti nei quali coincidono due punti corrispondenti x, y. Perchè un punto x sia unito dovrà soddisfare alle equazioni (2) in cui si ponga $y_i = x_i$, cioè:

(3) $$\sum_i (a_{ik} - \rho b_{ik}) x_i = 0\,.$$

Ora queste equazioni lineari omogenee nelle x_i dànno anzitutto:

(4) $$\Delta(\rho) \equiv \left| a_{ik} - \rho b_{ik} \right| = 0\,.$$

Quest'equazione di grado $n+1$ in ρ avrà $n+1$ radici. Nel caso più generale queste radici saranno tutte distinte e ciascuna di esse sostituita nelle (3) renderà questo sistema di equazioni atto a determinare un punto x, cosicchè vi saranno in generale $n+1$ punti uniti in un'omografia tra due spazi lineari sovrapposti ad n dimensioni. Ma potrà accadere che l'equazione $\Delta(\rho) = 0$ abbia radici multiple e che alcune di queste annullino anche tutti i subdeterminanti di un certo ordine del determinante $\Delta(\rho)$. Poniamo ad esempio che la radice ρ' annulli anche tutti i subdeterminanti d'ordine $n-h+2$ (e quindi anche quelli d'ordine superiore). Allora ponendo nelle equazioni (3) $\rho = \rho'$, è chiaro che esse formeranno un sistema h volte indeterminato e determineranno quindi non un solo punto x, ma uno spazio lineare ad $h-1$ dimensioni di punti uniti. Tutti i vari spazi lineari di punti uniti, che così corrispondono alle diverse radici distinte di $\Delta(\rho)$, e di cui alcuni potranno ridursi a punti isolati, si diranno *spazi fondamentali di punti* dell' omografia (¹).

(¹) Questa denominazione fu già usata in questo senso dal Veronese (loc. cit. pag. 115).

8. A questi spazi fondamentali si può anche giungere nel seguente modo, che ci darà anche altri risultati. Consideriamo l'omografia tra gli spazi S, S' definita dall'equazione bilineare

$$(5) \qquad A_{x\xi'} - \rho B_{x\xi'} \equiv \sum_{i,k} (a_{ik} - \rho b_{ik}) x_i \xi'_k = 0,$$

dove a ρ si dia un valor qualunque. È chiaro che ad un piano qualunque ξ' di S' corrisponde con quest'omografia nello spazio S un piano, che col variare di ρ descrive un fascio, avendo per due sue posizioni (corrispondenti a $\rho = 0$ e $\rho = \infty$) i due piani ξ, η corrispondenti a ξ' nelle omografie (1). Se si fissano ad arbitrio due valori qualunque per ρ, le due corrispondenti omografie (5) determineranno colla loro combinazione un'omografia in S, cosicchè si hanno in tal modo ∞^2 omografie in S. Diremo che la (5) rappresenta col variar di ρ un *fascio* di omografie tra gli spazi S, S'; e noi vediamo che questo fascio determina nello spazio S un *complesso* di *assi* di fasci di piani, ciascuno dei quali contiene tutti i piani corrispondenti ad un piano di S' rispetto alle omografie del fascio. L'equazione (5) mostra che questi fasci di piani corrispondono proiettivamente al fascio di omografie (cioè alla serie dei valori di ρ) e quindi anche tra loro. Scelti ad arbitrio in ciascuno di essi due piani corrispondenti a due determinate omografie del fascio, essi si corrisponderanno tra loro in una omografia di spazi sovrapposti ad S, la quale risulta dalla combinazione di quelle due omografie tra S, S'.

9. Ciò posto proponiamoci di cercare tra le omografie del fascio (5) quelle che sono degeneri. Se per un determinato valore di ρ l'omografia rappresentata dalla (5) è degenere di h^{esima} specie, sarà (n. 3):

$$\Delta(\rho) \equiv \left| \, a_{ik} - \rho b_{ik} \, \right| = 0,$$

ed anzi del determinante $\Delta(\rho)$ si annulleranno anche tutti i subdeterminanti di $(n-h+2)$esimo ordine. Abbiamo visto che una tale omografia singolare avrà nello spazio S uno spazio lineare singolare di punti P_{h-1}, composto di tutti quei punti che soddisfanno le equazioni

$$\sum_i (a_{ik} - \rho b_{ik}) x_i = 0.$$

Confrontando colle equazioni (3) e (4) si vede dunque che ogni spazio fondamentale di punti dell'omografia prima considerata tra punti x, y dello spazio S, è lo spazio singolare di punti di una corrispondente omografia degenere del fascio (5). E che realmente un tale spazio singolare sia fondamentale per la omografia determinata in S dalla combinazione di due omografie qualunque del fascio (5) è chiaro, poichè tutte quelle ∞^2 omografie di S hanno evidentemente gli stessi punti uniti e quindi gli stessi spazi fondamentali. Ora se si prende un punto qualunque x dello spazio singolare dell'omografia degenere del fascio, corrispondente ad un certo valore ρ' di ρ, e se ne trova il corrispondente x' in S' rispetto ad un'altra omografia qualunque ρ_1 del fascio, a questo punto corrisponderà di nuovo x rispetto a quell'omografia degenere; cosicchè x sarà un punto unito della omografia risultante in S dalla combinazione delle omografie ρ' e ρ_1, e quindi anche di tutte le ∞^2 omografie considerate.

Tutti gli ∞^n fasci di piani determinati in S dalle coppie di piani corrispondenti in quelle ∞^2 omografie, vale a dire che contengono i piani corrispondenti in S ai piani dello spazio S′ rispetto alle omografie del fascio, conterranno anche i piani corrispondenti rispetto alle omografie degeneri di questo, piani che passano per gli spazi singolari di punti corrispondenti a queste omografie. Dunque il complesso degli assi che sono sostegni di quegli ∞^n fasci, si compone di assi *secanti* tutti gli spazi fondamentali di punti delle ∞^n omografie considerate in S; inoltre i piani che da quegli assi proiettano tutti questi spazi formano gruppi tutti proiettivi tra loro e proiettivi al gruppo delle omografie singolari del fascio (5), cioè al gruppo delle radici dell'equazione $\Delta(\rho)=0$.

10. Data nello spazio S l'omografia rappresentata dalle equazioni (1), si può, ove i determinanti di queste non siano nulli, intenderla rappresentata anche dalle forme aggiunte:

$$\Sigma A_{ik}\xi_i x'_k=0, \quad \Sigma B_{ik}\xi_i x'_k=0,$$

e da questo punto di vista si possono fare ragionamenti analoghi a quelli svolti nei numeri precedenti ed ottenere risultati correlativi a quelli. Anzitutto si troverà che i piani *uniti* di quell'omografia dello spazio S formano vari *spazi fondamentali di piani* di quest'omografia, ciascuno dei quali si compone di piani ξ soddisfacenti alle equazioni

$$\sum_i (A_{ik}-rB_{ik})\xi_i=0.$$

dove per r si ponga una radice dell'equazione

$$\left| A_{ik}-rB_{ik} \right|=0.$$

Considerando poi la *schiera* (¹) delle omografie tra gli spazi S e S′ rappresentate dall'equazione

$$\sum_{i,k}(A_{ik}-rB_{ik})\xi_i x'_k=0,$$

dove si faccia variare il parametro r, in essa vi saranno delle omografie degeneri corrispondenti appunto alle diverse radici della suddetta equazione in r, ed aventi per spazi singolari di piani in S appunto gli spazi fondamentali di piani dell'omografia considerata di due spazi sovrapposti ad S. In quella schiera di omografie tra S ed S′, ad ogni punto x' di S′ corrispondono ∞^1 punti di S formanti un *raggio*, sicchè si avrà in S un *complesso* di raggi, tutti punteggiati proiettivamente tra loro e alla schiera di omografie. Combinando a due a due le omografie tra S e S′ di

(¹) È bene avvertire che una schiera di omografie non è sostanzialmente diversa da un fascio di omografie, poichè si muta in un fascio se si scambiano i due spazi S, S′. Così l'equazione $\Sigma(a_{ik}-\rho b_{ik})x_i\xi'_k=0$ pei vari valori di ρ determina ∞^1 omografie tra gli spazi S, S′, tali che i piani corrispondenti in S ad ogni piano ξ' di S′ formano un fascio, ed i punti corrispondenti in S′ ad ogni punto x di S formano un raggio punteggiato; ma ad ogni punto di S′ corrispondono in S i punti di una *curva* razionale (*normale* per lo spazio S) d'ordine n e correlativamente ad ogni piano di S corrispondono in S′ i piani di una *sviluppabile* razionale di classe n. Noi diciamo che quell'equazione determina un *fascio*, oppure una *schiera* di omografie tra gli spazi S, S′, secondo che abbiamo di mira lo spazio S oppure lo spazio S′.

questa schiera si hanno ∞^2 omografie di spazi sovrapposti ad S, tra le quali starà appunto l'omografia prima considerata: queste omografie hanno gli stessi spazi fondamentali di piani, e ogni raggio del complesso considerato taglia i sostegni di questi sistemi di piani in altrettanti punti formanti gruppi tutti proiettivi tra loro ed al gruppo delle radici dell' equazione in r.

Vedremo presto (n. 12, 13) quali legami passino tra le radici dell' equazione in ρ e quelle dell' equazione in r, e tra gli spazi fondamentali di punti e gli spazi fondamentali di piani di un' omografia di due spazi sovrapposti ad S.

11. Noi ci proponiamo ora di mostrare come si possano classificare le omografie di spazi sovrapposti. A tal fine notiamo anzitutto che un' omografia qualunque nello spazio S di punti x, può sempre in infiniti modi rappresentarsi con una coppia di equazioni bilineari:

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0,$$

dove le ξ'_k siano variabili qualunque ed una almeno delle due equazioni, per es. la prima, non abbia determinante nullo. In fatti questa coppia di equazioni equivale, come già notammo, alle seguenti, in cui x, y indicano due punti corrispondenti:

$$\sum_i a_{ik} x_i = \rho \sum_i b_{ik} y_i,$$

e da queste si ottengono formule della forma

$$x_i \equiv \sum_i d_{ik} y_i,$$

rappresentanti appunto un' omografia. Viceversa un' omografia qualunque tra punti x, y dello spazio S si può sempre porre, e in un sol modo, sotto quest' ultima forma, e quindi si può in quel senso rappresentare colla coppia di equazioni

$$\Sigma x_k \xi_k = 0, \quad \Sigma d_{ik} x_i \xi_k = 0.$$

Ora se in queste si fa per le variabili ξ_k una sostituzione lineare qualunque, le equazioni così ottenute saranno della forma più generale

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0,$$

e rappresenteranno sempre la stessa omografia.

Ma da questo fatto segue una conseguenza importante. Siano date due omografie qualunque, l' una tra due spazi sovrapposti allo spazio S di punti x, l' altra tra due spazi sovrapposti ad uno spazio S_1 di punti z: esse si potranno rappresentare in infiniti modi con due coppie di equazioni

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0$$

e

$$\Sigma p_{ik} z_i \zeta'_k = 0, \quad \Sigma q_{ik} z_i \zeta'_k = 0.$$

Orbene la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa con un' omografia tra gli spazi S ed S_1 far corrispondere tra loro quelle due omografie, vale a dire affinchè queste sieno proiettivamente identiche, sarà, in virtù delle cose dette, che si possano trasformare linearmente le x_i nelle z_i e le ξ'_k nelle ζ'_k con due sostituzioni qualunque tali che la prima coppia di equazioni bilineari si trasformi nella seconda coppia.

Ora il Weierstrass ha dimostrato [1] che la condizione necessaria e sufficiente perchè

[1] *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (Monatsberichte der k. Akad. d. W. zu Berlin, 1868, 18 Mai, pag. 310, 338). V. pag. 325, 326.

si possa effettuare questa trasformazione è che i divisori elementari del determinante $| a_{ik} - \rho b_{ik} |$ coincidano con quelli del determinante $| p_{ik} - \rho q_{ik} |$. Dicendo $e_i, e'_i, \ldots e_i^{(h_i-1)}$ i gradi (in ordine decrescente di grandezza) dei divisori elementari del determinante $| a_{ik} - \rho b_{ik} |$ corrispondenti ad una stessa radice ρ_i, e chiamando *caratteristica* l'insieme di questi gradi così raggruppati:

$$[(e_1, e'_1, \ldots e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e'_2, \ldots e_2^{(h_2-1)}), \ldots (e_r, e'_r, \ldots e_r^{(h_r-1)})],$$

noi divideremo le omografie in *classi* a seconda dei loro corrispondenti raggruppamenti dei divisori elementari, vale a dire intenderemo che due omografie siano della stessa classe quando hanno la stessa caratteristica. Ciò posto noi vediamo da quel teorema di Weierstrass, che una prima condizione affinchè due omografie di spazi sovrapposti siano proiettivamente identiche è che esse appartengano alla stessa classe. In secondo luogo poi le radici ρ dei due determinanti le quali corrispondono agli stessi gruppi di divisori elementari dovranno essere uguali; però siccome in una qualunque delle due coppie di equazioni si può moltiplicare l'una equazione per una costante senza alterare l'omografia rappresentata da quella coppia, così basterà affinchè le due omografie siano identiche, che le radici corrispondenti di quei determinanti siano tra loro proporzionali. Ciò significa che all'omografia generale di una classe qualunque spetta un certo numero d'invarianti assoluti, i quali sono i rapporti mutui delle radici distinte del determinante corrispondente a quell'omografia: il numero degl'invarianti assoluti distinti di questa è dunque dato dal numero delle radici (cioè dei gruppi di divisori elementari che compaiono nella sua caratteristica) diminuito di 1. La condizione necessaria e sufficiente affinche due omografie siano proiettivamente identiche sarà dunque: 1° che esse appartengano alla stessa classe, 2° che esse abbiano gli stessi valori per gl'invarianti assoluti.

Quanto a questi invarianti assoluti di un'omografia, risulta dalle cose viste che essi sono rappresentati geometricamente dai rapporti anarmonici che due piani corrispondenti qualunque della omografia considerata determinano con quei piani del loro fascio, i quali proiettano gli spazi fondamentali di punti dell'omografia (v. n. 9), perocchè questi piani corrispondono alle radici distinte ρ del determinante, mentre quei primi due piani corrispondono ai valori $\rho = 0$ e $\rho = \infty$ [1].

[1] Siano date nello spazio S due quadriche rappresentate dalle equazioni quadratiche $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k = 0$ (essendo ora $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$): risulta dai ragionamenti esposti che le polarità rispetto a queste quadriche dànno, combinate tra loro, un'omografia rappresentata dalle equazioni bilineari $\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0$ ed avente per conseguenza la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti che quella coppia di quadriche. E siccome per un sistema dato qualunque di divisori elementari del determinante $| a_{ik} - \rho b_{ik} |$ si può sempre trovare una coppia di forme quadratiche corrispondenti $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k$ (come mostrò il Weierstrass), così si può sempre trasformare le due equazioni rappresentanti un'omografia nelle equazioni delle polarità rispetto a due quadriche, vale a dire: Ogni omografia di spazi sovrapposti si può sempre considerare come risultante dalle polarità rispetto a due quadriche convenientemente scelte (l'una delle quali sarà degenere se l'omografia è degenere), il cui sistema avrà la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti della data omografia. Questa proposizione ci pare assai importante; essa conduce facilmente al seguente risultato notevolissimo: La geometria projettiva di una coppia di quadriche coincide colla geometria projettiva di un'omografia di spazi sovrapposti, cioè di quell'omografia che risulta dalle polarità rispetto alle due qua-

12. Siccome l'omografia rappresentata dalla coppia di equazioni bilineari

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0\,, \quad \Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0\,,$$

supposte di determinanti A, B non nulli vedemmo (n. 10) potersi pure rappresentare in modo correlativo colla coppia di equazioni bilineari aggiunte di quelle

$$\Sigma A_{ik} \xi_i x'_k = 0\,, \quad \Sigma B_{ik} \xi_i x'_k = 0\,,$$

così si può domandare quali saranno la classe e gl'invarianti assoluti dell'omografia determinati ancora nel modo detto, ma facendo uso di quest'ultima coppia di equazioni invece che della prima. Ora è facile vedere che quella classe e quegl'invarianti assoluti saranno ancora gli stessi, perocchè si ha identicamente eseguendo il prodotto di tre matrici:

$$\left| p\,\frac{B_{ik}}{B} + q\,\frac{A_{ik}}{A} \right| \left| a_{ik} \right| \left| b_{ik} \right| = \left| \sum_{i'.k'} a_{i'k}\, b_{ik'} \left(p\frac{B_{i'k'}}{B} + q\frac{A_{i'k'}}{A} \right) \right|,$$

e notando che $\Sigma_{k'}\, b_{ik'}\, B_{i'k'}$ vale B oppure 0, secondo che i' è uguale o diverso da i, e così che $\Sigma_{i'}\, a_{i'k}\, A_{i'k'}$ vale A ovvero 0, secondo che k' è uguale o diverso da k, diventa:

$$\left| p\,\frac{B_{ik}}{B} + q\,\frac{A_{ik}}{A} \right| \left| a_{ik} \right| \left| b_{ik} \right| = \left| p a_{ik} + q b_{ik} \right|.$$

Di qui segue immediatamente che i determinanti

$$\left| p a_{ik} + q b_{ik} \right|, \quad \left| p\,\frac{B_{ik}}{B} + q\,\frac{A_{ik}}{A} \right|$$

non solo sono identici, a meno del fattore AB indipendente da p, q, ma hanno inoltre gli stessi divisori elementari. Quindi realmente la caratteristica rappresentante la classe dell'omografia, considerata da questo punto di vista correlativo al primo, sarà ancora la stessa di prima; e quanto poi agl'invarianti assoluti avremo la seguente proposizione:

Data un'omografia qualunque non degenere di due spazi ad n dimensioni sovrapposti, i suoi invarianti assoluti sono quelli del gruppo formato da due piani corrispondenti qualunque e dai piani del fascio di questi i quali passano per gli spazi fondamentali di punti, ovvero quelli del gruppo formato da due punti corrispondenti qualunque e dai punti del loro raggio congiungente, posti sui sostegni degli spazi fondamentali di piani. Gli spazi fondamentali di punti e gli spazi fondamentali di piani formano due figure correlative, e vengono così a corrispondersi in modo tale che i gruppi di piani considerati sono proiettivi ai gruppi considerati di punti: in questa proiettività però ai due piani di ciascuno dei primi gruppi che si corrispondono nel 1° e nel 2° spazio, corrispondono rispettivamente nei secondi gruppi i due punti che si corrispondono nel 2° e nel 1° spazio. — Insomma si può dire più

driche; tutto il sistema invariantivo della coppia di quadriche non è altro che il sistema invariantivo dell'omografia, e viceversa.

Quanto al significato geometrico della caratteristica e degl'invarianti assoluti, che abbiamo incontrato, di una coppia di quadriche, esso risulta subito dalle cose dette e risulta appunto quale noi l'avevamo dato nella nostra dissertazione di laurea già citata.

concisamente che ogni omografia tra due spazi sovrapposti è correlativa all'omografia ottenuta da questa scambiando i due spazi ([1]).

13. Abbiamo così incontrato una corrispondenza notevole tra gli spazi fondamentali di punti e di piani di un'omografia non degenere. Possiamo trovare un'altra proprietà importante di questa corrispondenza. Consideriamo un punto unito qualunque x e un piano unito qualunque ξ: soddisferanno, come vedemmo, ad equazioni della forma seguente $\left(\text{ponendo } \frac{A_{ik}}{A} = \alpha_{ik}, \ \frac{B_{ik}}{B} = \beta_{ik}\right)$:

$$(1) \qquad \sum_i (p a_{ik} + q b_{ik}) \, x_i = 0$$

$$(1') \qquad \sum_{i'} (p' \alpha_{i'k} + q' \beta_{i'k}) \xi_{i'} = 0 \,,$$

cioè apparterranno risp. agli spazi fondamentali di punti e di piani corrispondenti ai parametri $p : q$ e $p' : q'$. Ora moltiplicando le (1) per $\alpha_{i'k}$, dove i' sia dato, e le (1') per b_{ik}, dove i sia dato, e sommandole rispetto a k si ha:

$$p \sum_i x_i \sum_k a_{ik} \alpha_{i'k} + q \sum_{ik} x_i \, b_{ik} \, \alpha_{i'k} = 0$$

$$q' \sum_{i'} \xi_{i'} \sum_k b_{ik} \beta_{i'k} + p' \sum_{i'k} \xi_{i'} \, b_{ik} \, \alpha_{i'k} = 0 \,,$$

ossia:

$$p x_{i'} + q \sum_{ik} x_i \, b_{ik} \alpha_{i'k} = 0$$

$$q' \xi_i + p' \sum_{i'k} \xi_{i'} \, b_{ik} \alpha_{i'k} = 0 \,,$$

e moltiplicando la 1ª di queste equazioni per $\xi_{i'}$, e sommandola rispetto ad i', e moltiplicando la 2ª per x_i e sommando rispetto ad i, avremo:

$$p \sum_{i'} x_{i'} \xi_{i'} + q \sum_{i\,i'k} x_i \, \xi_{i'} \, b_{ik} \alpha_{i'k} = 0$$

$$q' \sum_i x_i \, \xi_i + p' \sum_{i\,i'k} x_i \, \xi_{i'} \, b_{ik} \, \alpha_{i'k} = 0 \,,$$

e quindi eliminando la 2ª somma di ambe le equazioni:

$$(pp' - qq') \sum_i x_i \xi_i = 0 \,.$$

Dunque si avrà sempre:

$$\sum_i x_i \xi_i = 0 \,,$$

quando non sia:

$$pp' = qq' \,,$$

cioè quando gli spazi fondamentali a cui appartengono il punto x ed il piano ξ non siano corrispondenti (v. n. 12). Abbiamo così la seguente importante proposizione:

Ogni spazio fondamentale di punti sta sui sostegni di tutti gli spazi fondamentali di piani non corrispondenti ad esso.

[1] Abbiamo già dimostrato questa proposizione all'incirca nello stesso modo in una breve nota intitolata: *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche* (Giornale di matematiche, vol. XXII), nella quale abbiamo anche accennato qualche altra applicazione dello stesso teorema analitico.

14. Per conoscere bene le figure formate dagli elementi uniti di un'omografia qualunque, conviene anche notare il fatto che due spazi fondamentali di punti non possono mai tagliarsi (o correlativamente), perocchè se un punto unito x appartenesse a due diversi spazi fondamentali, le equazioni

$$\sum_i (pa_{ik} + qb_{ik})\, x_i = 0$$

dovrebbero verificarsi per due distinti valori di $p : q$ e quindi si verificherebbero pure per qualunque valore di $p : q$, il che non può essere, poichè il determinante $| pa_{ik} + qb_{ik} |$ non può annullarsi identicamente.

15. In ogni spazio fondamentale di punti ciascun punto è un punto unito. Se invece consideriamo un piano unito qualunque, l'omografia data farà corrispondere tra loro omograficamente i suoi punti, sicchè su un tal piano si ha un'omografia *contenuta* nell'omografia data dello spazio. E notiamo che i punti uniti di quell'omografia saranno già noti, poichè è chiaro che essa ha per spazi fondamentali di punti quelli della data omografia che sono contenuti in esso, cioè quelli che non corrispondono allo spazio fondamentale di piani contenente il piano unito che si considera, ed inoltre lo spazio di punti in cui questo piano taglia lo spazio fondamentale corrispondente di punti: altri punti uniti non potrebbero esservi in quell'omografia sul piano, poichè altrimenti essi dovrebbero pure essere punti uniti dello spazio. — Lo stesso fatto si presenta se invece di un piano unito si considera l'intersezione di più piani uniti appartenenti ad uno stesso spazio fondamentale di piani. — Se infine si considera il sostegno di uno spazio fondamentale di piani, si ha su esso un'omografia contenuta nella data ed avente per spazi fondamentali di punti quelli della data omografia non corrispondenti a quello spazio fondamentale di piani ed inoltre l'intersezione di quel sostegno collo spazio fondamentale corrispondente di punti, quando una tale intersezione esiste.

16. Ma noi possiamo anzi assegnare la caratteristica e gl'invarianti assoluti di ogni omografia contenuta nella data e relativa al sostegno di uno spazio fondamentale di piani. Supponiamo anzitutto cho questo spazio fondamentale di piani, e quindi anche il corrispondente spazio fondamentale di punti, corrispondano ad un gruppo di divisori elementari tutti di grado 1, cioè supponiamo che la caratteristica dell'omografia considerata nello spazio S ad n dimensioni sia:

$$[\,(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{h})\ (e_2, e'_2, \ldots e_2^{(h_2-1)}) \ldots . (e_r, e'_r, \ldots e_r^{(h_r-1)})\,]$$

(essendo la somma di tutti i numeri che entrano in questa caratteristica uguale ad $n+1$) e consideriamo il sostegno S_{n-h} ad $n-h$ dimensioni dello spazio fondamentale di piani ad $h-1$ dimensioni che corrisponde al 1° gruppo di divisori elementari dei gradi $(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{h})$. Dimostreremo che l'omografia che si ha su quel sostegno è rappresentata dalla caratteristica

$$[\,(e_2, e'_2 \ldots e_2^{(h_2-1)}), \ldots . (e_r, e'_r, \ldots e_r^{(h_r-1)})\,]$$

colle stesse radici (o meglio cogli stessi rapporti delle radici) della data corrispondenti agli stessi gruppi di divisori elementari, vale a dire cogli stessi invarianti assoluti (meno uno). In fatti è chiaro che per dimostrare questa proposizione noi possiamo, senza alcuna perdita di generalità, supporre che le equazioni rappresentanti l'omografia nello spazio S si siano già poste sotto la forma

$$(1) \qquad \rho y_k = \sum_i a_{ik} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots n+1)$$

e inoltre che lo spazio considerato S_{n-h} sia rappresentato dalle equazioni:

$$x_{n-h+2} = x_{n-h+3} = \dots = x_{n+1} = 0 .$$

Affinchè questo accada, le equazioni (1), le quali ci dànno immediatamente per la corrispondenza tra i piani:

$$(2) \qquad \rho' \xi_i = \sum_k a_{ik} \eta_k ,$$

dovranno dare per corrispondente al piano di coordinate

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{n-h+1} = 0 , \quad \eta_{n-h+2} = \lambda', \quad \eta_{n-h+3} = \lambda'', \dots \eta_{n+1} = \lambda^{(h)}$$

lo stesso piano, qualunque siano le quantità λ; dal che segue:

$$a_{i,n-h+2} = a_{i,n-h+3} = \dots = a_{i,n+1} = 0 \quad \text{per } i \text{ qualunque,}$$

ma però: $\quad a_{n-h+2,n-h+2} = a_{n-h+3,n-h+3} = \dots = a_{n+1,n+1} = a .$

Le equazioni (1) determinano in quel sostegno considerato S_{n-h} un' omografia rappresentata dalle equazioni:

$$(1') \qquad \rho y_k = \sum_i a_{ik} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots n-h+1)$$

$$x_{n-h+2} = \dots = x_{n+1} = 0 , \quad y_{n-h+2} = \dots = y_{n+1} = 0 .$$

Il determinante dell' omografia (1) dello spazio S sarà:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \rho & . & a_{1,n-h+1} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-h+1,1} & . & a_{n-h+1,n-h+1} - \rho & 0 & . & 0 \\ a_{n-h+2,1} & . & a_{n-h+2,n-h+1} & a - \rho & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n+1,1} & . & a_{n+1,n-h+1} & 0 & . & a - \rho \end{vmatrix}$$

ed è chiaro che esso ammette le stesse radici ρ e gli stessi divisori elementari corrispondenti che il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \rho & . & a_{1,n-h+1} \\ . & . & . \\ a_{n-h+1,1} & . & a_{n-h+1,n-h+1} - \rho \end{vmatrix}$$

dell' omografia (1') dello spazio S_{n-h}, esclusa però la radice $\rho = a$, la quale entra solo nel primo determinante ed ha per gruppo corrispondente dei gradi dei divisori elementari $(\overbrace{1, 1, \dots 1}^{h})$. Così è dimostrata la nostra proposizione.

17. Da essa si può passare facilmente al caso più generale in cui il sostegno considerato S_{n-h} di uno spazio fondamentale di piani, corisponda ad un gruppo di divisori elementari di gradi qualunque. Supponiamo in fatti che nel caso dianzi considerato sia $h_2 \leqq h$, e siano $\rho_1 = a$, $\rho_2, \rho_3, \dots \rho_r$ le radici distinte del determinante corrispondenti risp. ai diversi gruppi di divisori elementari. Sullo spazio considerato

S_{n-h} vedemmo esservi un'omografia appartenente alla classe rappresentata dalla caratteristica

$$[(e_2, e'_2, \ldots e_2^{(h_2-1)}), (e_3, e'_3, \ldots e_3^{(h_3-1)}), \ldots (e_r, e'_r, \ldots e_r^{(h_r-1)})]$$

ed avente per radici corrispondenti a quei gruppi di esponenti risp. $\rho_2, \rho_3, \ldots \rho_r$. Ora siccome tutte queste radici sono tra loro indipendenti, noi possiamo supporre che ρ_2 s'avvicini indefinitamente a ρ_1 fino a coincidere con essa. È chiaro che, per la natura dei divisori elementari, la caratteristica dell'omografia dello spazio S sarà con ciò divenuta:

$$[(e_2+1, e'_2+1, \ldots e_2^{(h_2-1)}+1, \overbrace{1, \ldots 1}^{h-h_2}), (e_3, e'_3, \ldots e_3^{(h_3-1)}), \ldots (e_r, e'_r, \ldots e_r^{(h_r-1)})]$$

ed avrà per radici corrispondenti rispettivamente ai vari gruppi di esponenti $\rho_1, \rho_3, \ldots \rho_r$, mentre l'omografia nel sostegno S_{n-h} del 1° spazio fondamentale di piani avrà ancora la stessa caratteristica e queste stesse radici. Solo bisognerà notare che mentre prima quest'ultima omografia aveva per spazio fondamentale di punti corrispondente ad $(e_2, e'_2, \ldots e_2^{(h_2-1)})$ uno spazio fondamentale di punti dell'omografia di S corrispondente pure a questo gruppo di esponenti, ora invece questo spazio fondamentale ad h_2-1 dimensioni sarà venuto a giacere sullo spazio fondamentale di punti ad $h-1$ dimensioni dell'omografia di S, il quale prima corrispondeva ad $(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{h})$ ed ora corrisponde ad $(e_2+1, e'_2+1, \ldots e_2^{(h_2-1)}+1, \overbrace{1, \ldots 1}^{h-h_2})$. Noi abbiamo così dimostrato il seguente teorema:

Abbiasi nello spazio S un' omografia avente per caratteristica:

$$[(e_1, e'_1, \ldots e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e'_2, \ldots e_2^{(h_2-1)}), \ldots (e_r, e'_r, \ldots e_r^{(h_r-1)})]$$

e per radici corrispondenti $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_r$ e suppongasi che nella serie degli esponenti del 1° gruppo $e_1, e'_1, \ldots e_1^{(h_1-1)}$ i primi k siano diversi da 1, essendo $k \leq h_1$. Allora a quel 1° gruppo, ossia alla radice ρ_1, corrisponderà uno spazio fondamentale di piani sul cui sostegno S_{n-h_1} la data omografia determinerà un'altra omografia avente per caratteristica:

$$[(e_1-1, e'_1-1, \ldots e_1^{(k-1)}-1), (e_2, e'_2, \ldots e_2^{(h_2-1)}), \ldots (e_r, e'_r, \ldots e_r^{(h_r-1)})]$$

e per radici corrispondenti quantità uguali (o meglio proporzionali) a $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_r$ dove $\rho_2, \ldots \rho_r$ corrispondono agli spazi fondamentali di punti dell'omografia di S, i quali sono pure spazi fondamentali di punti (corrispondenti alle stesse radici) dell'omografia di S_{n-h_1}, e dove ρ_1 corrisponde ad uno spazio fondamentale a $k-1$ dimensioni di punti di quest'ultima omografia, il quale è intersezione di S_{n-h_1} collo spazio fondamentale di punti dell'omografia di S corrispondente a ρ_1, cioè corrispondente allo spazio fondamentale di piani di cui S_{n-h_1} è il sostegno.

18. Questo teorema è importantissimo per la classificazione delle omografie, poichè serve a ridurre questo problema all'analogo relativo ad uno spazio ad un numero minore di dimensioni. Converrà sempre applicarlo quando la caratteristica dell'omografia che si considera non si componga tutta di indici uguali ad 1. Quando si verificasse questo caso, cioè si dovesse studiare l'omografia generale della classe

$$[(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{h_1}), (\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{h_2}), \ldots (\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{h_r})],$$

i suoi caratteri sarebbero già noti senz'altro. Risulta in fatti dalle cose esposte che una tale omografia ha r spazi fondamentali di piani, risp. ad h_1-1, $h_2-1, \ldots h_r-1$ dimensioni: gli spazi fondamentali di piani si costruiranno immediatamente mediante quelli di punti, dopo aver scelto questi ad arbitrio, notando che per es. il 1° spazio fondamentale di piani ha per sostegno uno spazio ad $n-h_1=h_2+\ldots+h_r-1$ dimensioni di punti, il quale è perfettamente determinato dal dover passare per gli spazi fondamentali di punti diversi dal 1°. In questo caso nessun sostegno di spazio fondamentale di piani avrà punti comuni col corrispondente spazio fondamentale di punti. Gli $r-1$ invarianti assoluti di quest'omografia si determineranno nel modo visto colla considerazione dei raggi che congiungono punti corrispondenti, ovvero degli assi d'intersezione di piani corrispondenti: tali raggi tagliano i sostegni degli spazi fondamentali di piani in r punti, che determinano coi 2 punti corrispondenti rapporti anarmonici uguali agl'invarianti assoluti, mentre quegli assi proiettano gli spazi fondamentali di punti con r piani, i quali determinano coi 2 piani corrispondenti presi inversamente quegli stessi rapporti anarmonici. Quelle coppie di punti corrispondenti si possono prendere su un sostegno di spazio fondamentale di piani, ma in questo modo coll'uso di un solo raggio si otterrà un invariante assoluto di meno. E correlativamente ecc. ecc.

In particolare supponiamo $r=2$, cioè consideriamo l'omografia avente per caratteristica $[\overbrace{(1,1,\ldots 1)}^{h_1}\ \overbrace{(1,1,\ldots 1)}^{h_2}]$ (essendo $h_1+h_2=n+1$). Ai due gruppi di divisori elementari che in essa compaiono, corrispondano risp. le radici ρ_1, ρ_2; allora a ρ_1 corrisponderà uno spazio fondamentale di piani, il cui sostegno (ad $n-h_1=h_2-1$ dimensioni) dovrà contenere lo spazio fondamentale di punti ad h_2-1 dimensioni che corrisponde a ρ_2 e quindi coinciderà con esso; e similmente il sostegno dello spazio fondamentale di piani corrispondente a ρ_2 coincide collo spazio fondamentale di punti corrispondente a ρ_1. Vi sono dunque in questa omografia due spazi di punti risp. ad h_1-1 e h_2-1 dimensioni tali, che tutti i loro punti e tutti i piani passanti per essi sono elementi uniti dell'omografia. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque taglia quei due spazi in due punti determinanti con quelli un rapporto anarmonico fisso $(\rho_1:\rho_2)$, e l'asse d'intersezione di due piani corrispondenti qualunque è congiunto a quei due spazi mediante altri due piani formanti con quelli lo stesso rapporto anarmonico fisso. Questa quantità costante $(\rho_1:\rho_2)$ è l'unico invariante assoluto della omografia considerata (¹).

Dal teorema dimostrato si possono ancora trarre altri corollari. Se nella caratteristica di una omografia vi è un gruppo composto di indici tutti maggiori di 1, allora il corrispondente spazio fondamentale di piani avrà un sostegno, nel quale sarà contenuto lo spazio fondamentale corrispondente di punti, e quindi saranno contenuti tutti gli spazi fondamentali di punti, cioè tutti i punti uniti della data omografia e correlat.). Un gruppo di divisori elementari tutti del 2° grado, cioè $(2.2, \ldots 2)$ non ha appunto altro significato che questo; ma se nel gruppo entrano anche divisori

(¹) Queste omografie sono appunto quelle che, come dicevamo sul principio, vennero considerate dal sig. Veronese (loc. cit. pag. 114, 115) sotto il nome di *collineazioni*.

elementari di grado superiore al 2°, si ha un'ulteriore particolarizzazione nella figura formata dagli spazi fondamentali e questa particolarizzazione si trova appunto applicando il teorema generale.

In particolare ad un gruppo composto di un solo indice >1 corrispondono un solo punto unito ed un solo piano unito dell'omografia, i quali stanno l' uno sull'altro, sicchè quel piano contiene tutti i punti uniti di questa e vi è su esso un'omografia avente la caratteristica differente da quella dell'omografia data solo per la diminuzione di un' unità all' indice considerato.

Il sostegno di uno spazio fondamentale di piani coincide col corrispondente spazio fondamentale di punti solo quando, n essendo impari, si ha l'omografia avente per caratteristica $[\overbrace{(2,2,\ldots 2)}^{\frac{1}{2}(n+1)}]$; questo caso si ottiene del resto facendo coincidere le due radici del caso $[\overbrace{(1,\ldots 1)}^{\frac{1}{2}(n+1)}\ \overbrace{(1,\ldots 1)}^{\frac{1}{2}(n+1)}]$.

Infine noteremo che coi vari teoremi da noi trovati si possono avere immediatamente tutte le particolarità di ogni data omografia, e quindi classificare le omografie di spazi sovrapposti a quante si vogliano dimensioni, come vedremo ora su esempi.

III.

19. Applicheremo le cose esposte nella 2ª parte al caso in cui il numero n delle dimensioni dello spazio lineare considerato si riduca a 2 od a 3 (¹). Così otterremo le omografie non degeneri di due piani o di due spazi ordinari sovrapposti (²).

I casi che presenta un'omografia di due piani ordinari sovrapposti sono i 5 seguenti.

[111]. Questa è l'omografia generale: essa ha 3 rette e 3 punti uniti, corrispondentisi in modo che ogni retta unita passa pei due punti uniti non corrispondenti. Vi sono 2 invarianti assoluti: i gruppi formati da 2 punti corrispondenti

(¹) Le omografie di due spazi sovrapposti ad 1 dimensione, p. e. di due punteggiate ordinarie sovrapposte, non possono presentare che due casi: l'omografia [11] con due punti uniti distinti ed un invariante assoluto (il rapporto anarmonico di questi punti uniti con due punti corrispondenti qualunque), e l'omografia [2] coi due punti uniti coincidenti e priva d'invarianti assoluti. — Aggiungiamo che benchè sopra non si parli che di omografie non degeneri, come quelle che sono più importanti, sarebbe facile classificare anche le omografie degeneri, bastando per ciò ricordare le proprietà generali di queste omografie viste nella prima parte e avvertire che la caratteristica e gli spazi fondamentali di un' omografia non degenere appartengono pure come tali ad omografie degeneri, ciascuna delle quali ha per spazio singolare di punti e per spazio singolare di piani una delle coppie di spazi fondamentali di punti e di piani.

(²) Mentre il presente lavoro si stava stampando, ci venne fatto per caso di trovare che il Cayley aveva già pensato fin da trent'anni sono ad applicare quello che ora chiamiamo metodo dei divisori elementari alla classificazione delle omografie. In fatti egli finiva la sua nota « *Recherches sur les Matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée* » (Crelle's Journal, Bd. 50, pag. 313-7) enunciando come tutta la teoria delle omografie di un piano dipenda dai divisori elementari di un determinante, e come vi siano da considerare (oltre al caso dell'identità) i 5 casi che noi appunto esamineremo (e solo incorreva in un' inesattezza dicendo che il nostro caso [21], e non il caso [(11) 1], è quello dell'omologia). Egli si proponeva di ritornare più tardi su questa teoria; ma in fatto non vi ritornò più.

qualunque del 1° e del 2° piano e dai 3 punti d'intersezione della loro congiungente colle 3 rette unite sono tutti proiettivi tra loro e proiettivi ai gruppi formati da due rette corrispondenti qualunque del 2° e del 1° piano e dai 3 raggi del loro fascio che vanno ai 3 punti uniti; i due rapporti anarmonici indipendenti di questi gruppi sono appunto gl'invarianti assoluti dell'omografia.

[21]. Due punti uniti e le due rette unite corrispondenti del caso precedente coincidono, sicchè vi è un punto unito che sta sulla corrispondente retta unita corrispondentemente all'indice 2 della caratteristica, e vi è un altro punto unito su questa retta, e una retta unita corrispondente per quel primo punto. Sulla prima retta unita i punti hanno una corrispondenza proiettiva rappresentabile con [11] e il cui invariante assoluto (rapporto anarmonico di due punti corrispondenti qualunque coi due punti uniti) è l'invariante assoluto dell'omografia del piano; invece sull'altra retta unita l'omografia tra i suoi punti è rappresentata da [2] cioè ha i due punti uniti coincidenti (v. n. 17). L'invariante assoluto unico dell'omografia che si considera sul piano, si determina anche come rapporto anarmonico di 2 punti corrispondenti qualunque coi 2 punti d'intersezione della loro congiungente colle due rette unite ecc. ecc.

[3]. I tre punti uniti e le tre rette unite coincidono in un punto ed una retta in posizione unita. Quest'omografia non ha invarianti assoluti.

[(11) 1]. Vi è in quest'omografia una punteggiata di punti uniti ed un fascio di rette unite (corrispondenti ad (11)), ed inoltre una retta unita fuori di questo fascio, la quale dovendo contenere tutta quella punteggiata di punti uniti ne sarà il sostegno; e similmente un punto unito coincidente col centro di quel fascio di rette unite. Due punti corrispondenti qualunque sono in linea retta con questo centro e due rette corrispondenti qualunque si tagliano sulla punteggiata di punti uniti (v. n. 9, 10). Quest'omografia, che non è altro che l'ordinaria omologia, ha un invariante assoluto, il quale (dietro il nostro teorema generale sugl'invarianti assoluti delle omografie) è il rapporto anarmonico che due punti corrispondenti del 1° e del 2° piano determinano col punto d'intersezione della loro congiungente colla punteggiata di punti uniti e col centro del fascio di rette unite, od anche il rapporto anarmonico che due rette corrispondenti qualunque del 2° e del 1° piano determinano colla retta del loro fascio che va a quel centro e con quell'asse dei punti uniti.

[(21)]. Quest'omografia, che non ha invarianti assoluti, è quell'omologia particolare in cui il centro e l'asse d'omologia sono in posizione unita, e si ottiene dal caso precedente supponendo appunto che pel sostegno del fascio di rette unite venga a passare la corrispondente punteggiata di punti uniti.

20. Venendo ora alle omografie nello spazio lineare a 3 dimensioni, esse presentano i 13 casi seguenti.

[1111]. Questo è il caso generale, che ammette 4 punti uniti isolati e 4 piani uniti corrispondenti: dati i punti uniti, questi piani sono determinati ciascuno dal passare pei tre punti non corrispondenti. Vi sono 3 invarianti assoluti, che sono i rapporti anarmonici corrispondenti dei gruppi, tutti proiettivi tra loro, composti di due punti corrispondenti qualunque del 1° e del 2° spazio e dei 4 punti in cui la loro congiungente taglia i 4 piani uniti, ovvero composti di due piani corrispondenti qualunque del 2°

e del 1° spazio e dei 4 piani del loro fascio proiettanti i 4 punti uniti risp. corrispondenti a quei piani uniti.

[211]. Quest'omografia ha 2 soli invarianti assoluti. Due punti uniti e i due piani uniti corrispondenti coincidono in un punto e un piano incidenti. Questo piano contiene pure gli altri due punti uniti; su esso l'omografia dello spazio determina un'omografia piana avente per caratteristica [111] ed avente gli stessi due invarianti assoluti che l'omografia dello spazio, mentre sugli altri due piani uniti si hanno omografie aventi per caratteristiche [21] (v. n. 17) e dotate quindi ciascuna di uno solo di questi invarianti assoluti. Considerando due punti corrispondenti qualunque e i punti d'intersezione della loro congiungente coi 3 piani uniti, o correlativamente, si hanno tosto i 2 invarianti assoluti dell'omografia considerata.

[31]. Quest'omografia ha un solo invariante assoluto, un punto unito ed il piano unito corrispondente incidenti e un altro punto unito su questo piano col corrispondente piano unito per quel primo punto. Sul primo piano unito si ha un'omografia [21] avente lo stesso invariante assoluto che la data, sull'altro piano unito invece si ha un'omografia [3]. Del resto quell'invariante assoluto non è altro che il rapporto anarmonico determinato da due punti corrispondenti qualunque del 1° e del 2° spazio coi due piani uniti, ossia da due piani corrispondenti qualunque del 2° e del 1° spazio coi due punti uniti.

[22]. Anche quest'omografia ha un solo invariante assoluto e due punti uniti coi due piani uniti corrispondenti. Però in essa entrambi quei punti stanno su questi due piani, cioè la loro congiungente coincide coll'intersezione di questi. Su ognuno dei due piani in questo caso l'omografia determinata dalla data sarà della classe [21] ed avrà lo stesso invariante assoluto che la data. Quest'invariante si potrà poi determinare come rapporto anarmonico precisamente come nel caso precedente.

[4]. Quest'omografia non ha invarianti assoluti: per essa vi è un solo punto unito ed un solo piano unito corrispondente passante per esso; in quel punto e quel piano coincidono i 4 punti e i 4 piani uniti del caso generale.

[(11) 11]. Questo è il caso generale di una 2ª categoria di omografie. In quelle considerate finora il numero dei punti (e piani) uniti era finito. In quelle che ora considereremo essendovi sempre un gruppo di due divisori elementari corrispondenti ad una stessa radice, vi sarà un raggio r di punti uniti ed un asse ρ di piani uniti. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque taglierà ρ e l'intersezione di due piani corrispondenti qualunque taglierà r (v. n. 9, 10). Nel caso generale [(11) 11] oltre a questi punti e piani uniti vi sono 2 punti uniti isolati, i quali naturalmente dovranno stare sul sostegno ρ del fascio di piani uniti, e 2 piani uniti corrispondenti passanti per r e di cui ciascuno sarà determinato dal contenere il punto unito isolato che non gli corrisponde. In questo caso generale vi sono 2 invarianti assoluti, che sono i rapporti anarmonici indipendenti del gruppo di due punti corrispondenti qualunque del 1° e del 2° spazio, e dei 3 punti in cui la loro congiungente taglia ρ e i due piani uniti isolati, ovvero, ciò che fa lo stesso, del gruppo di due piani corrispondenti qualunque del 2° e del 1° spazio e dei tre piani del loro fascio passanti per r e pei due punti uniti isolati. Aggiungiamo che su ogni piano unito isolato si ha un'omografia [(11) 1], cioe un'omologia ordinaria (con r per asse e il

punto d'intersezione con ρ per centro) e tra i punti dell'asse ρ si ha un' omografia [11]; due degl'invarianti assoluti di queste tre omografie contenute nella data danno gl'invarianti assoluti di questa.

[(11) 2]. In questo caso il raggio r e l'asse ρ del caso precedente non mutano, i due piani uniti isolati e i due punti uniti corrispondenti vengono a coincidere, sicchè quest'omografia ha solo più un invariante assoluto, che si determina come nel caso precedente.

[(21) 1]. Il gruppo d'indici (21) mostra che l'asse fondamentale ρ viene a contenere un punto del raggio fondamentale corrispondente r, vale a dire in questo caso r e ρ si tagliano. Vi è solo più un punto unito isolato, giacente naturalmente su ρ e un piano unito isolato passante per r. In questo piano l'omografia dello spazio determina un'omologia [(21)], mentre sull'asse ρ si ha una corrispondenza proiettiva [11]. Vi è solo più un invariante assoluto, rapporto anarmonico di due punti corrispondenti qualunque coi due punti in cui la loro congiungente taglia ρ ed il piano unito isolato, o correlativamente.

[(31)]. Quest'omografia non ha invarianti assoluti e si ottiene dalla precedente supponendo che il punto e il piano uniti isolati vengano a coincidere risp. col punto e col piano comuni ad r, ρ. Non vi sono dunque altri punti o piani uniti all'infuori del raggio fondamentale r e dell'asse fondamentale ρ. Su questo si ha una corrispondenza proiettiva [2] i cui punti doppi coincidono nel punto $r\rho$.

[(11) (11)]. In quest'omografia vi sono, corrispondentemente ai due gruppi (11), due raggi fondamentali di punti uniti r, r' e due assi di piani uniti corrispondenti ρ, ρ'. Ma i punti di r devono stare su ρ', quelli di r' devono stare su ρ: dunque ρ' coincide con r ed r' con ρ (v. n. 18). Le due rette r, ρ hanno quindi tutti i loro punti e i loro piani per elementi uniti dell'omografia. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque deve tagliare gli assi ρ, ρ', e così l'intersezione di due piani corrispondenti qualunque deve tagliare i raggi r, r', sicchè quelle congiungenti e queste intersezioni costituiscono una stessa congruenza lineare avente per direttrici r e ρ. Questa omografia ha un solo invariante assoluto, che è il rapporto anarmonico di due punti corrispondenti qualunque del 1° e del 2° spazio coi punti in cui la loro congiungente taglia r e ρ, o, ciò che fa lo stesso (il rapporto anarmonico di due piani corrispondenti qualunque del 2° e del 1° spazio coi piani che congiungono la loro intersezione alle rette ρ e r, ossia) il rapporto anarmonico di due piani corrispondenti del 1° e del 2° spazio coi piani del loro fascio passanti per r e ρ.

[(22)]. Questo caso è caratterizzato dall'avere soltanto una retta fondamentale, di cui tutti i punti e i piani costituiscono i punti e piani uniti dell'omografia (n. 18). Esso si ottiene dal caso precedente supponendo che le due rette r, ρ vengano a coincidere. Questo mostra che le rette congiungenti i punti corrispondenti od intersezioni di piani corrispondenti di quest'omografia formano una congruenza lineare speciale, le cui due direttrici coincidono in quella retta fondamentale (senza tagliarsi, v. n. 14). Quest'omografia non ha invarianti assoluti.

[(111) 1]. In quest' omografia vi sono, non più soltanto ∞^1, ma bensì ∞^2 punti e piani uniti. Vi è cioè, corrispondentemente ad (111), un piano π di punti uniti ed una stella di piani uniti, il cui centro diremo P; vi è inoltre un punto

unito isolato P ed un piano unito isolato π, i quali corrispondono all' indice 1 della caratteristica. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque passa per P e quei due punti insieme con P e col punto d'intersezione con π determinano un rapporto anarmonico costante, che è l'invariante assoluto dell'omografia, ed è pure uguale al rapporto anarmonico che due piani corrispondenti qualunque determinano col piano del loro fascio passante per P e col piano π su cui i piani corrispondenti sempre si tagliano. Come si vede, quest'omografia non è altro che l'omologia ordinaria dello spazio.

[(211)]. Quest'omografia, priva d'invarianti assoluti, può considerarsi come una omologia in cui il centro P ed il piano π d'omologia vengano ad essere in posizione unita. Le congiungenti i punti corrispondenti passano ancora per P e le intersezioni dei piani corrispondenti stanno su π. Questo caso può anche considerarsi come un caso particolare dell'omografia [(22)]: la congruenza lineare speciale, che in questa compariva come formata dalle congiungenti punti corrispondenti ed intersezioni dei piani corrispondenti, viene in questo caso a specializzarsi ulteriormente, scindendosi nel piano rigato π e nella stella di raggi P.

Sui geminati polisintetici del Diopside di Val d'Ala.

Memoria dell'ing. G. LA VALLE

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 1 giugno 1884.

(Con tre tavole).

Il professore Strüver avendomi gentilmente fornito una bellissima serie di cristalli di Diopside di Val d'Ala, da lui raccolta, ed autorizzatomi a farne lo studio cristallografico, pria di tutto, sento il dovere di testimoniargliene la mia gratitudine e dovuta riconoscenza.

Intrapreso tal lavoro si è riconosciuto necessario trattarlo sotto due aspetti; uno puramente goniometrico onde determinare le combinazioni delle forme abituali di tal Diopside e fissarne le costanti cristallografiche per paragonarle con le già note e più recenti del Kokscharow ([1]), del Vom Rath ([2]), non che del Lehmann ([3]); l'altro avente per obietto, la descrizione particolareggiata dei gemelli polisintetici che rinvengonsi frequentissimi e sorprendenti in esso Diopside di Val D'Ala.

In questa Memoria si tratterà di quest' ultima riconoscendola quale la più importante giacchè nessuno, fin'ora, ha potuto sottoporre a misure goniometriche tali geminati polisintetici, per la estrema sottigliezza degli individui interposti ordinariamente sotto forma di lamelle.

La geminazione di cui trattasi da lunga pezza è stata accennata, di fatti dopo l'Ewald che pel primo nel 1837 nella sua dissertazione di Laurea ([4]) otticamente dimostra come la fino allora ritenuta anomalia nella figura d'interferenza che vedevasi sulla faccia normale all'asse *c* (orientazione di Miller) nel presentarsi simile all'Aragonite, non fosse tale, ma una conseguenza necessaria della geminazione dei cristalli osservati dello Zillerthal che mostrandosi apparentemente semplici, tali non essendo, portavano ad una falsa conclusione; fu lo Strüver che pel primo accennò più estesamente della geminazione polisintetica nel Diopside, difatti nel suo lavoro *Sui minerali delle Valli di Lanzo* ([5]) dice di avere osservato l'interposizione di più lamelle in posizione di gemelli nei geminati di Diopside ripromettendosi fare oggetto di particolar suo lavoro, la descrizione di essi.

([1]) Vorlesungen über Mineralogie (1865, pag. 204).

([2]) Poggendorf Ann. 1874, pag. 339.

([3]) Zeitschrift für Min. 1881, pag. 533.

([4]) *De Crystallis duorum axium opticorum* trattando *De crystallis bino-singulariis* (pag. 24), riportata in parte nell'Handbuch der Optik von Radike (Bd I. 1839, S. 383).

([5]) Memorie per servire alla descrizione della carta geologica d'Italia pubblicata a cura del r. Comitato geologico del Regno. Firenze 1871, 4°, vol. I, pag. 42) e riportata negli Jahrbuch 1871, p. 337. Minerallagerstätten des Alathales in Piemont.

Più tardi il Vom Rath nel 1876 [1] trattando dell'Augite (Fassaite) di Traversella accenna avere osservato nei cristalli gemelli, l'interposizione di una o due lamelle che attribuisce quali individui gemini dal vederle su (001) con l'aspetto fisico della ($\bar{1}01$).

L'anno seguente 1877 il Laspeyres [2] parla di un solo gemello polisintetico nell'Augite di Bell presso Laach costituito da un individuo principale avente interposta una lamella di grossezza metà degli estremi.

Il Vom Rath di nuovo nel 1881 [3] studiando il Diopside di Achmatowsk accenna all'esistenza di sottilissime lamelle, in posizione di gemelli, osservate su (001) e parallele all'ortoasse e presentantisi sotto forma di sottilissime strie, non che di altre parallele a (001) che non potè misurare per avere queste uno spessore di $^1/_8$ ad $^1/_4$ di millimetro.

Anche il Sjögren nello stesso anno 1881 [4] nel suo lavoro sul Diopside di Nordmarken presso Philipstad in Svezia, dice aver veduto in alcuni gemelli tali lamelle interposte, parallelamente all'ortopinakoide, e che per essere molto sottili non pote' sottoporre a misure goniometriche.

I risultamenti delle osservazioni, che qui si espongono, confermano appieno che il Diopside ci mostra la geminazione polisintetica sebbene spesso gl'individui intermedî ed il loro numero non sia distinguibile perchè assottigliati talmente da presentarsi sotto forma di lamelle come nei feldespati triclini, e di più confermano ciò che lo Zirkel, pria di tutti, ha osservato pel Pirosseno nelle sue ricerche: *Sulla composizione e struttura delle rocce basaltiche* [5] in cui accenna a cristalli di Augite che al microscopio e nella luce polarizzata mostravansi in parte composte di lamelle riunite a modo di geminati, il che anche il Rosenbusch nel 1872 nel suo lavoro *Petrographische Studien an den Gesteinen des Kaiserstuhls* [6] ammette di avere osservato.

I gemelli che si sono rinvenuti nella collezione del Diopside, su cennato, sono numerosi ed ordinariamente costituiti or di 2 or di 3, fino a 7 individui variamente sviluppati, il che porta ad ammettere che possano esservene a maggior numero, dei quali gl'interposti, tanto sottili da rendersi macroscopicamente invisibili.

Tutti seguono la medesima legge di geminazione, già nota fin d'Haüy, in cui è asse di ruotazione la normale ad (100) a $\infty \bar{P} \infty$ ed in tutti si osserva che mentre gl'individui estremi, che per lo più sono in posizione da costituire un cristallo semplice, sono i più sviluppati, gl'interposti lo sono i meno, ed in alcuni cristalli son quasi invisibili ond'è che mostransi allora sotto forma di sottili lamelle come precisamente osservasi in alcuni cristalli semplici; osservazione che anche lo Strüver ha fatto trattando dei geminati polisintetici dello Spinello orientale [7].

Si ha inoltre che fra un individuo e l'altro, chiaramente al microscopio, con difficoltà maggiore o minore macroscopicamente, osservasi sulla faccia 010 (quando sia bene estesa) come dei sottilissimi fili somiglianti a strie che stanno come linee

[1] Jahrbuch 1876, p. 404. — [2] Mineralogische Bemerkungen (Z. für Min. V. I, p. 203). — [3] Z. für Min. 1881, p. 495. — [4] Z. für Min. Vol. V, p. 533. — [5] Bonn, 1870, p. 10. — [6] Jahrbuch 1872, p. 59. — [7] R. Accademia dei Lincei (1877-78, serie 3ª, Vol. II, pag. 292 sgg.).

di separazione fra due individui adiacenti, il numero delle quali è sempre una di meno di quello degli individui gemini costituenti l'intero cristallo.

Tal fatto, sia per la posizione precisa di esse linee, sia per il loro numero determinato, porta ad ammettere che la geminazione avviene per individui semplici completi dei quali una parte, la relativamente più sviluppata appare negl'individui estremi e negli intermedî lamellari, mentre la parte restante di essi non essendosi potuta sviluppare è rimasta come fortemente compressa e presentasi allora sulla (010) sotto forma lineare; il che maggiormente lo prova il fatto che al microscopio tali linee che vedonsi in un medesimo cristallo, han vario spessore.

E d'altra parte se volesse ammettersi che la geminazione non avvenga per individui completi e che le dette linee apparenti fossero dovute ad altrettanti individui lamellari sviluppatisi meno degli altri, allora quelli che vedonsi macroscopicamente fra esse dovrebbero tutti trovarsi in un medesimo senso, il che non è, o per aver questi in posizioni alternate bisognerebbe supporre che ciascuna linea rappresentasse il complesso di altrettanti individui lamellari in posizione di gemini e per lo meno in numero tale quanto richiedonsi per soddisfare alla condizione di posizione su cennata, degli individui macroscopici; supposizione che sarebbe ammessa ipoteticamente e senza veruna necessità.

Ciò posto deve farsi notare che nel presentare i disegni dei principali geminati studiati, a rendere più evidente l'accoppiamento dei diversi individui gemelli, nei disegni si sono aggiunte, per alcuni, le proiezioni delle combinazioni sul piano di simmetria anzichè sulla base, per modo che in essi oltre al veder chiaramente l'individuo semplice e le sue forme, che con la ruotazione attorno alla normale ad (100) ci dà i diversi individui che costituiscono l'intero cristallo, si può ancor ben distinguere il numero di essi che lo compongono, e di più le parti o le forme di ciascun individuo semplice che realmente osservansi e che poterono essere sottoposte a misure goniometriche non che quelle mancanti (rappresentate in tali proiezioni a puntini come compenetrazioni) che sarebbero le compresse vedute su (010) in forma di linee di separazione fra le prime.

La descrizione dei geminati polisintetici si è fatta precedere da quella di pochi gemelli composti di due soli individui onde mostrarne il grado di analogia fra le forme degli uni e degli altri ed in ciascuno, le differenze abituali fra le diverse località d' onde provengono.

Le costanti tenute pel calcolo del presente lavoro sono quelle desunte dai dati del Miller (1) non che quelle del Kokscharow (2), del Vom Rath (3) e del Lehmann (4).

(1) *An Elementary introduction to mineralogy by the late Phillips* London 1852, p. 290 d'onde si ha $\beta = 74°. 9'. 8''$ $a : b : c = 1.09716 : 1 : 0,59126$.

(2) Nota precedente (1) a pag. 149.

$\beta = 74°. 13'$ $a : b : c = 1,093120 : 1 : 0,589456$.

(3) Nota preced. (2) a pag. 149.

$\beta = 74°. 10'. 9''$ $a : b : c = 1,09213 : 1 : 0,589311$.

(4) Nota preced. (2) a pag. 149.

$\beta = 74°. 13'$ $a : b : c = 1,092201 : 1 : 0,586885$.

Si fa finalmente osservare che ciascun cristallo di cui segue la descrizione, si è notato col numero di Catalogo della collezione del Museo di Mineralogia della R. Università di Roma (Vol. IV) avendo il professore Strüver donato ad esso Museo, la serie cennata di tal Diopside.

Gemelli composti di due soli individui.

N° 15958 e fig. 1 Tav. I.

Questo cristallo della varietà Pirgome di Montaieu (M. Acuto) sopra Traversella, ci presenta un gemello costituito da un primo individuo avente la combinazione:

$$(100)\,(110)\,(111)\,(021)\,(33\bar{1})\,(22\bar{1})$$

e da un secondo in posizione di gemello completo di cui vedonsi le forme:

$$(\underline{100})\,(\underline{1\bar{1}0})\,(\underline{0\bar{1}0})\,(\underline{\bar{1}10})\,(\underline{\bar{1}00})\,(\underline{10\bar{1}})\,(\underline{00\bar{1}})\,(\underline{3\bar{3}\bar{1}})\,(\underline{2\bar{2}\bar{1}})\,(\underline{1\bar{1}\bar{1}})\,(\underline{0\bar{2}\bar{1}})\,(\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}})\,(\underline{\bar{1}\bar{3}\bar{1}})\,(\underline{\bar{1}\bar{2}\bar{1}}).$$

Tal cristallo ha le facce tutte splendentissime di color verde nerastro, e i due individui che lo costituiscono sono sviluppati nelle proporzioni come si è cercato di rappresentare nella fig. 15958.

In esso fra la faccia 100 e $\underline{1\bar{1}0}$ si vede una linea di separazione ben netta e macroscopicamente (Si è rappresentata con linea tratto-punteggiata).

Per dare un'idea della grossezza di tal cristallo si fa notare che la sua sezione romba ha le diagonali di circa 1 cm. ed è lungo circa 2 cm. sebbene nella parte inferiore non completamente terminato.

N° 16059 Tav. I.

Bellissimo si presenta questo cristallo di Diopside, proveniente da Testa Ciarva, Alpe la Mussa, Val d'Ala Lanzo Torino, giacchè nella sua piccolezza è notevole non solo il suo sviluppo quasi tabulare, essende sviluppata la faccia 100 e pochissimo tutte le altre della zona dei prismi verticali ed essendo molto allungate nel senso dell'asse z; ma ancor di più per esser completamente terminato nella sua parte inferiore, onde ben distinguonsi tutte le forme degli individui che lo compongono.

Questi sono, il primo avente visibili:

$$(100)(310)(110)(\bar{1}10)(\bar{3}10)(\bar{1}00)(001)(\bar{1}01)(\bar{2}21)(\bar{3}31)(421)(33\bar{1})(22\bar{1})(4\bar{2}\bar{1})(00\bar{1})(10\bar{1});$$

il secondo solamente:

$(\underline{100})\,(\underline{3\bar{1}0})\,(\underline{1\bar{1}0}),(\underline{3\bar{3}\bar{1}})\,(\underline{2\bar{2}\bar{1}})\,(\underline{10\bar{1}})$ nella parte superiore e $(\underline{4\bar{2}1}\,(\underline{1\bar{1}1})\,(\underline{001})$ nella inferiore.

Il pinakoide (001) e la $(\bar{1}01)$ sono opache perfettamente; le facce 421 e $\bar{2}21$ che sono le più estese sono striate.

Le dimensioni di tal cristallo sono 3 millimetro per 1 in sezione orizzontale e 15 millimetri di lunghezza.

N° 15918 e fig. 2 Tav. I.

Questo cristallo varietà Diopside proveniente dalla medesima località che il precedente; presentasi curioso nel suo sviluppo, giacchè mentre un individuo ha sezione rettangolare con le facce 100 e 310 molto sviluppate, l'altro sembra averla triangolare avendo invece le suddette facce pochissimo sviluppate e molto le (110).

Gl'individui che lo costituiscono mostrano:

Il primo le forme:

$(100)\,(310)\,(110)\,(010)\,(\bar{1}10)\,(\bar{3}10)\,(\bar{1}00)\,(421)\,(111)\,(001)\,(\bar{3}31)\,(\bar{2}21)\,(\bar{1}11)\,(\bar{1}01)$.

Il secondo solamente:

$(\underline{100})\,(\underline{5\bar{1}0})\,(\underline{3\bar{1}0})\,(\underline{1\bar{1}0})\,(\underline{2\bar{2}\bar{1}})\,(\underline{3\bar{3}\bar{1}})$.

La faccia 421 si presenta curva e dà immagini incertissime; bellissima è la (111); opache (001) e $(\bar{1}01)$; striate, $(\bar{2}21)$ e $(\underline{2\bar{2}\bar{1}})$.

Questo cristallo nella sua parte inferiore è rotto e porta un gruppetto di cristalli di granato più o meno grossi aventi le forme (100) e (110).

N° 5624 e fig. 3 Tav. I.

Anche questo cristallo appartiene alla varietà Pirgome e proviene dalla medesima località che il precedente N° 15958.

Esso presenta due individui e le stesse combinazioni di forme che il 15958, solo è notevole la differenza di sviluppo fra essi due cristalli; giacchè mentre questo si presentava come se il secondo individuo fosse compenetrato nel primo, il 5624 si presenta invece che il secondo individuo involucra la parte anteriore del primo, involucro che pare siasi formato in più riprese giacchè come si è cercato riprodurre in figura, prima si è accresciuto sopra una delle facce del prisma verso $\pm$ Y e poi sull'altra verso $\mp$ Y in modo che osservansi due facce (100) ciascuna con (110) e $(\bar{1}10)$.

Geminati polisintetici.

N° 15930 e fig. 1 e 2 Tav. II.

Questo cristallo di Diopside proveniente da Testa Ciarva, Alpe la Mussa, Val d'Ala, Lanzo, Torino, consta di tre individui che guardati sulla faccia 010 alla luce polarizzata parallela mostrano diversa estinsione e cioè il primo ed il terzo uguale, il secondo opposta ai primi.

La combinazione delle forme del primo individuo è:

$(100)\,(310)\,(110)\,(010)\,(421)\,(221)\,(732)\,(111)\,(001)$.

Del secondo vedonsi appena sviluppate:

$(\underline{100})\,(\underline{0\bar{1}0})\,(\underline{3\bar{1}0})\,(\underline{1\bar{1}0})\,(\underline{2\bar{2}\bar{1}})\,(\underline{3\bar{3}\bar{1}})\,(\underline{10\bar{1}})$.

Del terzo in posizione del primo vedesi la sola parte verso — X:

$(010)\,\bar{1}10)\,(\bar{3}10)\,(\bar{1}00)\,(\bar{2}21)\,(\bar{3}31)\,(\bar{1}01)$.

Le forme 732 e 421 si presentano come una faccia unica curva e danno immagini non perfette ma non trascurabili; però tutte le altre forme del primo individuo sono opache ma piane; belle sono le forme degli altri due individui ad eccezione di (001) e $(\bar{1}01)$ che sono opache, come quasi in tutti i cristalli di Diopside.

In tal cristallo trovasi la faccia 732 che è nuova.

Essa si è ammessa senza dubbio perchè trovata in più cristalli, e che quantunque pel suo aspetto curvo non fornì mai immagini chiare indiscutibili, essendosi

in alcuni trovata con l'altra pur nuova (702) sulla quale non aveasi dubbio dovette ammettersi pur quella. Difatti dalle misure ottenute si ebbe:

Angoli	Misurati	Calcolati			
—	—	Miller	Kokscharow	Rath	Lehmann
702 : 100	24°. 38′	24°. — 50″	24°. — 53″	24°. — 55″	24°. 4′. 26″
702 : 111	34°. 39′	34°. 53′	34°. 51′. 21″	34°. 50′. 20″	34°. 48′. 47″
010 ; 732	70°. 24 — 69°. 52′,	70°. 9′. 10″	70°. 12′. 38″	70°. 13′. 36″	70°. 14′. 13″
100 : 732	30°. 34′	30°. 46′. 20″	30°. 44′. 20″	30°. 43′. 50″	30°. 46′. 6″

Questi risultati potrebbero sembrare non i più soddisfacenti, pure tali non sono qualora si consideri il brutto aspetto fisico delle dette facce, con tutto ciò si è pur certi su esse dall'averle trovate in più cristalli assieme alle altre forme già note (501) (311) (221) le quali han permesso la verifica delle zone.

Tutto il cristallo ha una sezione di mm. 7 per 7, alla sua parte inferiore è rotto essendo stato levato dalla roccia in cui trovavasi impiantato.

I due individui estremi sono quasi egualmente sviluppati, mentre l'intermedio è appena sviluppato ma ben distinguibile macroscopicamente.

N° 16040 e fig. 1 e 2 Tav. II.

Questo cristallo limpidissimo e di bellezza unica, proviene dalla medesima località del precedente e come questo ne ha l'abito.

Si compone anch'esso di tre individui gli estremi ben sviluppati, l'intermedio appena.

Il primo ha la combinazione seguente:
(100) (310) (110) (010) (421) (311) (111) (501) (001) e $(22\bar{1})$ nella parte inferiore ove per essere rotto non si vede altro.

Il secondo mostra solo le forme:

$(\underline{100})$ $(\underline{3\bar{1}0})$ $(\underline{1\bar{1}0})$ $(\underline{0\bar{1}0})$ $(\underline{3\bar{3}\bar{1}})$ $(\underline{2\bar{2}\bar{1}})$ $(\underline{10\bar{1}})$.

Il terzo che è nella posizione del primo ha apparenti:

(010) $(\bar{1}10)$ $(\bar{3}10)$ $(\bar{1}00)$ $(\bar{3}31)$ $(\bar{2}21)$ $(\bar{1}01)$.

Esso ha le facce tutte splendentissime e piane, ed al polarizzatore mostra molto bene la diversa estinsione negli individui come pel precedente; non che le due linee di separazione fra essi individui.

Le figure 1 e 2 dimostrano anche la combinazione di questo cristallo qualora si sopprimano le facce 732 e 221 aggiungendovi le altre (311) e (501).

Le dimensioni sono poco minori del precedente.

N° 16790.

Questo cristallino limpidissimo che non ha in sezione orizzontale più di un mm. di lato, ha l'abito del precedente sia per il numero degli individui di cui si compone, sia per lo sviluppo di essi, non che per la pressochè uguale combinazione delle forme.

Infatti, il primo individuo ci mostra:

(100) (510) (310) (110) (010) (421) (111) (231) (001).

Il secondo appena sviluppato ha apparenti:

$\underline{(100)}\ \underline{(0\bar{1}0)}\ \underline{(2\bar{2}\bar{1})}\ \underline{(10\bar{1})}$.

Il terzo sviluppato quanto il primo ha:

$(010)\ (\bar{1}10)\ (\bar{3}10)\ \bar{5}10)\ (\bar{1}00)\ (\bar{3}31)\ (\bar{2}21)\ (\bar{1}01)$.

Le faccette, ad eccezione di $(\bar{1}01)$ opaga, sono tutte splendentissime.

Si è tralasciato di presentarne il disegno essendo simile a quello del precedente 16040.

N° 16046 Tav. II.

Anche questo cristallo di Diopside si compone di tre individui che per essere gli estremi poco sviluppati, e pochissimo poi l'intermedio si presenta quasi tabulare; difatti la sua sezione orizzontale è di mm. 6 per 3.

La combinazione osservata è:

Pel primo individuo:

(100) (510) (310) (110) (120) (010) (732) (221) (111) (311) (501) (702) (301) (001).

Pel secondo sono apparenti:

$\underline{(0\bar{1}0)}\ \underline{(2\bar{2}\bar{1})}\ \underline{(10\bar{1})}$.

Pel terzo in posizione del primo:

$(010)\ (\bar{1}20)\ (\bar{1}10)\ (\bar{3}10)\ (\bar{5}10)\ (\bar{1}00)\ (\bar{2}21)\ (\bar{3}31)\ (\bar{1}01)$.

Per essere inferiormente rotto non si osserva niuna faccia. La (732) è curva onde potrebbe darsi che vi fosse pur la (421) ma per la poco perfezione d'immagini che si hanno al goniometro non può asserirsi.

Le forme del terzo individuo sono striate come d'ordinario.

Anche tal cristallo che è ben trasparente ha permesso di far le osservazioni ottiche accennate nei precedenti, ottenendone i medesimi risultati.

N° 16041 e fig. 3 Tav. II.

Quest'altro cristallo di Diopside costituito anch'esso di tre individui ha di particolare sui precedenti che il terzo individuo essendo completo nella sua parte anteriore e posteriore, mostra gli angoli rientranti proprî delle geminazioni, il che non si è osservato nei fin qui descritti.

Le forme apparenti di ciascuno individuo sono:

Pel primo:

$(100)\ (510)\ (310)\ (110)\ (010)\ (501)\ (421)\ (111)\ (001)\ (33\bar{1})\ (22\bar{1})$.

Pel secondo che è appena sviluppato:

$\underline{(0\bar{1}0)}\ \underline{(3\bar{3}\bar{1})}\ \underline{(2\bar{2}\bar{1})}\ \underline{(10\bar{1})}$

le altre forme della zona dei prismi verticali sono sottilissime linee mentre è molto esteso il pinakoide 100.

Pel terzo che è identico al primo osservasi, a differenza di questo, che ha pochissimo sviluppate le forme anteriori verso + X mentre sono ben sviluppate le posteriori verso — X.

L'aspetto delle facce notate è indentico che nei precedenti: e le dimensioni dell'intero cristallo sono mm. 8 per 5 in sezione orizzontale.

N° 15961 Tav. III.

Rimarchevole è questo bel cristallo della varietà Pirgome proveniente da M. Acuto sopra Traversella.

Esso in tutto il suo aspetto fisico somiglia al già descritto N° 15958 col quale ha comune la combinazione delle forme che costituiscono ciascun individuo; solo ne differisce pel numero di essi, risultando questo di tre individui, dei quali i due ultimi sono così perfettamente ed egualmente sviluppati che senza la spiegazione del gemello 15958 difficile sarebbe stato il comprendere in questo che il primo individuo non è che identico al terzo dei quali l' uno mostra la sua parte anteriore e l'altro la posteriore.

La rappresentazione infatti di tale combinazione per mezzo della proiezione sul piano di simmetria, si ha dalla fig. 3 della Tav. I qualora al secondo individuo se ne aggiunge un terzo nella posizione del primo, ossia il gemello del secondo.

Questo cristallo come l'altro ha pochissimo sviluppati i pinakoidi verticali e molto i prismi $(110)\ (\bar{1}10)$.

N° 15917 e fig. 1 Tav. III.

Bellissimo ed importante è questo cristallo della varietà Diopside perchè terminato completamente alla estremità inferiore e poi sopra ogni altro per il numero degli individui che dietro accurato esame in esso svelansi.

Infatti risulta di un:

I°. Individuo avente la combinazione di forme apparenti:

$(100)\ (510)\ (310)\ (110)\ (421)\ (501)\ (111)\ (33\bar{1})\ (22\bar{1})\ (11\bar{1})\ (10\bar{1})$,

II° più elevato che ci mostra:

$(\underline{100})\ (\underline{3\bar{1}0})\ (\underline{1\bar{1}0})\ (\underline{3\bar{3}\bar{1}})\ (\underline{2\bar{2}\bar{1}})\ (\underline{10\bar{1}})$,

III° nella posizione del primo ha apparenti:

$(100)\ (421)$,

IV° nella posizione del secondo:

$(\underline{1\bar{1}0})\ (\underline{3\bar{3}\bar{1}})\ (\underline{2\bar{2}\bar{1}})\ (\underline{10\bar{1}})$,

V° nella posizione del 1° e 3° con apparenti:

$(421)\ (111)$.

Tutti questi mostrano la lor parte anteriore, indi seguono mostrando la parte posteriore un:

VI° con le forme apparenti:

$(\underline{\bar{4}\bar{2}\bar{1}})\ (\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}})$,

VII° finalmente con

$(\bar{2}21)\ (\bar{3}31)$

più la zona dei prismi verticali verso l'asse — X cioè

$(010)\ (\bar{1}10)\ (\bar{3}10)\ (\bar{5}10)\ (\bar{1}00)$.

Il notevole però in tal cristallo si è il diverso sviluppo di ciascun individuo, giacchè mentre gl' intermedî dal 2° al 4° son delle lamelle di maggiore o minore spessore le une alle altre sovrapposte nelle quali la (100) va sempre più estendendosi, il 1° e l'ultimo finiscono per unirsi e quasi involucrano gli intermedî in

modo che nella parte inferiore costituiscono un individuo semplice ben terminato e che senza la parte superiore non si sarebbe mai supposto costituito da tanti individui gemelli polisintetici.

A rendere più evidente tale accoppiamento si è fatto al solito la proiezione sul piano di simmetria (v. fig. 1) che mostra l' individuo generatore (mi si passi l'espressione) e la posizione e sviluppo relativo di ogni individuo per quanto si è potuto approssimarsi al vero.

Tutto il cristallo ha una sezione orizzontale di mm. 13 per 7 ed un'altezza massima di mm. 27.

Le facce sono di vario aspetto fisico le $(\bar{2}21)$ striate a ventaglio; le (421) ricurve tutte; nette le (111); opache le (100) e $(\bar{1}01)$.

Il cristallo nella sua parte superiore è di color verde-ulivo trasparente, nella sua parte inferiore è bianco verdognolo e semitrasparente quasi opaco; fenomeno spiegato dal Dölter che ha istituito analisi sulle due parti del Diopside di Ala, proveniente dalla aggiunta di allumina nella composizione chimica della parte inferiore ([1]).

N° 15934 e fig. 2 Tav. III.

Complicato si presenta questo cristallo di Diopside proveniente dalla medesima località dei precedenti, pel modo con cui sono sviluppati gl'individui che lo compongono.

Difatti il primo che è completo sia nella parte anteriore che posteriore ha la combinazione seguente:

$$(100)(510)(310)(110)(010)(\bar{1}10)(501)(001)(421)(221)(311)(131)(041)(\bar{2}21)(\bar{3}31).$$

Il secondo che è quasi invisibilmente sviluppato ha apparenti:

$$(\underline{0\bar{1}0})\ (\underline{2\bar{2}\bar{1}})\ (\underline{1\bar{1}\bar{1}})\ (\underline{10\bar{1}}).$$

Il terzo che è poi ben sviluppato completerebbe il primo con le sue forme visibili:

$$(010)\ (\bar{1}10)\ (\bar{3}10)\ (\bar{5}10)\ (\bar{1}00)\ (\bar{3}31)\ (\bar{2}21)\ (\bar{1}11)\ (\bar{1}01).$$

Però fra il 1° ed il 2° (come si è cercato di riprodurre in disegno) si era cominciata a deporre altra sostanza che iniziava le forme

$$(\bar{1}21)\ (\bar{1}11).$$

Le facce 421, 221, 311 formano un tutto curvo in cui non osservansi i relativi spigoli ed i quali simboli si sono ottenuti da immagini per quanto imperfette pur tali da non essere trascurabili e massime perchè relativamente bene i valori angolari corrisposero ai richiesti dal calcolo.

La (121) è semiopaca come pure perfettamente opache sono la (001) e $(\bar{1}01)$; striate poi le $(\bar{2}21)$ e $(\bar{3}31)$.

Anch'esso è un cristallo più tosto grosso avendo una sezione di mm. 7 per 8. Alla parte inferiore è rotto e non vi ha quindi alcuna faccia.

([1]) *Zur Kenntniss der chemischen Zusammen setzung des Augits* (Tschermak's min. Mittheil. 1877, S. 337-346).

N° 15928 Tav. III.

Questo gruppo di cristalli è formato dall' accoppiamento di un gemello polisintetico (segnato in disegno con A) a sei individui ed uno semplice (segnato B) principale, essendovene ancora altri pur semplici più piccoli ed imperfetti variamente addossati alle facce prismatiche del polisintetico, e che stan. posteriormente si è tralasciato di aggiungere nel disegno.

In quanto alla geminazione nulla si ha di nuovo sui precedenti eccetto il numero degli individui, per modo che poteva tralasciarsi di descriverlo però si è creduto di farlo per le conseguenze che potran dedursi.

Eccone brevemente la descrizione di tal gruppo.

Il cristallo A si compone di:

Un I° individuo di cui vedesi la sola parte posteriore:

$$(\bar{1}00)\ (\bar{3}10)\ (\bar{1}10)\ (\bar{1}11)\ (\bar{2}21)\ (\bar{3}31)\ (\bar{1}01).$$

Di un II° appena sviluppato di cui vedonsi:

$$(\underline{0\bar{1}0})\ (\underline{\bar{4}\bar{2}\bar{1}})\ (\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}).$$

Di un III° anch'esso appena visibile, con:

$$(010)\ (\bar{1}11)\ (\bar{2}21)\ (\bar{1}01).$$

Indi un IV° idem, con:

$$\underline{0\bar{1}0})\ (\underline{\bar{4}\bar{2}\bar{1}})\ (\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}).$$

Tutti questi nella parte posteriore del cristallo, nell'anteriore poi vi ha, un: V° individuo di cui vedonsi:

$$(421)\ (111).$$

VI° finalmente ben sviluppato con le forme:

$$(\underline{100})\ (\underline{3\bar{1}0})\ (\underline{1\bar{1}0})\ (\underline{3\bar{3}\bar{1}})\ (\underline{2\bar{2}\bar{1}}).$$

Il cristallo B ha poi le forme (301) e (421) curve; (501) (111) $(\bar{2}21)$ $(\bar{3}31)$ splendentissime; (100) e $(\bar{1}01)$ opache e finalmente la zona dei prismi verticali.

Per concludere dando uno sguardo generale all'abito dei suddetti gemelli osservasi che in tutti caratteristicamente uno degli individui estremi è sempre in posizione più bassa degli altri, mentre gl'intermedî vanno quasi sempre più avvicinandosi in altezza a quello dell'altro estremo.

Di più nei geminati polisintetici costantemente gl'individui estremi sono i più sviluppati ed in proporzioni pressochè eguali.

Le differenze di abito fra i geminati della varietà Pirgome e quelle del Diopside sono essenziali e caratteristiche; ed oltre a ciò assolutamente differente è l'aspetto fisico delle facce di medesimo simbolo in esse due varietà.

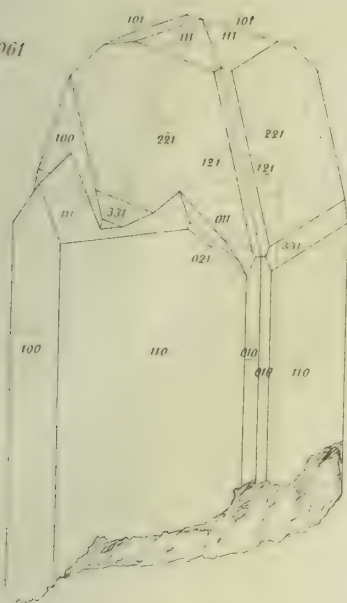
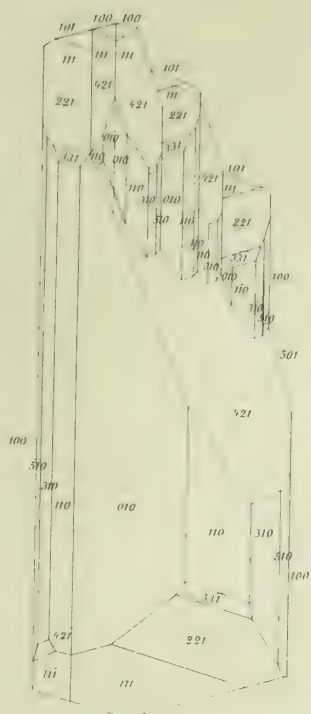
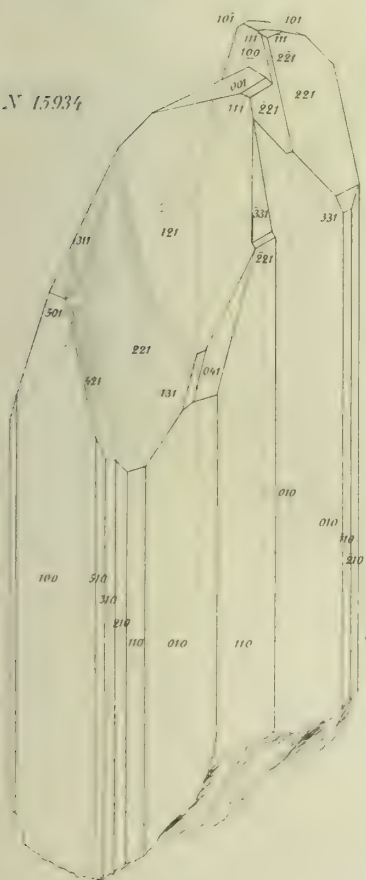
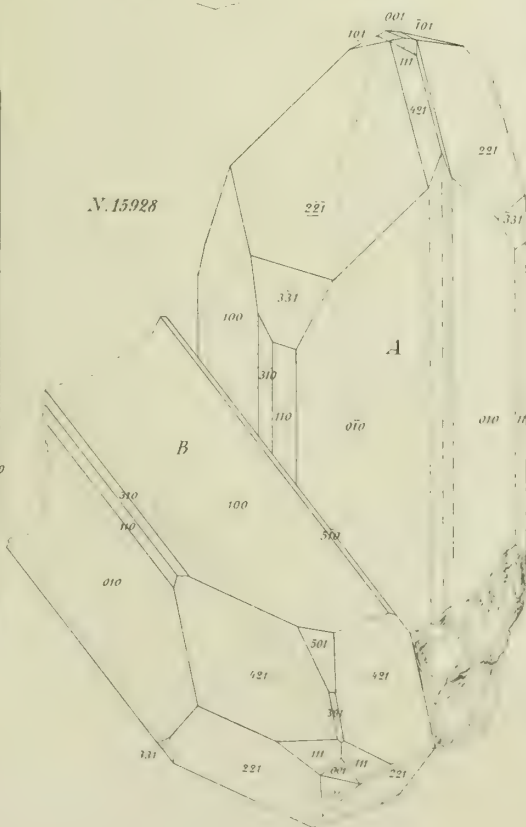
Altre considerazioni sulla genesi di essi cristalli geminati potrebbero pur farsi, ma senza il necessario sussidio delle osservazioni microscopiche sulla interna struttura di essi, non avrebbero valore, ond'è che mi propongo di farle appena mi sarà dato aver cristalli che senza rammarico, potrò sottoporre al taglio.

Prima di chiudere il presente lavoro non è inutile riepilogare le forme abituali osservate nei geminati descritti.

Simboli.

Miller	Naumann	Weiss	Descloizeaux
—	—	—	—
100	∞ P ∞	$a:\infty b:\infty c$	h^{1}
510	∞ ₽ 5	$a:\ 5b:\infty c$	$h^{3}/_{2}$
920	∞ ₽ $^{9}/_{2}$	$a:{}^{9}/_{2}b:\infty c$	$h^{11}/_{7}$
310	∞ ₽ 3	$a:\ 3b:\infty c$	h^{2}
110	∞ P	$a:\ b:\infty c$	m
120	∞ ℞ 2	$2a:\ b:\infty c$	g^{3}
010	∞ ℞ ∞	$\infty a:\ b:\infty c$	g^{1}
501	— 5 ₽ ∞	$a:\infty b:\ 5c$	$0^{1}/_{5}$
702	— $^{7}/_{2}$ ₽ ∞	$a:\infty b:{}^{7}/_{2}c$	$0^{2}/_{7}$
301	— 3 ₽ ∞	$a:\infty b:\ 3c$	$0^{1}/_{3}$
001	0 P	$\infty a:\infty b:\ c$	p
$\bar{1}01$	+ ₽ ∞	$a^{1}:\infty b:\ c$	a^{1}
421	— 4 ₽ 2	$a:\ 2b:\ 4c$	$d^{1}/_{2}\, d^{1}/^{6}\, h^{1} = s$
111	— P	$a:\ b:\ c$	$d^{1}/_{2}$
311	— 3 ₽ 3	$a:\ 3b:\ 3c$	$b^{1}/_{4}\, b^{1}/_{2}\, g^{1}$
121	— 2 ℞ 2	$2a:\ b:\ 2c$	$d'\ \ b^{1}/_{3}\, g^{1} = \mu$
131	— 3 ℞ 3	$3a:\ b:\ 3c$	$d^{1}/_{2}\, b^{1}/_{4}\, g^{1} = \delta$
732	— $^{7}/_{2}$ ℞ 3	$3a:\ b:{}^{7}/_{2}c$	$b^{1}/_{10}\, b^{1}/_{4}\, g^{2}$
041	4 ℞ ∞	$\infty a:\ b:\ 4c$	$e^{1}/_{4}$
021	2 ℞ ∞	$\infty a:\ b:\ 2c$	$e^{1}/_{2}$
011	℞ ∞	$\infty a:\ b:\ c$	e^{1}
$\bar{2}21$	+ 2 P	$a^{1}:\ b:\ 2c$	$b^{1}/_{4}$
$\bar{3}31$	+ 3 P	$a^{1}:\ b:\ 3c$	$b^{1}/_{6}$
$\bar{1}11$	+ P	$a^{1}:\ b:\ c$	$b^{1}/_{2}$

N. 15958
N. 16050
Fig. 1
N. 15918
Fig. 2
Fig. 3
N. 5624

N. 15930
Fig. 1
Fig. 2
N. 16040
Fig. 3
N. 16046
N. 16041

N. 15961
Fig 1
N. 15917
N. 15934
N. 15928
A
B
Fig 2

Di alcune sostanze attive sui muscoli della vescica urinaria degli Animali e dell'Uomo.

Ricerche sperimentali del dott. PAOLO PELLACANI.

Memoria approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 15 aprile 1883.

(con due tavole)

CAPITOLO I.

Fra gli organi a fibre liscie, l'intestino è quello sul quale si diressero dapprima le ricerche degli sperimentatori; la fisiologia dei suoi movimenti ebbe parecchi cultori (Nasse, Legros, Onimus, Salvioli ed altri), e fu oggetto di qualche ricerca anche per alcuni farmacologi.

Meno note invece, furono finora le leggi fisiologiche che regolano i movimenti della vescica. La fisiologia di quest'organo ha attraversato un lungo periodo di controversie, dalle quali derivò fino a noi molta incertezza, anche pei fatti principali, che si riferiscono al modo di funzionare della medesima. Così troviamo nella letteratura delle scarse notizie sull'influenza di qualche sostanza sulla vescica desunte piuttosto da osservazioni terapeutiche, che in seguito a ricerche sperimentali. Il modo d'azione poi di queste sostanze non poteva che rimanere del tutto oscuro, non essendo ben stabilita la dottrina dei rapporti funzionali dei due muscoli della vescica, il meccanismo della mizione, le ragioni fisiologiche del mantenersi dell' urina in vescica, e infine le relazioni di questi muscoli con centri midollari, o con supposti ma non mai effettivamente dimostrati centri cerebrali.

Siccome tutte queste questioni trovarono svolgimento in un lavoro pubblicato due anni fa dal prof. Mosso e da me [1], così accennerò in breve, al partito che ho potuto trarre da una serie di fatti da noi raccolti, per la scelta del metodo di ricerca.

Metodo di ricerca.

Gli autori che per primi hanno proceduto a ricerche sui movimenti dell'utero o dell'intestino, si servirono del metodo semplice dell'apertura dell'addome, e della osservazione diretta degli organi medesimi. Così Nasse osservò lo stato dell'intestino sottoposto all'influenza di alcune sostanze [2], e Wernich quello dell'utero [3].

Legros ed Onimus registrarono i movimenti dell'intestino a mezzo di un apparecchio ad aria, consistente in un palloncino che introdussero nella cavità intestinale, sul quale agendo i movimenti intestinali stessi, questi venivano scritti a mezzo di

[1] *Sulle funzioni della vescica.* Reale Accad. dei Lincei, 1881, vol. XII.
[2] *Zur Physiologie der Darmbewegung.* Centralblatt, 1865.
[3] *Einige Versuchsreichen über das Mutterkorn.* Berlin, 1874.

un poligrafo del Marey ([1]). Polaillon studiò in questo modo, i movimenti dell'utero gravido.

Appresa l'importanza che hanno i movimenti vascolari su quelli degli organi a muscoli lisci, e ciò fino dalla osservazione di Spiegelberg sulla compressione dell'aorta e sui rispettivi effetti sull'utero ([2]), i metodi di studio andarono modificandosi, e però si tenne in questi ultimi tempi un conto esatto dello stato dei vasi sanguigni, in relazione al movimento degli organi a muscoli lisci. Così Salvioli studiò i movimenti del tenue e l'influenza di alcune sostanze su quelli, mantenendo l'intestino in vita a mezzo della circolazione artificiale, ed osservando lo stato dei vasi mediante la valutazione della quantità di sangue che passa pei medesimi nell'unità di tempo ([3]).

Io ebbi occasione di assistere ad una serie di esperienze che il Klein ha eseguito sull'utero con quello stesso metodo, nel laboratorio del prof. Schmiedeberg a Strasburgo.

Le ricerche su citate sulla fisiologia della vescica, hanno dimostrato tutta l'influenza della volontà e degli atti psichici, nonchè tutta l'importanza che hanno gli eccitamenti dei nervi di senso nei loro effetti riflessi sui muscoli della vescica, nonchè rischiararono la via che tengono le fibre di congiunzione nel midollo spinale. Oltre di ciò, quelle ricerche hanno dato un contributo alla conoscenza dei centri che la vescica ha nel midollo lombare, e dei quali Giannuzzi rilevò tutta l'importanza fino dal 1863 ([4]). Ma oltreche delle suesposte influenze, le nostre ricerche dovevano tener a calcolo quelle non meno importanti che derivano dai rapporti funzionali esistenti fra i muscoli vescicali e i vasi sanguigni. Queste relazioni furono dimostrate studiando i movimenti della vescica, corrispondentemente alle variazioni della pressione sanguigna.

Quantunque possa eliminarsi l'ipotesi, che le contrazioni della vescica siano sempre prodotte da movimenti dei vasi sanguigni, tuttavia havvi tra essi un rapporto molto intimo, e colla osservazione contemporanea della pressione del sangue ci siamo persuasi di poter apprezzare perfettamente i movimenti dei muscoli vescicali, nelle loro relazioni colle variazioni di tono dei vasi stessi.

Un' altra influenza non meno palese sui muscoli lisci della vescica, è quella della respirazione. Scrivendo i movimenti della vescica e quelli della respirazione, si osservano molte circostanze, che ne attestano la relazione, esclusa naturalmente ogni causa meccanica, ma per sola influenza nervosa.

Devonsi rammentare infine le relazioni dei muscoli della vescica col simpatico (Valentin, Giannuzzi, Budge, Oehl, Sokowin, Nusbaum): e sebbene i nostri risultati modificassero sensibilmente le opinioni accolte sull'importanza del simpatico nelle funzioni della vescica, ne rimase tuttavia affermata l'influenza motrice sulla vescica stessa.

Per questi fatti, due erano le vie possibili a seguirsi nel metodo delle ricerche, cioè lo studio dei movimenti della vescica isolata dall'organismo, tenendo solo a calcolo le modificazioni nella corrente sanguigna; e l'altra invece, nella quale poteva

([1]) Journal de l'Anatomie, 1868.
([2]) Zeitschrift für rationelle Medicin II.
([3]) *Methode für die Untersuch. der Funzionen des Dünndarms.* Leipzig, 1880.
([4]) *Recherches phys. sur les nerfs moteurs de la vessie.* Journal de la Phys. 1863.

tenersi a calcolo ogni influenza possibile, nervosa, vascolare, o respiratoria sui muscoli vescicali, ponendoci anzi in condizioni di osservare per qual via diverse sostanze riescano principalmente a far sentire la loro azione sui muscoli della vescica.

Ho tenuto questo secondo metodo, perchè mi permetteva di studiare le modificazioni subìte da questo organo, in rapporto a quelle dell'organismo intiero, e vidi così che alcune sostanze determinano delle condizioni favorevoli, a porre in evidenza taluni fatti fisiologici meno evidenti nello stato normale.

La vescica è organo complesso, avendo in se stessa le condizioni necessarie al soffermarsi dell'urina. Perciò non solo ricercai l'influenza che alcune sostanze esercitano sulla muscolatura del detrusore, ma altresì su quella parte di muscolatura della vescica, che mantiene la chiusura dell'organo. Così questo studio può servire di contribuzione alla conoscenza dei rapporti funzionali, dei due muscoli della vescica.

Per istudiare l'influenza di qualche sostanza sul detrusore tenendo a calcolo ogni rapporto fisiologico, si sottraeva la vescica ad ogni influenza meccanica aprendo la cavità addominale, o tenendo almeno conto esatto di ogni variazione della pressione addominale, a mezzo di un pneumografo del Marey applicato all'addome. In questo secondo modo la vescica rimaneva in condizioni perfettamente normali. Col primo metodo, una cannula veniva direttamente portata in vescica mediante una apertura fatta al collo di essa, e col secondo, veniva introdotta una sonda in vescica per la via dell'uretra. In ogni modo la cavità della vescica veniva messa in comunicazione col *pletismografo* del Mosso, che permette di impiegare pressioni relativamente piccole che si conservano costanti, mentre possono dimostrarsi le più leggere variazioni di tono della vescica. Il moltiplicarsi poi delle variazioni del tono della vescica negli animali che si esperimentavano, ed il presentarsi di contrazioni senza causa nota quando la vescica è sottoposta ad influenze cerebrali, sono circostanze che avrebbero potuto rendere oscuri i risultati di queste ricerche; onde ad eliminare questa serie di influenze che svolgonsi a nostra insaputa, era indispensabile il sottrarre la vescica all'influenza cerebrale mediante il taglio del midollo spinale, cercando di mantenerne nelle migliori condizioni la regione lombare.

La sezione del midollo praticavasi per lo più alla regione dorsale, mentre un manometro in comunicazione colla carotide registrava la pressione del sangue, ed un pneumografo applicato al torace in comunicazione col poligrafo del Marey indicava lo stato della respirazione. Le influenze che si esercitavano sui muscoli della vescica a mezzo del simpatico o del midollo lombare, venivano studiate a midollo e nervi intatti o recisi.

Se questo metodo poteva dare un' idea esatta delle più piccole modificazioni, che avvengono nel detrusore della vescica, non ci dava nozione alcuna sul modo di comportarsi di quel sistema di fibre circolari, che circondando l'orifizio uretro-vescicale costituiscono lo sfintere della vescica propriamente detto.

Perciò volendo studiare l' influenza di alcune sostanze sulla vescica in generale, si introdusse nella vescica per la via di un uretere una cannula, la quale a mezzo di un tubo di *catgut* poneva in relazione la cavità della vescica con una boccia di Mariotte. Questo tubo poi era interrotto da un serpentino, nuotante in una vaschetta di rame che poteva riscaldarsi. In tal modo l'acqua che dalla boccia di Mariotte

entrava nella vescica, attraversando il serpentino, prendeva una temperatura, che avevamo regolata intorno a 37°. A pag. 25 del lavoro *sulle funzioni della vescica* può vedersi disegnato l'apparecchio, del quale mi sono servito, sostituendo alla buretta una boccia di Mariotte.

Aperta l'uretra al perineo, una cannula veniva introdotta nell'uretra stessa fino alla porzione prostatica, rimanendo al difuori della vescica.

In questo modo potevano variarsi le pressioni del contenuto vescicale, osservare lo stato del detrusore, e la comparsa dell'incontinenza dalla cannula uretrale. Così prendevasi cognizione dello stato dello sfintere vescicale, essendo perfettamente eliminata l'influenza della muscolatura uretrale.

Con questo metodo si procedette a varie ricerche, intese specialmente a determinare l'*influenza di alcune sostanze* sui *due muscoli vescicali* ed a studiare il modo di funzionare dei muscoli stessi.

CAPITOLO II.

Le sostanze che si sono studiate nella loro influenza sui due muscoli della vescica possono raccogliersi in due categorie. Alcune tendono a diminuire il tono di questi muscoli, sia in modo diretto, che indiretto: come per influenza sul sistema vascolare, o nervoso. Altre, invece, tendono ad aumentare il tono dei muscoli lisci. Alle prime appartengono gli anestetici, cloralio, cloroformio; i narcotici ed altre sostanze in generale paralizzanti dei vasi sanguigni. Alle seconde appartiene maggior numero di sostanze spettanti a diversi gruppi farmacologici. Si è studiata l'influenza di queste sostanze sui muscoli vescicali, isolati o no dai centri nervosi, ed in diverse condizioni, onde portare anche per questa via contribuzioni alla dottrina del meccanismo della mizione. A queste ricerche, hanno servito cani piuttosto giovani perchè in condizioni normali di tonicità dei muscoli vescicali. I risultati possono rappresentarsi con qualche tavola schematica, nella quale i numeri scritti a sinistra sulle ordinate, rappresentano in centimetri, la pressione che si deve esercitare per mezzo della boccia di Mariotte, per osservare incontinenza dell'uretra, le linee verticali, corrispondono ad altrettante osservazioni, di ugual tempo di durata.

Così in una esperienza, determinata la pressione necessaria ad avere incontinenza, in un cane a cui si è aperto l'addome, e la vescica è posta in comunicazione coll'apparecchio accennato, pressione trovata uguale a 90 c.; si osserva l'influenza del cloroformio che insieme ad una dilatazione della vescica per perdita di tono, mostra che una pressione minore, uguale a 60, è sufficiente a far comparire incontinenza dall'uretra. Si continua la cloroformizzazione fino a sonno profondo, e si osserva insieme a questo, una dilatazione maggiore della vescica, mentre la pressione necessaria all'incontinenza si riduce sempre minore, cioè a 33. Avviene una contrazione spontanea della vescica, questa si riduce evidentemente di volume, ed occorre in questo momento una pressione assai forte uguale ad 80 c. per osservare l'incontinenza. Cessata la contrazione, la vescica si lascia maggiormente dilatare dal liquido, ed una pressione minore, dà incontinenza. Il cloroformio provoca di nuovo i fenomeni osservati. La dilatazione della vescica aumenta ancora colla distruzione del midollo lombare, ed insieme a ciò con basse pressioni si ha l'incontinenza, l'influenza del CO^2 riesce a farsi sentire sulla vescica, anche indipendentemente dai suoi rapporti coi centri nervosi. Così per la chiusura della trachea, osserviamo una leggiera contrazione della vescica, durante la quale è necessario di inalzare la ressione della boccia di Mariotte per osservare incontinenza.

In altro modo possono osservarsi gli stessi fatti, provocati da cause differenti. Si determina cioè il valore della perdita di tono che segue nella vescica, al taglio del midollo cervicale, e l'influenza della sottrazione della vescica dai suoi rapporti col cervello sul tono di ambidue i muscoli vescicali. Vi ha una perdita di tono comune a questi muscoli, che noi riesciamo ad aumentare, somministrando del cloralio all'animale. Così di effetto comune sui due muscoli della vescica, si dimostrano le irritazioni dei nervi sacrali, dei simpatici, del midollo ecc. ecc.

Si possono moltiplicare queste esperienze variando le condizioni ma cogli stessi risultati, poichè tanto per via fisiologica, come per l'azione di sostanze attive, i due muscoli della vescica dimostrano di risentire nello istesso modo le medesime influenze. Così è per la stricnina e per l'ergotina. Queste ed altre sostanze, aumentano il tono in generale dei muscoli della vescica.

Sarà utile qualche particolare intorno all'azione d'una sostanza, che come verrà dimostrato più tardi, agisce sulla vescica coll'intermezzo della respirazione, cioè il curaro. Per questa sostanza si ammise un'azione elettiva sullo sfintere cioè, una distensione del medesimo, che spiegasse la perdita d'urina che avviene negli animali curarizzati (Kölliker, Bernard) [1].

L'azione del curaro sullo sfintere della vescica, sembrò appoggiare il concetto allora dominante dello sfintere sotto influenza volontaria, e di fibre nervose motrici d'origine cerebrale per questo muscolo epperò la paralisi dello sfintere, fu collocata accanto a quella dei muscoli volontari, per influenza del curaro (Bidder) [2].

Coll'apparecchio che ha servito a queste ricerche, dirette su ambedue i muscoli della vescica, si può dimostrare che quando la respirazione incomincia ad essere influenzata dal curaro, la vescica aumenta di tono, e di un aumento generale, onde occorre una forte pressione, perchè il liquido dalla boccia di Mariotte passi nell'uretra. Questo fatto aumenta col farsi incompleta e superficiale la respirazione. Quando poi questa s'arresta, la vescica entra in forte contrazione e la pressione sul suo contenuto diventa sufficiente a superare la tonicità delle fibre del collo, onde determinasi un getto d'urina. È a notarsi che lo sfintere esterno di fibre striate paralizzato dal curaro, non può opporre coll'influenza volontaria, nessun ostacolo al fluire del liquido dalla vescica.

Ripresa la respirazione artificiale, se questa è sufficiente, la vescica riacquista il tono normale; se la respirazione è esagerata, si osserva il fenomeno della apnea nel suo effetto di diminuzione del tono della vescica in generale.

Non entro per ora in maggiori particolari intorno all'influenza di sostanze sui due muscoli della vescica, e siccome questi sia sotto l'influenza dei centri nervosi, sia sottratti a questa influenza, dimostrarono lo stesso modo di funzionare comportandosi come un solo muscolo. Così tutto ciò aggiunge maggiori contribuzioni alla dottrina da noi emessa sul meccanismo funzionale della vescica.

Il concetto della indipendenza nelle funzioni dei due muscoli fondato sulle differenze d'innervazione, va sempre più perdendo terreno, e vi si sostituisce l'altro dell'innervazione comune dei due muscoli, con centri cerebrali e midollari. Le lesioni dei quali centri, o l'interruzione dei rapporti fra i centri cerebrali e la vescica, come pure le conseguenze delle alterazioni del midollo lombare (degenerazioni delle fibre nervose, atrofia delle muscolari), spiegano i diversi fatti che va presentando la sintomatologia delle paralisi vescicali.

[1] Bernard et Pelouze, Comptes rendus XXXI. — Kölliker, Arch. für path. Anat. X, 3.

[2] *Ueber die Unterschiede in den Beziehung des Pfeilgifts, zü versch. Abtheilungen des Nervensystems.* Reymond — Reichert Archiv, 1865.

CAPITOLO III.

Influenza della temperatura sui muscoli della vescica.

Le temperature inferiori alla normale aumentano il tono della vescica; così la penetrazione d'acqua a 10° 12° in vescica, è seguìta da contrazioni che si ripetono, e da aumento forte di tono dell'organo. È frequente di osservare come le basse temperature, inducono contratture più o meno persistenti, onde una vescica di un piccolo animale riesce a vincere fortissime pressioni, es. quella di una colonna d'acqua di un metro d'altezza. Mentre permane questo stato di contrattura, anche abbassando la pressione, la colonna d'acqua resta immobile, per fatto della contrazione spastica dell'organo. Le temperature intorno a 40° portano la perdita del tono della vescica, la quale tende a dilatarsi sotto leggiera pressione: avvicinandosi però la temperatura a 42°, si osserva già il fatto opposto, cioè contrazioni della vescica. La vitalità di questi muscoli lisci, resiste poi a temperature superiori, le quali determinano delle contrazioni, meno forti però e meno persistenti di quelle osservate per il freddo. I muscoli lisci della vescica permangono lungo tempo eccitabili per variazioni di temperatura dopo la morte, ed anche quando l'eccitazione elettrica, non manifesta più alcune influenze sui muscoli medesimi.

A dimostrare tutta l'influenza che ha la temperatura sul tono della vescica, riferirò di una esperienza che riguarda un cane vecchio obeso, a vescica fortemente atonica, fissato il quale in posizione supina si introdusse per l'uretra una sonda in vescica, e questa fu messa in comunicazione col solito apparecchio, col quale si dava la temperatura di 38° all'acqua penetrante in vescica. Vuotata anzitutto la vescica del cane, si è osservato quant'acqua passasse nella vescica del medesimo, sotto determinate pressioni ed in tempi uguali.

Si determina dapprima la quantità d'acqua che penetra nella vescica del cane vecchio a determinate pressioni ed in tempi uguali, e si osserva che a pressioni di 15 c. la vescica conteneva 1275 cc. di liquido; e ciò che è singolare senza presentare alcuna contrazione, fatto che sta in relazione coll'atonia delle fibre muscolari, che si osserva nella vecchiaia. Si applica quindi per 15' una vescica di ghiaccio all'ipogastrio, dopo che fu vuotata la vescica; e si osserva che a 15 c. di pressione non entrano di più di 300 cc. di acqua a 38°, presentando inoltre la vescica più o meno forti contrazioni. Viceversa avviene se si applichi una temperatura superiore alla normale sulle pareti addominali.

Nella pratica è già noto tutto il vantaggio che può ricavarsi applicando il freddo all'ipogastrio, od al perineo durante una emoraggia della vescica. Ora il risultato che si ottiene, non è solo dovuto a contrazione vascolare, ma in gran parte alla contrazione e riduzione di volume dell'organo sotto l'azione del freddo. Altrettanto dicasi dell'influenza del caldo, in diverse forme di ipercinesi della vescica.

CAPITOLO IV.

Sostanze che influiscono sulla vescica urinaria, coll'intermezzo della respirazione.

Curaro.

Una delle sostanze che dimostra un'influenza più attiva coll'intermezzo di variazioni respiratorie, e ciò non in via meccanica, ma per rapporti funzionali tanto intimi fra la respirazione ed il tono dei muscoli lisci della vescica, è il curaro. È

già noto, che il curaro dimostra un' attività sui muscoli vescicali, ma non conoscendo i rapporti di questi muscoli collo stato della respirazione, se ne attribuì il modo d'azione ad un' influenza diretta. I primi ad osservare gli effetti di questo agente sulla vescica urinaria furono Bernard e Kolliker [1]: Bernard nota lo scolo dell'urina dalla vescica e spiega il fenomeno « per una distensione degli sfinteri ».

Bidder osserva direttamente la vescica, durante l'avvelenamento di curaro e scrive [2]: Appena si manifesta l'azione del veleno, la contrazione della vescica è evidente. Questa impicciolisce e si raggrinza come una piccola massa globosa, spessa, grossa come una nocciuola, e ciò mentre il cuore agisce fortemente, i moti peristaltici sono esagerati e l'eccitazione galvanica del frenico e dello sciatico non danno luogo a contrazione alcuna; mentre il vago ed il simpatico mantengono l'azione loro sul cuore.

L'uscita della urina secondo Bidder, è da attribuirsi alla diminuita attività dello sfintere, poichè solo questo è innervato dai nervi spinali; mentre il simpatico per nulla irritato, non esercita influenza alcuna sul detrusore.

Secondo Bidder, la mizione sotto l'influenza del *curaro*, dimostrerebbe per lo sfintere, l'esistenza di fibre nervose, sottoposte alla volontà. Bidder ammette la paralisi di queste fibre, e crede risparmiate le fibre simpatiche.

Da poco tempo Couty e Lacerda studiarono l'azione del curaro sui muscoli della vita organica [3], che questi autori dissero muscoli del sistema simpatico. Espongono il modo d'azione del curaro nel seguente modo: Avvenuto l'arresto del respiro e la perdita della eccitabilità dei nervi motori, i muscoli lisci restano ancora normali; anche quando i pneumogastrici non sono più eccitabili, i riflessi sulla vescica per irritazione dello sciatico si esercitano ancora, così arrestando il respiro. Esige però la mizione asfittica due fatti: esistenza di liquido in vescica, e pressione sanguigna alta.

Fin qui, il primo periodo d'azione del curaro sui muscoli del sistema simpatico. Il secondo periodo, secondo gli autori, sarebbe quello di eccitamento, perchè contrassegnato dai vomiti, dalla mizione, dalle evacuazioni intestinali, dalla dilatazione pupillare.

Questi fenomeni a parere di Couty e Lacerda possono avvenire senza turbamenti respiratorî, onde essi sostengono un'azione eccitante del curaro sul simpatico, e sugli organi da esso innervati. Traube e Kolliker ammisero un' azione eccitante del curaro sui movimenti intestinali [4]. Hasse trova questo fenomeno incostante [5]; esclude la paralisi dello splancnico come causa di questo fatto, essendo che questo nervo non è influenzato dal curaro; ammette che il veleno agisca sull'intestino medesimo.

A nessuno può sfuggire la discordia che regna in tutte queste interpretazioni. L'opinione di Kolliker è in contraddizione con quella di Bidder fondata sull'innervazione dello sfintere sottoposto all'influenza volontaria.

[1] Bernard, loco cit. — Kolliker, id.
[2] Reymond-Reichert, Archiv, 1865.
[3] Archives de Physiologie, 1880.
[4] Centralblatt, 1863, p. 67. — Wirchow's, Archiv, Bd. X.
[5] *Zur Physiologie der Darmbewegung.* Centralblatt, 1865, 785.

Opinione quest'ultima arrivata fino a noi senza molte difficoltà, essendosi spesso confusa l'importanza dello sfintere esterno di fibre striate sottoposto alla volontà, con quella dello sfintere di fibre lisce, che possiede in se stessa la vescica urinaria. Per molteplici vie può il curaro influenzare i muscoli lisci, e quelli della vescica urinaria fra gli altri, senza possedere un'azione particolare elettiva su questo sistema muscolare. Basti rammentare le influenze del curaro sui vasi sanguigni (1), sul vago, (2), nonchè sul cuore (3); senza escludere la sua azione anche diretta, la quale dagli autori succitati fu ammessa sulle fibre del simpatico, e sugli organi da queste fibre innervati.

Ma il curaro può anzitutto influenzare lo stato dei muscoli lisci coll'intermezzo della respirazione, ed è per questa via appunto che osservammo verificarsi le più frequenti modificazioni nei muscoli lisci.

È nota l'azione caratteristica del curaro sulle estremità nervose (4); anche per le fibre muscolari lisce si ammise una paralisi delle estremità nervose relative, subito dopo di quella dei muscoli volontarî (5).

Ma questa dottrina è tutt'altro che esatta: poichè avviene appunto che queste fibre molto tardi ed incompletamente, vengono ad essere paralizzate.

Ciò potei dimostrare in due modi:

1° Colla persistenza dei riflessi da parte dei nervi sensibili del corpo sulla vescica, anche a periodo molto avanzato di avvelenamento da curaro; 2° Per la persistenza del tono normale nei muscoli della vescica, anche a periodo inoltrato di curarizzazione, e con una respirazione artificiale che poneva al sicuro d'ogni effetto su questi muscoli. Anche negli animali curarizzati, i quali presentavano più deboli i movimenti riflessi, trovai sempre che l' irritazione elettrica dei nervi motori, portava la contrazione della vescica urinaria.

Si può ammettere perciò che l'azione diretta del curaro su questo sistema muscolare sia molto tarda, ed intervenga solo cogli effetti del curaro sul cuore, e sugli apparecchi gangliari periferici (intestino, vescica, ecc.).

L'azione principale sui muscoli della vescica, si fa per la via delle influenze respiratorie. Le esperienze dalle quali risulta questo fatto, furono praticate osservando contemporaneamente con metodo grafico i movimenti della vescica urinaria, la respirazione, la pressione del sangue. Questi fenomeni furono registrati a mezzo del chimografo di Ludwig, messo in movimento da un motore Langen e Wolff.

L'esperienza che imprendo a descrivere fu praticata su un grosso cane del peso di chilogr. 20, al quale era stata fissata una cannula tracheale, dopo aver subìto la distruzione del midollo lombare, all'oggetto di isolare la vescica dall'influenza nervosa. L'animale era tranquillo, la sua vescica a scoperto, e mediante una cannula condotta per la via dell'uretra, sotto pressione di 10 cc. in comunicazione col pletismografo.

La pressione sulla vescica viene sempre misurata con un livello ad acqua, fatto di un tubo di

(1) Kölliker, Zeitschrift für wissenschaft. Zoologie, IX, 434.

(2) Haidenhain, Allg. med. Centralztg. 1858. — Wundt, Verhandl. d. natur. zü Heidelberg, 1859.

(3) Traube, *Untersuchungen über die Innervation des Herzens*. Leipzig, 1863.

(4) Bernard et Pelouze, Comptes rendus, XXXI.

(5) Hermann, *Toxicologie*.

catgut lungo 1 metro terminato con due tubetti di vetro; l'uno applicasi presso la vescica l'altro a livello dell'acqua della provetta galleggiante del pletismografo.

La pressione del sangue, la respirazione, davano un tracciato normale, la vescica si dilatava lentamente. In A, si iniettano nella giugulare 0,02 di curaro. L'iniezione è seguìta immediatamente da una variazione profonda nel tracciato della respirazione, la quale si fa frequente, incompleta, indi lenta, superficiale. La pressione innalzasi rapidamente, e dimostrasi evidente una irritazione del vago, e contemporaneamente a queste variazioni, la vescica entra in contrazione. Si osservano quindi modificazioni nella pressione e nella respirazione con effetti simultanei sui muscoli della vescica. Ambedue queste influenze potrebbero per loro conto agire sui muscoli lisci della vescica, riesce facile però il determinare che precisamente è l'influenza respiratoria che agisce sulla vescica, poichè se facciamo la respirazione artificiale la pressione rimanendo la medesima, la vescica si dilata: e non appena si sospende la respirazione artificiale in D, torna la vescica ad entrare in contrazioni rimanendo press'a poco tale la pressione. Non appena l'animale fa conati respiratorî, la vescica torna a dilatarsi in E. Questi fatti possono ripetersi a volontà, e siccome il loro rapporto è costante colle influenze respiratorie, e queste indipendentemente dai riflessi trasmessi dai centri superiori della vessica, o da effetti del CO^2 sui centri del midollo lombare, così non dubitiamo di affermare, che le modificazioni della respirazione agiscono direttamente sui muscoli lisci, indipendentemente dalle modificazioni dei vasi sanguigni, e dalla pressione.

Come l'azione del CO^2 si fa maggiormente sentire sulla vescica, quando questa mantiene i suoi normali rapporti coi centri nervosi del midollo spinale, così anche per influenze del curaro, le modificazioni della respirazione, conducono in questo caso ad effetti maggiori.

Da tutto ciò deriva: che la mizione sotto l'influenza del curaro, è strettamente legata alle modificazioni della respirazione. Le contrazioni che si determinano per azione del sangue dispnoico, se sono forti, bastano all' espulsione del liquido vincendo la resistenza dell'orifizio uretro-vescicale.

CAPITOLO V.

Sostanze che manifestano la loro influenza sui muscoli della vescica coll'intermezzo del sistema nervoso.

Stricnina.

Una sostanza con azione elettiva sull' eccitabilità del midollo spinale, e che esercita tanta influenza sui vasi sanguigni (Richter, Meyer) (¹) sia in modo diretto, che riflesso (Vulpian); non può a meno d' influenzare la vescica urinaria ne' suoi muscoli, mentre vengono eccitati, tanti sistemi che con quei muscoli mantengono stretti rapporti fisiologici. La medicina clinica che in molte paralisi si avvantaggia de' suoi preparati, ha sanzionato l'uso della stricnina nelle paralisi vescicali siano accompagnate da ritenzione o da incontinenza; e con ciò segnava l'azione dell'alcaloide sui muscoli della vescica, precedendo le esperienze dirette a questo scopo. Nasse studiò l'influenza della stricnina sui movimenti dell' intestino, e concluse

(¹) Centralblatt f. d. Medicin. Wissenschaf. 1865. — Zeitschrift für rationelle Medicin, XVIII. Wiener Accad. Sitzgsber. Cl. 3, 1871.

contro l'opinione generalmente ammessa dietro le ricerche di Martin, che la stricnina non esercita azione sull'intestino [1].

Per quanto tale asserzione sia recisa, pure non gli si può accordare un valore assoluto, se si pensa che questo autore, studiò i movimenti intestinali senza il soccorso di nessun apparecchio registratore.

Lo studio del modo d'azione della stricnina sui muscoli lisci della vescica, è quanto interessa da vicino la soluzione di problemi d'interesse terapeutico.

Importava perciò di determinare per qual via la stricnina faccia sentire la sua influenza sui muscoli stessi, in secondo luogo quale azione eserciti la stricnina sui centri nervosi midollari della vescica, di più quali influenze abbia sulle perdite di tono vescicale intervenute col taglio del midollo o colla distruzione del midollo lombare o col taglio dei nervi della vescica medesima. Stabilito il modo d'azione era utile di ricercare nell'uomo in quali condizioni si manifestassero meglio effetti dimostrabili della stricnina sulla vescica urinaria. Le prime esperienze si fecero sui cani nel solito modo mantenendo la vescica libera da influenze meccaniche, in comunicazione coll'apparecchio registratore.

Fino dalle prime esperienze osservammo che tagliando il midollo alla regione cervicale, come cessano i movimenti riflessi dei nervi sensibili del corpo sulla vescica, così questa perde di tono e tende a dilatarsi. Se ora iniettiamo una soluzione di solfato di stricnina nelle proporzioni di 0,00075 per Cg. del peso del corpo, si osserva l'aumento del tono della vescica, di più l'eccitazione dei nervi sensibili anche a midollo tagliato, può essere seguita da accessi tetanici con contrazioni della vescica, e spesso da queste senza di quelli: possono oltre di ciò osservarsi delle contrazioni forti senza causa nota, che diremo spontanee. Se la dose è maggiore 0,001 per Cg. del peso del corpo interviene ben presto il tetano, al quale più spesso si osservano precedere ed accompagnarsi forti contrazioni della vescica.

Esistono però accessi tetanici senza contrazioni vescicali, sebbene questo caso sia il più infrequente. Siccome le contrazioni spontanee forti della vescica a midollo tagliato, non si osservano mai nello stato normale, così questo fatto acquista importanza, per segnare la influenza rilevante della stricnina; altrettanto costante è il fenomeno dell'aumento del tono della vescica consecutivo alle contrazioni.

In altre esperienze si operò il taglio del midollo, colla distruzione del midollo lombare. Con ciò si vollero osservare gli effetti comparativi dell'azione dell'alcaloide. In animali col midollo lombare distrutto si osserva una perdita rilevante di tono della vescica, cosicchè una pressione di soli 4,5 c. basta a dilatarla. Non per questo mancano dei movimenti piccoli, che diciamo spontanei, non conoscendone la causa. Introducendo la stricnina in animali col midollo lombare distrutto, insorgono contrazioni nella vescica anche scompagnate affatto da effetti tetanici.

L'esperienza riguarda un cane di Cg. 25 il cui midollo è sezionato alla regione dorsale inferiore, e distrutto nella porzione lombare. — L'iniezione venosa di 0,001 di solfato di stricnina, è seguita da contrazione vescicale senza tetano. Indi da tetano con contrazioni vescicali fig. 1.ª Intanto il tracciato scritto dalla penna del pletismografo, da prettamente discendente quale è dopo la distruzione del midollo, tende a farsi orizzontale per l'acquisto di tono dell'organo. Nella figura, T segna il

[1] *Action physiologique des substances toxiques et médicamenteuses.* Paris, 1881.

tempo in minuti secondi, P la pressione del sangue scritta col Manometro in comunicazione colla carotide, V il tracciato dato dalla vessica in comunicazione col pletismografo, Y contrazione vessicale che accompagna il tetano. Importante è a notarsi che una leggerissima modificazione della pressione segue la contrazione della vessica, la quale certo ne è affatto indipendente.

Fig. 1. — (*Stricnina*)

Risulta da queste esperienze, che sebbene minori, pure sono ancora dimostrabili gli effetti della stricnina sui muscoli della vescica urinaria privati delle loro relazioni coi centri cerebrali e spinali. Ma assai più estesa è l' influenza che ha la stricnina sui muscoli della vescica, a mezzo dei centri del midollo lombare, sia in modo diretto, sia aumentando gli effetti delle azioni sensitive contripete su quei centri medesimi. Ciò indipendentemente da modificazioni del calibro dei vasi e per la sola via dei nervi motori della vescica.

Una di queste esperienze fu eseguita su un grosso cane di Cg. 20, il midollo del quale fu preventivamente tagliato alla regione cervicale, onde eliminare qualunque influenza centrale sulla vescica urinaria.

Questa fu posta come di consueto, in comunicazione col pletismografo. Un manometro era in relazione colla carotide dell'animale, la respirazione è fatta artificialmente dopo il taglio del midollo alla regione cervicale, e non è scritta. Il tempo è segnato a minuti secondi; Il Chimografo è posto in movimento da un motore Langen. La pressione sulla vescica è di 8 c., questa è isolata da influenze meccaniche ecc. Si fanno forti eccitamenti dolorifici, per assicurarsi della mancanza di riflessi sulla vescica: la sola pressione mostra di risentire gli effetti del dolore. Si iniettano sotto la pelle 0,0015 di solfato di stricnina. Nessun effetto sulla pressione del sangue, aumento nella frequenza del polso, la vescica aumenta leggermente il proprio tono, nessun effetto dal dolore. Seconda iniezione di 0,0015 di solfato di stricnina. Se si tocca l' animale, avviene con un accesso tetanico, una contrazione vescicale; la pressione si modifica più tardi. Questa mancanza di rapporto fra le variazioni della pressione e i movimenti della vescica, si fa anche più manifesta nel tracciato seguente nel quale

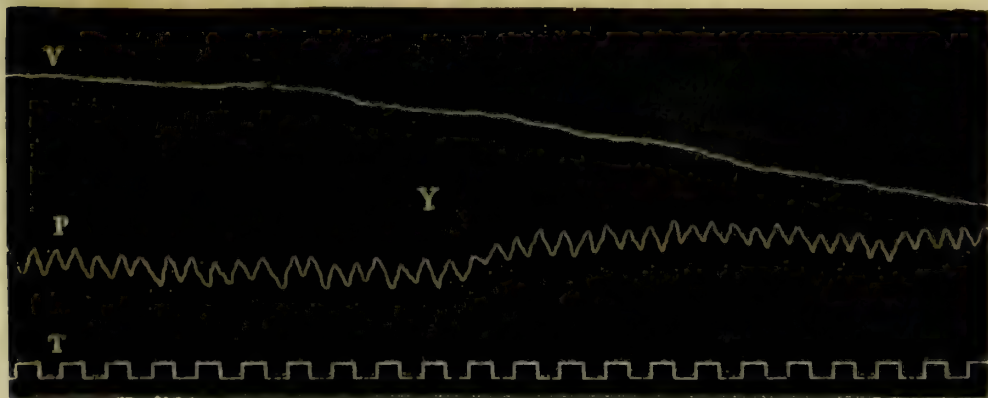
Fig. 2. — (*Stricnina*)

si osserva che ad un accesso tetanico spontaneo si accompagna l'elevarsi della pressione mentre la vescica va dilatandosi in Y (fig. 2ª). È interessante pure il fatto che la contrazione vescicale può precedere l'accesso tetanico. Quasi sempre riuscì di osservare l'indipendenza delle contrazioni vescicali, dalle oscillazioni della pressione. Infatti nella figura 3ª dimostrasi come la pressione tenda a diminuire in A, momento nel quale compare la contrazione della vescica.

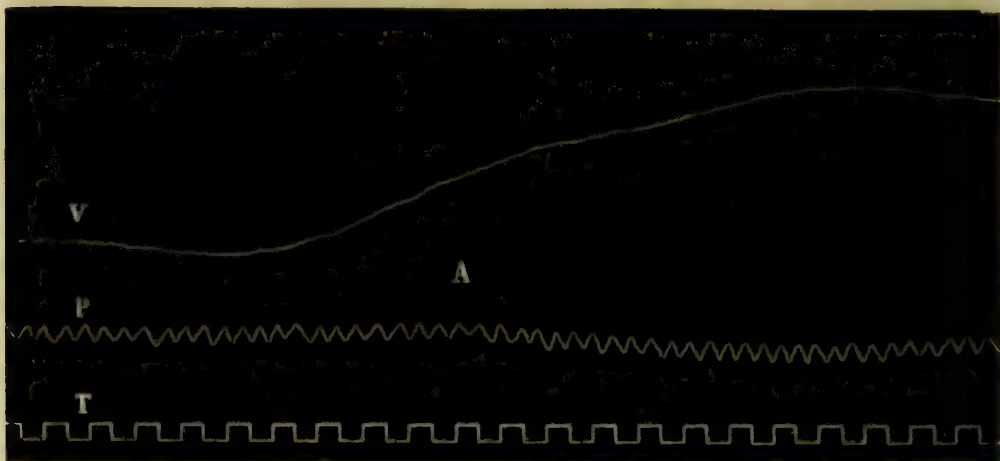
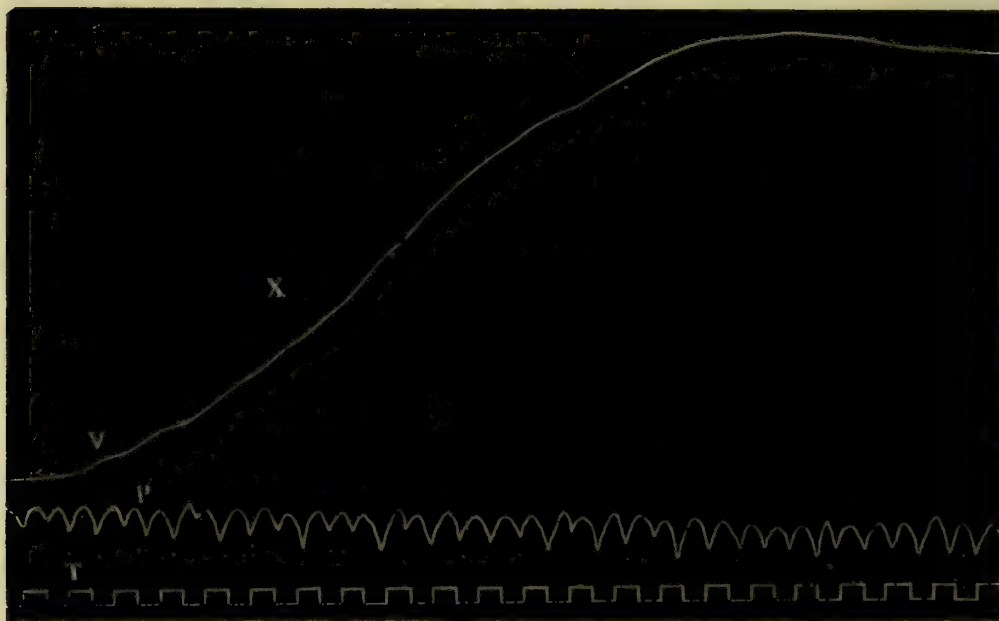
Fig. 3. — (*Stricnina*)

Il fatto del rimanere costante la pressione sanguigna, durante un accesso tetanico, anzi talune volte leggermente discendente, avvalora l'opinione di Vulpian, di Richter ed altri [1], i quali negano all'accesso tetanico un' influenza meccanica, nella produzione delle elevazioni di pressione che si osservano negli animali stricnizzati, ammettendo invece che anche in animale reso immobile col curaro, avvenga l' elevazione di pressione per influenza diritta sui vasi sanguigni. È nota la controversia sulla spiegazione di questi fenomeni (Richter e Mayer) [2]; vogliamo quì accennare soltanto ai risultati che non ci permettono di accogliere l'opinione di questi autori, poichè

Fig. 4. — (*Stricnina*)

[1] Vulpian, l. c. — [2] Zeitschrift für rationelle Medecin. XVIII, 76.

abbiamo sempre osservato a midollo spinale tagliato delle variazioni rilevanti della pressione; e ciò prova che l'azione della stricnina non solo si esercita sul maggior centro vaso motore nel midollo allungato (Richter e Meyer) ma ancora su altri centri del midollo spinale. Perciò che concerne la vescica, la fig. 4 dimostra in X una forte contrazione vescicale avvenuta senza causa nota, senza accessi tetanici, nè variazioni di pressione per l' influenza della stricnina.

Epperò, noi crediamo che i muscoli della vescica possano essere eccitati da questa sostanza per la via degli apparecchi nervosi periferici, ritenendo anzitutto che la sede principale d' azione della stricnina si trova nei centri nervosi dei muscoli vescicali situati nel midollo lombare. I movimenti vescicali che la stricnina induce a midollo spinale tagliato alla regione dorsale, hanno una tale frequenza ed intensità, da poter essere comparati a quelli che la vescica manifesta a midollo spinale intatto.

Entrando ora nelle esperienze eseguite sull'uomo, si determinò sotto qual forma ed a quali dosi si ottengono dalla stricnina degli effetti sulla vescica dell'uomo medesimo.

La stricnina trovò posto nel trattamento delle varie alterazioni funzionali dei muscoli vescicali, così anche nell'enuresi per la quale si ammise uno stato di anestetesia vescicale.

Dopo la dimostrazione da noi data della diminuzione di tono della vescica nel sonno, mi sentirei disposto ad ammettere che il difetto di questo fatto fisiologico, della diminuzione cioè di tono dei muscoli vescicali nel sonno, possa condurre alla enuresi, poichè mantenendosi durante il sonno il tono normale della vescica, l'accumularsi dell'urina si accompagnerà allo sviluppo d'una pressione tale sulle pareti dell'organo, che dimostrammo essere la causa principale del destarsi delle contrazioni vescicali, e dell'espulsione del liquido. Se a questo si aggiunga, che gli atti riflessi possono aumentare in intensità ogni volta che l'influenza cerebrale vada sospesa, si ha un ulteriore fatto che può servire alla spiegazione del fenomeno.

La mia ipotesi è convalidata dal fatto, che appunto l'enuresi si osserva in quella età, nella quale maggiore è il tono della vescica urinaria, secondariamente il concetto di un' anestesia della vescica abbracciato dagli autori, mal si adatta allo stato fisiologico della vescica nello stato di veglia. Ho esposto per incidenza, questa possibile spiegazione del fenomeno, che troverebbe anche un appoggio dai risultati che Trousseau ha ottenuto colla belladonna.

Le esperienze sull'azione della stricnina sulla vescica dell'uomo, furono eseguite su persone del Sifilicomio femminile di Torino (¹), le quali si prestarono tranquillamente all'introduzione del catetere in vescica. L'uretra della donna, può tollerare a lungo la presenza di un catetere senza contrazioni della vescica, cosa che non succede nell'uomo, come io ebbi ad assicurarmene.

La vescica di queste persone fu posta in comunicazione col pletismografo, la penna del quale registrava i movimenti della vescica sulla carta dì un chimografo Balzer. La vescica si manteneva sotto pressione di 6-8 c. per averla mediocremente distesa, il liquido che si faceva penetrare in vescica quando questa non aveva abbastanza urina, era una soluzione di cloruro sodico a 0,75 p. $^0/_0$ a 38⁰. All'oggetto

(¹) Queste esperienze poterono eseguirsi per concessione di cui sono grato al prof. A. Gamba ed ai dottori Bongiovanni e Silva.

di registrare qualunque variazione dello stato della vescica dipendente da modificazioni nella pressione addominale, si manteneva sull'addome un pneumografo di Marey, il quale era in comunicazione con un poligrafo scrivente sulla stessa carta del chimografo Balzer.

Da una ragazza di 25 anni perfettamente guarita da malattia venerea, disposta l'esperienza nel modo suddetto, scriviamo un tracciato normale, ed assicurati della perfetta normalità del tono della vescica, alle 7,14′ in A facciamo un'iniezione sottocutanea di 0,002 di solfato di stricnina. La persona si mantiene tranquillissima come dimostra il tracciato della respirazione: alle 7,22′ comincia una contrazione della vescica che aumenta progressivamente fino alle 7,29′; è un aumento forte del tono della vescica, che perdura per tutta la durata dell'osservazione, di un'ora. Altre esperienze non differiscono nei risultati: l'azione della stricnina a dosi terapeutiche sulla vescica dell' uomo, è perfettamente dimostrabile. Il valore delle modificazioni del tono vessicale indotte dalla Stricnina nella vessica dell'uomo, osservasi nella Tavola I in fine del lavoro.

CAPITOLO VI.

Sostanze che influiscono sui muscoli lisci della vescica in rapporto a modificazioni dei vasi, ed alla pressione del sangue.

§ 1.

Del rapporto fra i movimenti vascolari e quelli dei muscoli della vescica, venne trattato nel capitolo III della citata Memoria: *Sulle funzioni della vescica* [1]. Per ciò che riguarda la natura della relazione fra i fenomeni vascolari ed il movimento dei muscoli lisci si sa che l'osservazione diretta dei fenomeni in generale nell'intestino, dimostrò come la contrazione dei vasi aumenti il movimento di questo, mentre la dilatazione dei medesimi, si accompagna al riposo dei muscoli intestinali. Anche l'azione di varî agenti che in pari tempo si eserciti, sui vasi e sui muscoli lisci, dimostra questo rapporto [2]. Non è quindi difficile, il riferire a questi movimenti vascolari, l'intimità delrapporto sopranotato; altrettanto valga per i riflessi, che in modo contemporaneo si manifestano sulla vescica urinaria e sulla pressione del sangue.

Ma un' altra serie di fenomeni, da noi osservati non permette di estendere maggiormente l' importanza di questa relazione: così quando si osservano delle variazioni nella vescica non corrispondenti a quelle della pressione, ed anzi isolate da modificazioni della pressione e del respiro; quando si trova la vescica rispondere ad eccitamenti riflessi prima che i vasi sanguigni, od anche senza che i vasi sanguigni mostrassero di sentirne l'influenza; queste ed altre circostanze si oppongono a quel modo unico d' interpretazione del fenomeno. Se il midollo spinale è tagliato alla regione cervicale, si vedono cessati gli effetti degli eccitamenti dei nervi di senso in generale sulla pressione, ma si trova la vescica ancora eccitabile in modo riflesso, senza fenomeni vascolari; tutto ciò vale a provare la mancanza di un rapporto necessario, fra i movimenti dei vasi e quelli della vescica.

[1] Mosso e Pellacani. *Sulle funzioni della vescica.* Reale Accademia dei Lincei, 1881, vol. XII.
[2] Salvioli, *Methode für die Untersuchung der Funzionen des Dünndarms.* Leipzig, 1880.

Ho fatto queste premesse perchè utili alla spiegazione del modo d'azione delle ostanze che vado ad accennare, siccome per queste sostanze si determinano variazioni nel calibro dei vasi, colle quali coincide la contrazione dei muscoli lisci della vessica.

§ 2. *Segale cornuta.*

Fra le sostanze che meglio servono a dimostrare i rapporti fra i movimenti vascolari e quelli dei muscoli lisci della vescica, havvi la segale cornuta. Non entrerò nelle controversie che si riferiscono al modo col quale si esercita l'influenza della ergotina sui vasi sanguigni. Ricorderò come se ne ammetta da alcuni l'azione locale sui vasi (Holmes, Eberty, Köhler) [1], e da altri influenza locale sui vasi ed insieme centrale sui centri vasomotori (Oser, Schliesinger, Wernich) [2] od azione puramente centrale (Wood) [3].

Anche l'azione dell'ergotina sul cuore può influenzare di seconda mano, lo stato dei muscoli lisci (Eberty, Rossbach). Senza entrare in maggiori particolari questi cenni dimostrano già per quante vie secondarie possono i muscoli lisci, essere influenzati dall'ergotina.

Circa l'azione dell'ergotina sulla vescica, esiste nella letteratura qualche fatto, quale per es. che nell'ergotismo fu notata una ritenzione d'urina: così la terapia approfittò dell'ergotina nelle paralisi vescicali con incontinenza. Wernich, esperimentando l'ergotina sull'utero, ebbe campo di osservare che mentre l'utero contraevasi, la vescica rimaneva piena e diventava molto tesa onde pensò ad un aumento di secrezione urinaria. Gli parve poi che l' ergotina determinasse specialmente ritenzione d'urina, e ciò scrive gli sembrò confermato anche da osservazioni nell' uomo [4].

Queste esperienze furono eseguite coi soliti metodi, e si studiarono i rapporti fra le variazioni della pressione, e dei muscoli vescicali, sotto influenza dell'ergotina a midollo spinale intatto, reciso, o distrutto; ed infine si completò lo studio, con ricerche sull'uomo.

I metodi di registrazione sono i soliti. La vescica fu isolata da influenze meccaniche coll' apertura dell' addome, o lasciata entro la cavità addominale, notando con un pneumografo applicato all'addome stesso, le modificazioni della respirazione. In questo ultimo caso essendo più conservate le condizioni fisiologiche dell'organo, questo si dimostrava più sensibile alle influenze dei diversi agenti.

Così disposte le cose, se si inietta nella giugulare o sotto la pelle di un animale, che ebbe il midollo spinale tagliato alla regione cervicale, una soluzione di ergotina Bonjean, segnando il momento dell'iniezione, si vede succedere dopo 15″20″ un abbassamento di pressione di brevissima durata, seguito da innalzamento, il quale dura più a lungo, ritornando poi dopo un certo tempo, la pressione al livello di prima.

Come è noto l'abbassamento iniziale della pressione, fu spiegato da Holmes come effetto della costrizione dei vasi polmonari, e da Wood attribuito alla azione diretta dell'ergotina sul cuore.

[1] Holmes, Archiv. de phys. normal. et patol. III. — Eberty e Köhler, *Ueber die Wirkung des Secale cornutum.* Halle-Dissertion, 1873.

[2] Oser e Schliesinger, *Wiener Medecin Jahrbücher.* 1872, 1. — Wernich, Archiv f. path. Anatomie. LVI.

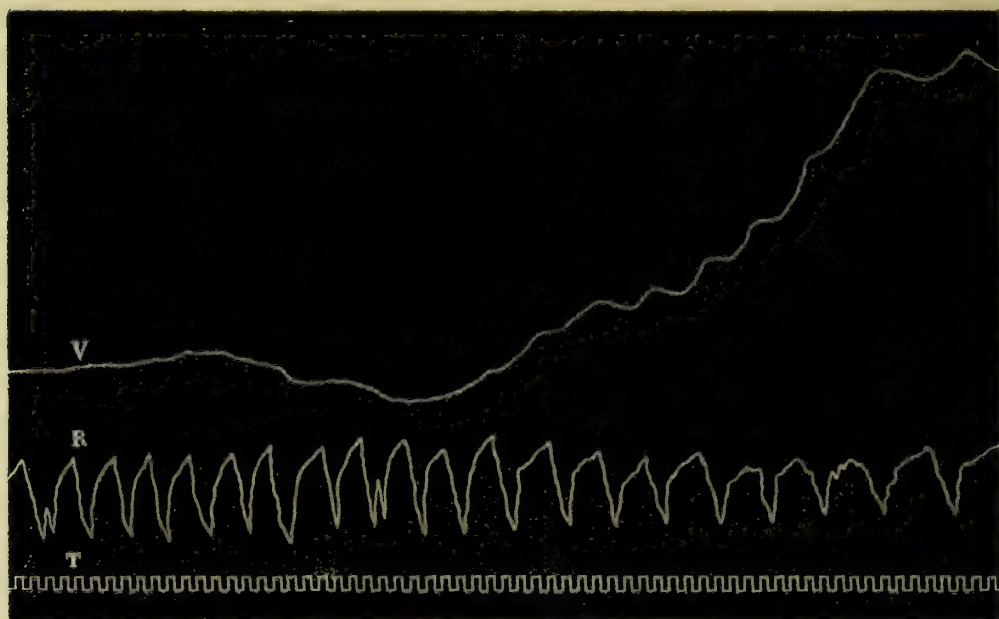
[3] Wood, *Contribution to knowledge of central the vaso-motor action of Ergot.* Philadelphia Medical Times, 1874.

[4] *Wirkung des Ergotins auf die Blase.* Centralblatt, 1873, 23.

Contemporaneamente al primitivo abbassamento della pressione, si osserva che i muscoli della vescica si contraggono fortemente; questa contrazione però non è di lunga durata, perchè man mano la pressione si ristabilisce, ritorna allo stato ordinario la vescica urinaria.

Questi fenomeni a midollo spinale tagliato, hanno un valore significante, se si riflette ai fatti accettati dopo il lavoro di Wernick, ma di più possono anche dimostrarsi in animali ai quali fu distrutto il midollo lombare.

In una cagna di Cg. 5,500, nella quale il midollo lombare era stato distrutto in antecedenza, la vescica lasciata entro l'addome, si registravano in R i movimenti delle pareti addominali ed in V quelli della vessica. Si provocano in queste condizioni delle forti contrazioni della vescica, iniettando soluzioni di ergotina Bonjean nella giugulare, o sotto la pelle nel rapporto di 0,02 per Cg. del peso del corpo. Una di queste è espressa nella figura 5.ª

Fig. 5. — (*Ergotina*)

Questa contrazione di cui nel tracciato figura solo la prima parte, continuò per 1'; indi la linea prese un andamento orizzontale per discendere poi dopo 3'4': si verificò qui pure il fatto che la contrazione fu seguita dall'aumento persistente per un certo tempo del tono della vescica.

Se si registrano contemporaneamente i movimenti cardiaci, l'azione dell'ergotina sul cuore è dimostrata insieme a contrazioni dei muscoli della vescica. L'iniezione è fatta nel solito rapporto; l'effetto si ha prontamente nel tracciato della pressione, la quale mostra una linea retta, che segna le pause del cuore per 40'', e contemporaneamente una contrazione della vescica. La pressione ha poche modificazioni, si osservano diverse respirazioni più profonde, poi il respiro ritorna regolare. Questi fatti sono dimostrati dalla Tavola IIª in fine del lavoro.

Risulta da queste esperienze che indipendentemente dai centri vaso-motori, per influenza locale sui vasi la segale cornuta induce variazioni della pressione corrispondenti a contrazioni dei vasi stessi, e nel tempo medesimo si contraggono i muscoli vescicali. Ad alte dosi, anche l'azione dell'ergotina sul cuore può indurre contrazioni secondarie nei muscoli lisci della vescica. Con questo non si esclude che l'influenza dell'ergotina sui centri vaso-motori, non aumenti le condizioni favorevoli alle contrazioni del sistema vascolare, ed insieme quelle dei muscoli della vescica.

Le esperienze dirette sull'uomo dimostrano quanto profitto si possa ricavare dall'azione della segale cornuta, e de' suoi preparati, ove specialmente trattasi di stimolare il tono dei muscoli lisci.

Una giovane di 25 anni, tranquilla, ha la vescica sotto pressione di 6 c., in comunicazione col pletismografo. Alle 12,20′ si aprono le comunicazioni, e si fanno scrivere le penne del pletismografo e del poligrafo di Marey in relazione quest'ultimo con un pneumografo applicato all'addome. Dopo 10′ nei quali osserviamo un tracciato regolare colla vescica a tono normale, si somministrano per bocca 50 cg. di ergotina Bonjean in soluzione; la persona rimane tranquillissima, come lo attesta il tracciato del respiro: fino alle 12,34′ la vescica tende a dilatarsi, aumenta poi leggermente di tono per 6′; alle 12,45′ l'aumento di tono si fa maggiore; la ragazza dice di non sentir nulla, e di star bene.

In conclusione ammettiamo un' azione centrale vaso-motoria della segale cornuta, ed oltre a questa una azione periferica vascolare con contrazioni leggere simultanee dei muscoli lisci della vescica, ed aumento di tono.

Nell'uomo è perfettamente dimostrabile l'attività della ergotina sui muscoli della vescica, la quale crediamo possa essere utilizzata nelle atonie vescicali consecutive a catarri di antica data, come nella atonia senile ecc. In clinica da qualche tempo si usò dell' ergotina nelle paralisi vescicali, nell' inerzia della vescica che accompagna le gravi malattie (tifo, granulosi acuta, vaiolo) (Luton) ([1]), nonchè nelle atonie vescicali dei vecchi (Langenbek). Nella forma paraplegica di paralisi vescicale, con atonia generale dell'organo ed incontinenza, l'attività dell'ergotina è diretta specialmente ad aumentare il tono delle fibre muscolari liscie, per le ripetute contrazioni che vi induce.

§ 3. *Nitrito d'amile.*

La sua influenza sui vasi fu oggetto di molte ricerche, dalle quali risultò possedere il nitrito un'azione sui nervi vascolari periferici (Brunton, Pick, Filehne, Gaspej, Berger, Amez-Droz) ([2]). Brunton osservò anche paralisi dei muscoli striati e dei nervi periferici che avverrebbe dopo di quella dei vasi. Ma altre influenze erano ad aspettarsi da questa sostanza, per l'azione sui centri nervosi (Eulenburg e Guttmann) ([3]) e sul centro respiratorio (Meyer e Friedrich) ([4]).

Esperimentai il nitrito coi soliti metodi, ed anzitutto per inalazione in un cane che conservava intatto il midollo lombare: dopo 17″ d'inalazione la pressione abbassò fortemente e colla comparsa della dispnea la vescica si contrasse fortemente: cessata l'inalazione, la respirazione ritornò normale, la pressione si rialzò, e la vescica entrò in un periodo di dilatazione che si continuò per 20′. Questa perdita di tono dimostrasi effetto di azione locale del nitrito di amile ed indipendente da influenze sul sistema nervoso.

La contrazione della vescica è legata ai disordini respiratorî, ma l'azione principale della sostanza sulle fibre lisce della vescica si manifesta con perdita grave della tonicità delle medesime.

Questo fatto si dimostra anche meglio introducendo il nitrito d'amile per altra via, che non sia

([1]) Revue des sciences médicales. 1875.

([2]) Brunton, *Arbeiten aus d. Physiol.* Anstalt zu. Leipzig, 1869. — Pick, *Phys. und terap. Wirkung des Amylnitrits.* Centralblatt, 1876 — Filehne, *Einfluss des Amylnitrits auf die Gefässe,* 1879. — Berger, *Phys. und terap. Wirkung des Amylnitrits.* Centralblatt, 1875. — Amez Droz, *Browa Sequard Archives,* 1873.

([3]) Reichert, Dubois-Reymond Archiw, 1873.

([4]) *Physiol. Wirkung des Amylnitrits.* Centralblatt, 1871.

la respiratoria, ed evitando disordini della respirazione. Così in un cane di 8 Cg. al quale in antecedenza si era isolata la vescica da ogni influenza nervosa, dopo fatta la iniezione di curaro nella giugulare e stabilita la respirazione artificiale, un'iniezione sottocutanea di $^1/_2$ cc. di nitrito d'amile o l'inalazione del medesimo è seguìta dopo 10″ da dilatazione progressiva dell'organo senza contrazione iniziale.

Ripetendo l'iniezione, la paralisi dei muscoli lisci della vescica aumenta, permane però negli stessi un certo grado di eccitabilità tanto che si contraggono per l'arresto del cuore.

In animale non curarizzato, la iniezione sottocutanea del nitrito provoca profonde modificazioni nella respirazione e dispnea, colla quale può coincidere contrazione passeggera della vescica.

Per influenza del nitrito possono provocarsi tali disordini nel sistema vascolare, da influenzare i muscoli della vescica, ed indurne la contrazione passeggera.

La paralisi dei muscoli vescicali provocata dal Nitrito Amilico è tale, che lo stimolo stesso del CO^2 resta inefficace sulla vescica stessa.

Le ricerche istituite nell'uomo confermano i fatti sperimentali riportati, pei quali l'azione fisiologica principale sui muscoli lisci della vescica da parte di questo agente, escluse le influenze respiratorie, è la perdita di tono e la dilatazione dell'organo.

Una ragazza di 18 anni rimane tranquilla per tutto il tempo nel quale durò l'esperienza. Dopo aver scritto un tracciato normale per 10′ si fa inalare il nitrito amilico, e si osserva una pronta contrazione della vescica per le solite cause riflesse.

La ragazza dice di sentirsi un leggero grado di vertigine, ed incomincia allora dopo 3′ dalla inalazione, la dilatazione della vescica che dura 2′.

Ritorno all'inalazioni del nitrito amilico, intervengono di nuovo piccole contrazioni della vescica, poi dilatazione forte. Altre volte la perdita di tono della vescica non è preceduta da alcuna contrazione.

Il pneumografo sull'addome segna una respirazione frequente, talvolta profonda ed irregolare, ma queste variazioni inducono solo delle piccole modificazioni nel tracciato della vescica.

Concludendo; l'azione fisiologica del nitrito amilico sui muscoli vescicali si manifesta con perdita grande di tono dei medesimi. Questa azione si accompagna più spesso alla dilatazione dei vasi sanguigni, dimostrata col mezzo della pressione; l'inalazione del nitrito può indurre, delle forti contrazioni della vescica, massime per influenze respiratorie; ma l'azione principale prevalente di questo agente, è quella della diminuzione e perdita di tonicità dei muscoli vescicali, onde potrebbe trovare questa sostanza utili applicazioni, ove si abbia eccesso di contrazioni vescicali (cistospasmo) sebbene a queste indicazioni possa provvedersi con sostanze meno nocive e di azione più duratura quali gli anestetici e i narcotici di cui si dirà in seguito.

§ 4. *Chinina.*

Fra gli agenti che influenzano spesso i muscoli lisci, con variazioni della pressione, e col mezzo di modificazioni nello stato della circolazione del sangue, havvi la chinina: alla dimostrazione di questo fatto col metodo grafico pei muscoli lisci della vescica, faccio precedere qualche cenno sulle conoscenze fin oggi possedute circa l'azione della chinina sugli organi a fibre liscie, e sulle funzioni che più direttamente influenzano il lavoro di questi stessi muscoli.

Sulla influenza della chinina sulla circolazione si possiede una lunga serie d'osservazioni che risalgono sino ai tempi di Giacomini ed Andral, e d'esperienze che incominciarono con Mialhe (1842), Briquet (1855).

Gli ultimi lavori sull' influenza della chinina sui vasi, mentre concordano nell'ammetterne la dilatazione, si scostano per ciò che riguarda la spiegazione del fenomeno. Così Chirone ammise un'attiva dilatazione dei vasi per influenza sulle fibre liscie dei medesimi, indipendentemente dai nervi vascolari ([1]), e Stienon azione paralizzante sui nervi vascolari ([2]).

Fra gli organi a fibre liscie, l'utero fornì campo a molte esperienze sull'influenza della chinina.

Così dopo di Roncillia, Chocron ammise per la chinina un'azione stimolante delle contrazioni dell'utero ([3]).

Monteverdi poi trattò dell'azione del solfato di chinina sull'utero gestante, e colla scorta di cliniche osservazioni, ammette un' azione elettiva della chinina sulle fibre muscolari dell'utero: l'autore spiega il fatto colla dottrina dell'azione eccitante della chinina sul simpatico e sui vasi sanguigni ([4]).

Altre osservazioni cliniche vennero ad appoggiare quella di Monteverdi, estendendo anzi il valore del solfato di chinina ad altri organi costituiti dallo stesso sistema muscolare: così alcuni medici se ne lodarono nell'incontinenza d'urina (Cicognini) e nelle paralisi vescicali (Volpato). Hermann però nel 1874 scriveva che nessun fatto sperimentale dimostra l'azione della chinina sull'utero ([5]).

Dopo di quell'epoca, Chirone esperimentava nelle cagne e cavie in istato di più o meno inoltrata gravidanza l'azione della chinina, ed ammetteva che la chinina non ha azione elettiva sull' utero, ma agisce su tutto il sistema muscolare della vita organica. Che più l'utero è sviluppato, maggiore è il campo d'azione della chinina, e che questa è realmente capace di determinare l'aborto, ed il parto prematuro, tornando innocua alla madre ed al feto. L'autore ammette la teoria della doppia attività muscolare. La chinina, secondo Chirone, gioverebbe eccitando l'estensibilità dei muscoli lisci e regolarizzando il parto nel quale si trovi un utero contratto in eccesso. Cercò l'autore nei fatti clinici conosciuti, argomenti a sostegno della sua ipotesi ([6]).

Nelle nostre esperienze eseguite sui muscoli lisci della vescica si tennero a calcolo i movimenti vascolari interpretati a mezzo della pressione e le influenze respiratorie.

Una piccola cagna di Cg. 3,080 viene fissata dopo subito il taglio del midollo spinale alla 1ª dorsale, previa cloroformizzazione.

Aperto l'addome e sottratta la vescica ad ogni influenza meccanica degli organi vicini, si pone in comunicazione col solito apparecchio registratore, mentre la carotide è in relazione collo sfigmoscopo del Marey. La respirazione è scritta insieme al tempo, in minuti secondi sullo stesso cilindro del chimografo Balzer.

([1]) *Meccanismo d' azione della chinina sul sistema circolatorio e sulla fibra muscolare in generale.* Lo Sperimentale, 1874.

([2]) *Action phys. de la quinine sur la circulation du sang.* Bruxelles, 1876.

([3]) Annuaire de thérap. de Bouchardat, 1860.

([4]) *Azione del solfato di chinina sull'utero gestante.* Cremona, 1863.

([5]) *Lehrbuch der Toxicologie,* 1874.

([6]) L. c.

Le iniezioni venose o sottocutanee di chinina vennero fatte con soluzioni di idroclorato di reazione neutra.

L'animale era tranquillo: la sua vescica sotto pressione di 6 c. tendeva a dilatarsi; la pressione regolare; quando s'iniettavano nella giugulare 5 cc. di liquido con 0,05 di idroclorato di chinina.

I fenomeni che avvengono dopo 10″ sono: abbassamento forte della pressione; diminuzione nella forza delle pulsazioni; nessuna modificazione nella frequenza delle medesime; aumento contemporaneo nel tono della vescica urinaria che manifesta una leggiera contrazione; respirazione tranquilla. L'aumento del tono della vescica è durevole, poichè persiste anche dopo l'elevazione consecutiva della pressione.

Si ripete questa esperienza collo stesso risultato introducendo per via sottocutanea la sostanza. Gli effetti sulla pressione durano più a lungo, la respirazione si modifica per frequenza, la vescica mostra delle piccole contrazioni. Se l'iniezione è di dosi maggiori 0,10 si osserva abbassamento forte della pressione, con diminuzione nella frequenza e piccole pulsazioni, respirazione interrotta con respirazioni prolungate, contrazioni della vescica.

Questa prima esperienza, mostra già per quali vie, possono essere indotti a modificazioni funzionali i muscoli lisci della vescica. È specialmente in rapporto a variazioni della pressione che la vescica urinaria mostra aumenti di tono e piccole contrazioni.

Se prendiamo a considerare il tracciato n. 11, osserviamo che quando in α si fa un'iniezione venosa di 0,15 di idroclorato di chinina, la vescica mostra di sentirne gli effetti in modo contemporaneo alle modificazioni della pressione, ed a quelle seguite all'irritazione del vago. Rallentamento quindi nella frequenza dei polsi fino a qualche pausa diastolica, abbassamento contemporaneo della pressione, contrazione della vescica e variazioni importanti nel ritmo respiratorio.

Ad una seconda iniezione di bisolfato sotto la pelle, in dose della precedente, si osserva un fatto negativo da parte della pressione, la quale anzi dopo 20″ aumenta leggermente, mentre si modificano per frequenza le pulsazioni. La respirazione non ha alcuna variazione, la vescica aumenta dopo 40″ dall'iniezione, il suo tono.

La distruzione del midollo lombare non altera punto questi fatti.

Le dosi finora usate corrispondono alle piccole dosi di Stienon ossia di 0,006 per Cg. del peso del corpo — Vediamo ora gli effetti di dosi maggiori.

In un cane di Cg. 15,270 disposto per l'esperienza cogli apparecchi per le consuete registrazioni, dopo aver subìta la distruzione del midollo lombare, e colla vescica sottratta ad ogni influenza meccanica, mentre si scrive un tracciato normale s'iniettano sotto la pelle 18 cg. di idroclorato di chinina, uguali a 0,012 per Cg. del peso del corpo; l'effetto si ha prima sulla pressione che si abbassa rapidamente, poi sulla respirazione, infine sulla vescica.

Nella pressione abbassata, osserviamo una linea retta, con appena qualche ondulazione per 38″; questo fatto segna l'azione della chinina sul vago, la pressione rimane abbassata.

Anche la respirazione si fa frequente, irregolare, nel momento nel quale la linea retta della pressione segna l'effetto massimo della chinina sul vago; indi riprende la respirazione il tipo normale. Le modificazioni presentate dai muscoli della vescica sono rilevanti, e comparse contemporaneamente all'abbassamento della pressione, ed agli effetti sul vago della chinina: è una contrazione abbastanza forte, seguìta da un durevole aumento di tono nella medesima.

Continuando ad osservare i tracciati, si vede che ha perdurato per 4′ l'abbassamento della pressione, indi questa ha ripreso l'altezza normale.

Le modificazioni nei muscoli lisci della vescica hanno persistito anche dopo l'elevazione della pressione; la respirazione per tutto questo tempo rimase normale.

Dopo 30′ la respirazione e la pressione sono normali, persiste solo una lieve irritazione del vago. Ci siamo incontrati talora nel fatto che le modificazioni del tono della vescica o vere contrazioni della stessa, si sono dimostrate molto forti quando la respirazione ha ripreso il ritmo normale, la pressione è rialzata, e regolari i movimenti del cuore, senza nessuna irritazione dei vaghi.

Di questo fatto diamo dimostrazione nella tavola III (fine del lavoro) dove si osserva una forte contrazione della vescica 70″ dopo l'introduzione del chinino. Notisi per altro una contrazione piccola in relazione alle variazioni della pressione e del respiro, ed una seconda di maggior rilievo non accompagnata da nessuna modificazione della pressione e del respiro. Per dosi tossiche di chinina si arresta il cuore, cessa la respirazione, i muscoli della vescica entrano in una contrazione forte, prolungata fino a 15′ tanto da vuotarsi del contenuto. Non si può attribuire che all'influenza della chinina questo fatto, perchè non avvenne mai di osservarlo nella vescica isolata da influenze nervose per l'arresto della respirazione e del cuore: anzi nelle condizioni ordinarie la contrazione per CO^2 a midollo lombare distrutto, è piccola e di brevissima durata. Per influenza della chinina manca la curva asfittica della pressione, e così vien meno la relazione fra movimenti vascolari e quelli dei muscoli lisci della vescica: non compare la curva asfittica per la paralisi dei vasi prodotti dalla chinina, permane invece intatta, anzi aumentata dalla chinina l'eccitabilità dei muscoli lisci, onde anche in questo modo è dimostrato non necessario il rapporto fra movimenti vascolari e dei muscoli lisci della vescica.

Così, sperimentata l'influenza della chinina sui muscoli lisci della vescica, a dosi diverse, per diverse vie, in differenti condizioni fisiologiche, se si vuol trarne qualche conclusione generale, credo si possa ammettere l'importanza del rapporto fra le variazioni della pressione del sangue ed i movimenti dei muscoli lisci della vescica sotto le influenze della chinina, per cui degli abbassamenti anche lievi della pressione, per piccole dosi di chinina, si accompagnano ad aumento di tono dei muscoli vescicali.

§ 5. *Nicotina.*

La nicotina con azioni molteplici che si manifestano sul midollo (Krocker, Rosenthal, von Praag), sui centri vaso-motori (Turminscki), sui nervi vasali periferici (Basch e Oser), che influenza così direttamente la circolazione per la sua azione principale sul cuore (Traube) e sul sistema respiratorio (Bernard, Rosenthal, von Praag), non può che avere molte influenze indirette sui muscoli lisci della vescica. Nasse trovò l'intestino, e l'utero partecipare ad attivi movimenti, per influenza della nicotina, mentre la vescica anche per le alte dosi rimaneva tranquilla ([1]).

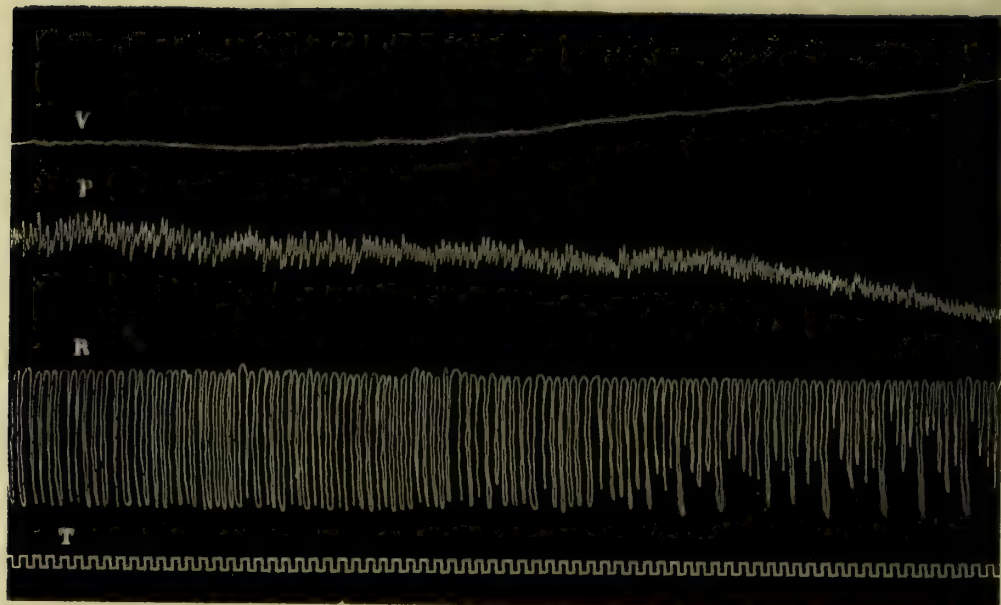
Nasse ammise un eccitamento sui gangli delle pareti intestinali, Basch e Oser ([2]) osservarono pure violente contrazioni intestinali per nicotina, e Salvioli trova quelle contrazioni in istretto rapporto colle contrazioni dei vasi sanguigni ([3]).

Le mie esperienze si limitarono alle determinazioni del fatto, che i muscoli della vescica obbediscono alle ordinarie eccitazioni, che per diversa via vi porta la nicotina; di più ricercai per qual via principale questa azione si determina.

Un piccolo cane di Cg. 3,500, dopo avere subìto la distruzione del midollo lombare, viene fissato e disposto cogli apparecchi ordinarî registratori.

La prima iniezione sottocutanea di una soluzione di 0,01 di nicotina ha per effetto un aumento nella pressione del sangue, senza alcuna variazione nella respirazione e nello stato dei muscoli della vescica. Una seconda iniezione di 0,02 di nicotina è seguìta da un leggero abbassamento della pressione, e da una piccola ma molto prolungata contrazione della vescica urinaria; poche variazioni nella respirazione, come dimostra la figura 6ª nella quale T segna al solito il tempo in 1″ — R la respirazione — P la pressione del sangue scritta nel solito modo.

([1]) *Physiologie der Darmbewegung.* Centralblatt, 1875.
([2]) Wiener medicin. Jahrbücher, 1872.
([3]) Loc. cit.

Fig. 6. — (*Nicotina*)

Dopo 3′ da questi fatti si osserva abbassamento forte della pressione (paralisi vascolare), diminuzione di frequenza del polso e irritazione del vago: persistono contrazioni della vescica urinaria. Una terza iniezione sottocutanea di 0,01 di nicotina è seguìta da forte contrazione dei muscoli della vescica, nessuna variazione nella pressione già abbassata, la respirazione diventa rara, superficiale, infine cessa: avvengono forti contrazioni della vescica.

Risulta così che come per i muscoli lisci dell'utero e dell'intestino, anche su quelli della vescica, la nicotina può influire per diverse vie, e particolarmente insieme a modificazioni dei vasi sanguigni.

§ 6. *Cloralio-Cloroformio.*

Nell'azione degli anestetici sull'organismo, e particolarmente sulla respirazione, sul sistema vascolare e nervoso, è riposta principalmente l'influenza indiretta sui muscoli della vescica urinaria.

Il cloralio ed il cloroformio vedemmo già influenzare ambedue i muscoli della vescica provocandone perdita di tono: si vuole ora determinare per qual modo principale queste sostanze raggiungono quest'effetto.

Il cloroformio fu molto studiato nell'influenza sui così detti movimenti automatici: si sa che le contrazioni uterine nel parto sono diminuite, non soppresse.

Fu già osservato che l'azione di queste due sostanze sui muscoli vescicali è molto somigliante; è naturale però che l'inalazione del cloroformio, induca nel primo periodo, per influenze respiratorie, una serie notevole di riflessi sulla vescica.

È nel periodo della respirazione tranquilla, e della narcosi completa, che l'azione del cloroformio è massima sulla vescica, e questa perde incessantemente di tono.

Se però la narcosi è profonda e si protrae, intervenendo modificazioni respiratorie, queste fanno sentire la loro influenza fisiologica sui muscoli della vescica, che

vi rispondono con contrazioni e aumento di tono, ma ogni volta che scompaiono questi fatti, e che la respirazione ritorna tranquilla si ripristina l'azione principale del cloroformio, la vescica perde nuovamente il tono.

I fenomeni che il cloralio induce, non sono preceduti da quelle azioni riflesse che esercita il cloroformio per inalazione. All'animale al quale si inietta il cloralio nello stomaco o per clistere, come a quello nel quale lo s'introduce direttamente nel sistema vascolare in dose sufficiente per ottenere il sonno, accade dopo quel leggero eccitamento riflesso sulla vescica, che a midollo intatto può esercitare un' iniezione di liquido nella giugulare o nel retto, che la vescica lentamente ma incessantemente tende a dilatarsi sotto debole pressione, e ciò corrisponde ad una perdita reale, durevole, del tono della medesima.

Intanto se la dose fu sufficiente, l'animale è colto dal sonno, e col sonno una serie di modificazioni, che subisce il ritmo e la forma dei movimenti respiratorî, nonchè una serie di variazioni nel sistema circolatorio, che manifestano non poca influenza sui muscoli lisci. Si verifica anche qui il fatto dimostrato *dalle nostre ricerche sulla fisiologia della vescica*, cioè che i rapporti fra la respirazione ed i muscoli lisci della vescica stessa, non diventano mai così intimi, come durante il sonno.

La vescica, che come i vasi sanguigni è sensibilissima alle variazioni nel lavoro degli organi respiratorî, ed indipendentemente da cause meccaniche ma per vie nervose, risponde spesso prima dei vasi stessi a queste modificazioni, forma con altri organi costituiti dello stesso sistema muscolare, quali i vasi ecc.; una stretta dipendenza del sistema respiratorio, per la via delle modificazioni del sangue, e dell' influenza di queste sui centri nervosi. Nel sonno fisiologico, Mosso ha già segnato che il diaframma cade in uno stato tale di inerzia, che per poco non si direbbe un organo paralizzato (¹). Queste variazioni meccaniche della respirazione coincidono col rilassamento delle pareti vasali, col rallentamento nella frequenza delle sistoli cardiache, colla diminuzione del tono della vescica. Questa diminuzione del tono della vescica, perdura fino a che la respirazione è tranquilla, ma se durante il sonno la respirazione da profonda si fa superficiale e diminuisce il lavoro respiratorio, la vescica aumenta il tono de' suoi muscoli per tornare al rilasciamento appena rifattasi tranquilla la respirazione. Nel risvegliarsi dell' animale precedono pure modificazioni nel respiro, i vasi si contraggono, ed in questo stesso tempo nella vescica aumentasi il tono de' suoi muscoli.

Questi fatti pienamente fisiologici si ripetono perfettamente, se col cloralio si induce il sonno.

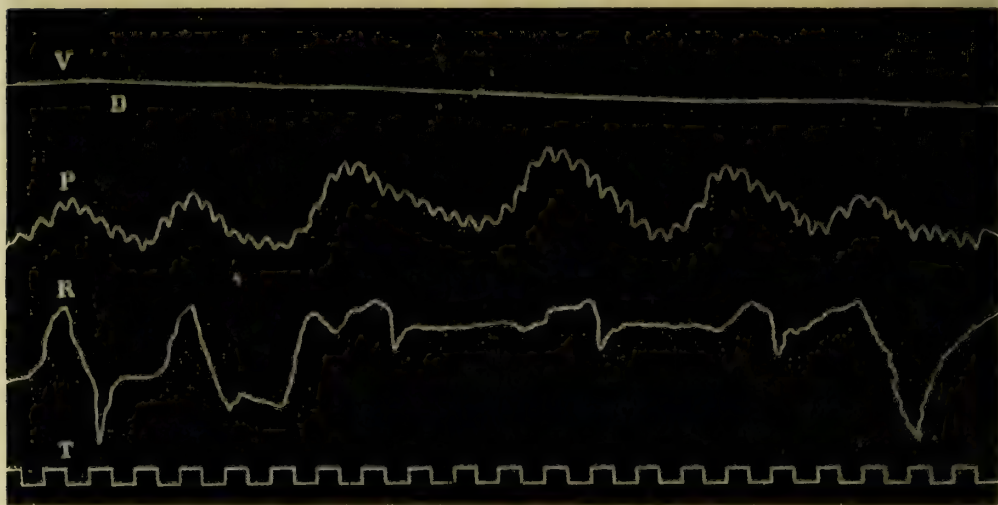
Le esperienze eseguite con questa sostanza come col cloroformio, riguardano cani nei quali la vescica isolata da influenze meccaniche coll' apertura dell' addome, veniva sotto sufficiente pressione messa in comunicazione col pletismografo che si era adattato al chimografo di Ludwig: il manometro scriveva contemporaneamente le variazioni della pressione, ed il pneumografo quelle della respirazione.

Ad un grosso cane di cg. 25 posta la vescica sotto pressione di 8 c. dà un tracciato lievemente ascendente sull' ascissa. Il dolore, gli eccitamenti di tutti i nervi sensibili, portano riflessi sulla medesima, nel modo normale. Injettando sotto la pelle un grammo di cloralio in soluzione,

(¹) *Sulla circolazione del sangue nel cervello dell' uomo.* R. Accademia dei Lincei, 1880 Vol. V.

si osserva nello stesso tempo abbassamento della pressione e variazioni della respirazione cioè profonde inspirazioni, seguìte da lenta espirazione.

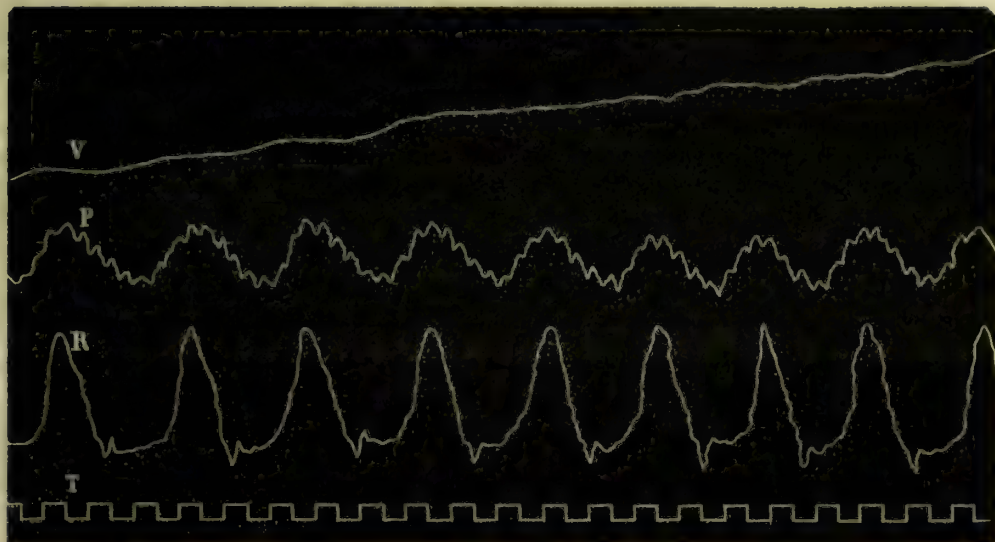
Questo fatto dura 17″. Contemporaneamente a ciò si osserva la dilatazione della vescica urinaria. Dopo 5′ l'animale dorme. La fig. 7ª dimostra gli effetti del cloralio idrato sulla vescica, non appena il cane si è addormentato, la pressione sempre abbassata, la respirazione tranquilla. Dopo 5′ provochiamo dei riflessi. Nel sonno fisiologico, qualsiasi eccitamento dei nervi sensibili si riflette, sia sulla respirazione, come sulla pressione, e sul tono della vescica. Nell' animale cloralizzato possono mancare i soli effetti riflessi sulla vescica: in D provocasi dolore, l'esito apparì soltanto sulla respirazione e pressione: questo si può osservare anche per influenza del cloroformio, ciò che vale a dimostrare l'attività di queste sostanze non solo su una certa sfera di riflessi in particolare, ma contribuisce ancora a dimostrare l'indipendenza dei riflessi vescicali da quelli vascolari.

Fig. 7. — (*Cloralio*)

Per quelli come per questi, si ammisero centri distinti. Il cloralio sembra portare la sua azione su quei centri e la sospensione dell' influenza degli stessi sulla vescica. Le azioni del midollo lombare restano intatte sulla vescica, e quei riflessi che avvengono per intermezzo del midollo lombare, dei quali parlò per primo Goltz, possono dimostrarsi. Così portando irritazioni nei dintorni dell'ano, o sulla pianta dei piedi, o sulle parti interne delle coscie, mentre non si trasmettono altre eccitazioni sensitive sulla vescica, se si irritano le suddette parti nell' animale cloralizzato, si inducono contrazioni riflesse della vescica. Goltz provocò il medesimo fenomeno, in animali che avevano tagliato il midollo, nel limite fra la regione dorsale e la lombare. Goltz credette con questo di dimostrare, che la attività del detrusore nello stato normale non è provocata dal cervello, ma dai nervi di senso della vescica per un riflesso che si esegue nel midollo lombare (¹).

Senza escludere la possibilità di questo meccanismo, oggidì non è più da dubitarsi dell' importanza dei centri cerebrali sulle funzioni della vescica stessa.

Ritornando all'esperienza suddetta, dopo 20′ avviene un aumento nel tono della vescica, espresso da una linea ascendente sull' ascissa, (vedasi il seguente tracciato) mentre la respirazione e la pressione dimostrano poche modificazioni. Questo aumento di tono precede di 1′ lo svegliarsi dell'animale, che avviene nel momento segnato da S. Dosi maggiori di cloralio portano perdite più gravi di tono della vescica: ma anche per dosi più alte cessata l'azione sui centri nervosi, cessa in gran parte l'effetto sulla vescica.

(¹) *Ueber die Funzionen des Lendenmarks des Hundes.* Pflüger s'Archiw VIII, 465.

Fig. 8. — (*Cloralio*)

Si può quindi ammettere che il cloralio ed il cloroformio, per tre vie diverse agiscono sui muscoli lisci della vescica. La prima, ed è la principale, sottraendo all' influenza dei centri cerebrali la vescica, la seconda è quella che si manifesta per modificazioni nello stato dei vasi; finalmente le modificazioni della respirazione nello stato di narcosi da cloralio o da cloroformio, influiscono sui muscoli lisci della vescica: e questa ultima influenza, a differenza delle precedenti, può dimostrarsi con aumenti di tono e con delle contrazioni dell'organo.

§ 7. *Oppio e morfina.*

I narcotici possono influenzare per molte vie lo stato dei muscoli vescicali, e ricorderò appena la loro influenza sul sistema vasomotorio, (Crumpe, Wolf), sulla respirazione, (Traube), sul sistema nervoso, (Bernard, Valentin, Kölliker, Albers) e le influenze dirette su questi muscoli, come ammette Nasse per l' intestino.

Mentre le osservazioni più comuni assegnano all'oppio ed alla morfina, un'azione principale nella diminuzione della peristalsi, Nasse e Gscheidlen (¹) ammettono un aumento della eccitabilità dell' intestino, onde esagerazione de' suoi movimenti.

Salvioli invece osservò direttamente dilatazione dei vasi intestinali, e diminuzione nei movimenti.

Kölliker studiando l'azione dell' oppio sui muscoli lisci scriveva « *die glatten Muskeln verlieren ihre Reizbarkeit ebenfalls rasch* » (²).

Diversi osservatori hanno richiamata l'attenzione sull' azione dell'oppio sull'apparato urinario. Un fenomeno che appare anche per le piccole dosi, ma certamente per le dosi medie e grandi, sarebbe un forte stimolo di urinare, e nel tempo stesso

(¹) Nasse, *Beitrage zur Phys. der Darmbewegung*. Leipzig, 1866. — Gscheidlen, Untersuchungen a. d. Phys. Labor. in Würzburg, II. 1869.

(²) *Physiologische Untersuchungen ueber die Wirkung einiger gifte*. Wirckow's Archiw, 1856. Vol. X.

la difficile emissione di poche goccie, fenomeno questo che può crescere fino a completa ritenzione (Trosseau-Pidoux).

Il sintomo della ritenzione d'urina predomina negli uomini.

Aresu crede che i narcotici possono aumentare le contrazioni della vescica, per l'eccitazione che portano all'attività cerebrale fino al delirio, e per la sospensione dell'influenza inibitrice che il cervello esercita sui riflessi spinali. In altra sfera di effetti, crede possa esservi ritardata l'emissione dell'urina (¹). In generale ammettono però i tossicologi, che colle attuali cognizioni non può determinarsi in che modo l'oppio agisca sull'apparato urinario, poichè sul fatto non si hanno che opinioni discordi (Nothnagel). La mancanza di esperienze sugli animali non mi permette di determinare il modo principale d'influenza di questi agenti sui muscoli lisci della vescica. Le esperienze che mi fu dato di eseguire si riferiscono all'uomo, sulla vescica del quale l'oppio e la morfina a dosi terapeutiche, manifestano già un' azione evidente.

Una donna di media età, perfettamente sana, si presta ad un'esperienza la quale è disposta come le precedenti. La vescica sotto soli 5 c. di pressione, dà un tracciato leggermente ascendente:

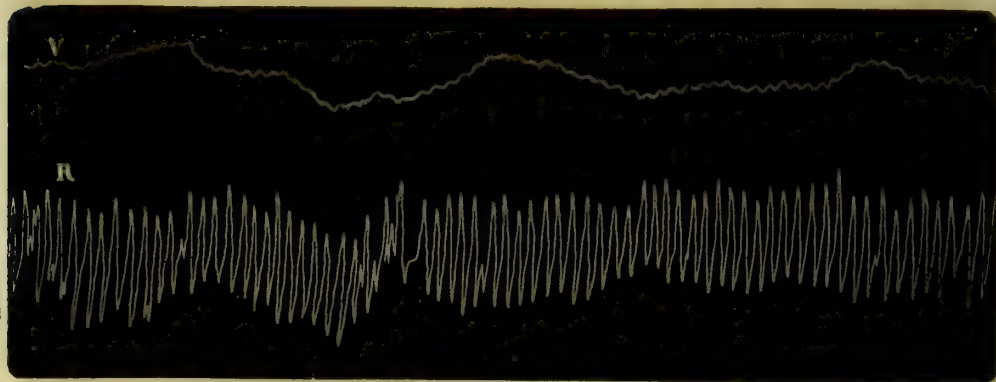
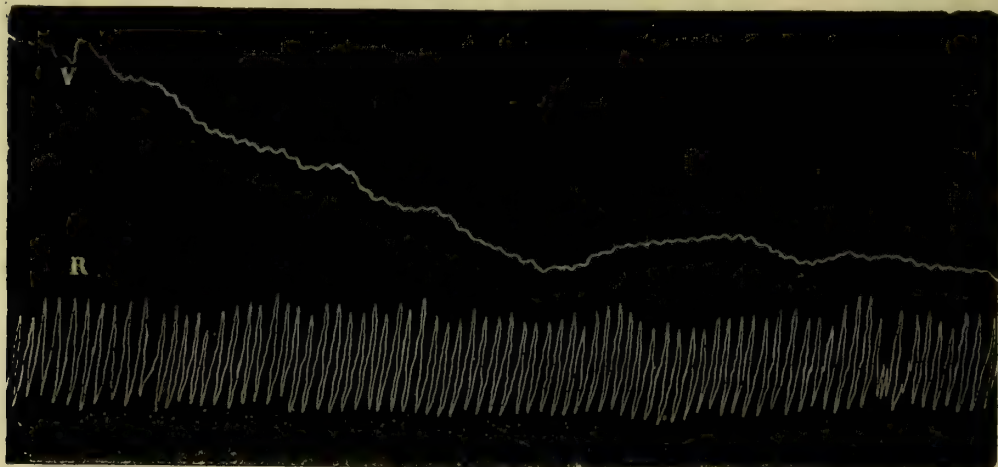
Fig. 9 *A*. — (*Morfina*).

alle 8,53′ si iniettano ipodermicamente 2 cg. di idroclorato di morfina. Alle 8,57, dice che le vien sonno, alle 9,2′ mentre la respirazione è tranquillissima, intraprende la vescica un periodo di dila-

Fig. 9 *B*. — (*Morfina*).

(¹) Aresu, *Esperienze fisiologiche sull'escrezione dell'urina*. Roma, 1880.

tazione, di cui si scrive il tracciato per 7′, cioè dalle 9,2′ alle 9,9′. Le dico di non addormentarsi, e come dimostra il tracciato della respirazione, nessuna influenza respiratoria ha agito sull' organo. Questa dilatazione ha durato 35′ dopo di che, disse le era cessato il bisogno di dormire.

In queste esperienze non ci siamo incontrati mai nel fenomeno notato dagli autori; cioè in quello della contrazione spasmodica sotto l'influenza dell'oppio. Non possiamo parlare che di dosi terapeutiche e di ricerche sull'uomo, quindi non è ad avanzarsi nessuna ipotesi per ciò che riguarda la natura dell'azione.

È probabile che queste sostanze e per la via dei vasi, e dei centri nervosi, ed anche per quella della respirazione, abbiano campo di esercitare delle azioni molteplici sui muscoli vescicali.

Per ora mi limito a constatarne l'influenza a dosi terapeutiche sui muscoli medesimi.

§ 8. *Alcool.*

Anche per l'alcool dirò di qualche esperienza fatta nell' uomo.

È una giovane di 18 anni, non dedita alle bevande alcooliche, sulla quale alle 8,20′ si incomincia l' osservazione: la vescica sotto pressione di 6 c. lascia penetrare 500 cc. di liquido. Non ha variazioni

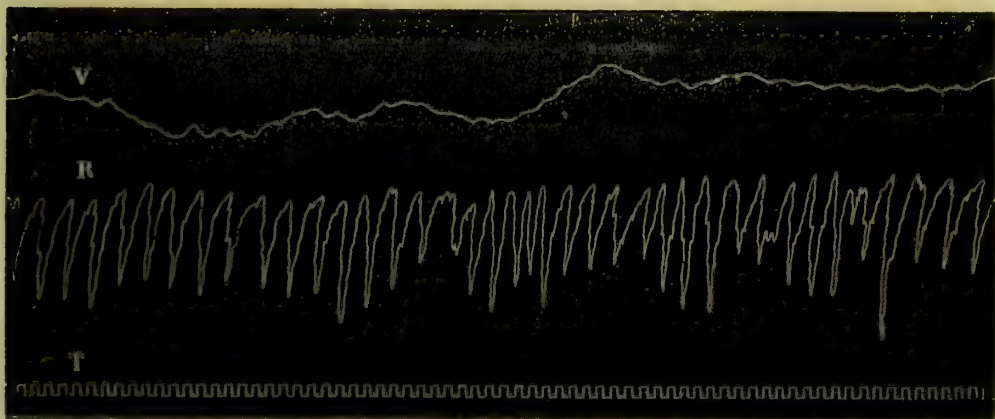
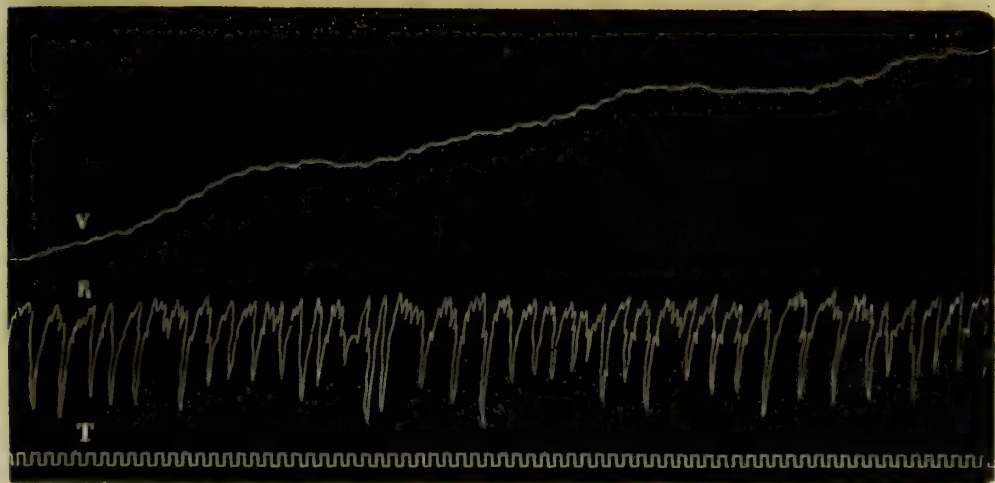
Fig. 10 *A.* — (*Alcool*)

notevoli di tono, la respirazione è tranquilla. Alle 8,41′ la ragazza, che è a digiuno, prende 30 grammi di rhum. Dopo 5′ il tracciato della vescica tende a farsi discendente, la giovane è agitata, modificasi pure il tracciato della respirazione. Dopo 10′ continuando lo stato di agitazione s'intraprende un periodo di contrazioni che dura per 30′.

Fig. 10 *B.* — (*Alcool*)

Dopo 39′ interviene sonnolenza, la persona è arrossata in viso, la vescica aumenta di tono, aumento che persiste dopo 1 ora.

La ragazza dice di star bene, di non sentire più alcun effetto dell'alcool introdotto. Ad un' altra donna, la quale ordinariamente non beve nè vino nè alcoolici, 45 grammi di marsala, danno a vedere effetti notevoli dopo 15′. Vi fu un periodo di aumento di tono della vescica, che durò 40′. Essa disse di non aver sentito nessun fenomeno, ad eccezione della « *testa pesante* ».

Riferendo questi fenomini costanti consecutivi all' introduzione dell' alcool, io vorrei poter dare qualche cenno sul modo di loro produzione. L' attività dell'alcool sul sistema nervoso e circolatorio, possono essere d' intermezzo alle manifestazioni di queste influenze.

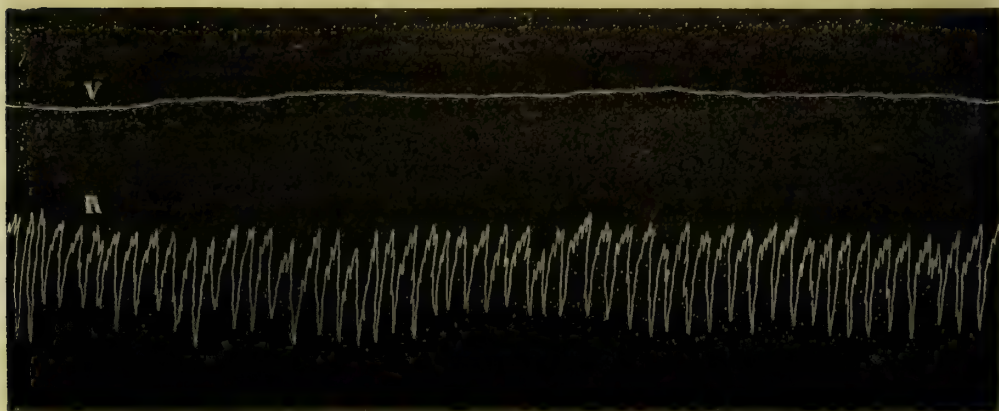
§ 9. *Caffè.*

Il caffè come l'alcool, ha molteplici vie per le quali fa far sentire la sua influenza sui muscoli della vescica. È noto che l'attività del caffè, può essere dovuta tanto all' acido tannico, che all' olio empireumatico, od alla caffeina. Per l' olio e per la caffeina non ho sufficienti esperienze; invece, l' acido tannico trovai molto attivo sui muscoli della vescica. Nasse [1] vide effetti negativi dalla caffeina sull' intestino.

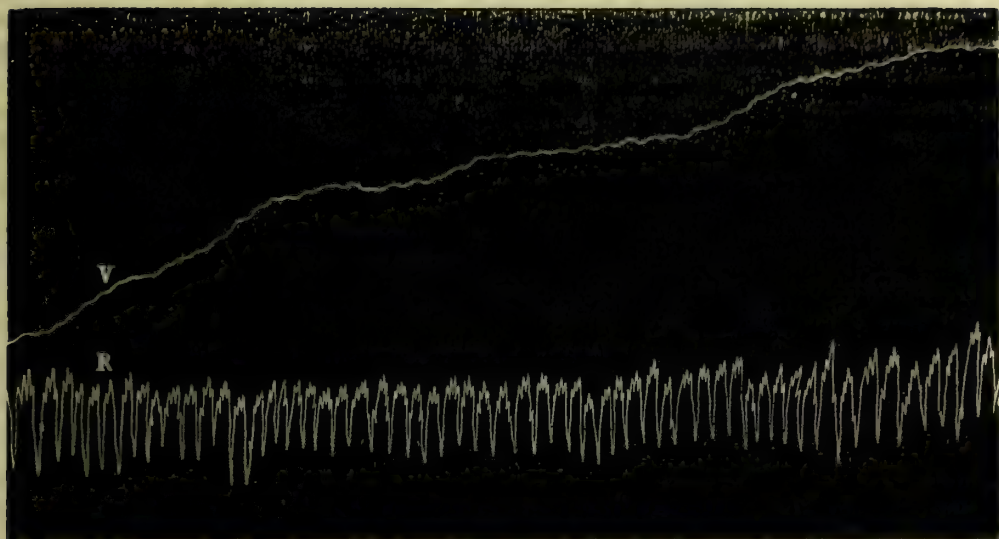
Siccome queste esperienze riguardano esclusivamente la vescica dell'uomo, così non è possibile di determinare in qual modo principale il caffè agisca sulla vescica medesima. Così la caffeina che è un agente importante sui muscoli striati deve essere studiata nella sua attività sui lisci.

Vi ha chi ha notato per influenza della caffeina il bisogno frequente di urinare (Lehmann) [2].

È una persona giovane a 18 anni, la quale a 5 c. di pressione ha la vescica distesa da 400 cc.

Fig. 11 *A*. — (*Caffè*)

di acqua, ed alle 7,28′ prende un'infusione di caffè moka; in C. la vescica che non mostrava fenomeno qualsiasi, segna già un aumento rilevante di tono tantochè alle 7,47 questa si è vuotata di 30 cc. di liquido. Questo stato perdura fino alle 8,35′ uscendo complessivamente 100 cc. di acqua dalla vescica. Nel tracciato seguente osservasi questo aumento di tono vescicale mentre la respira-

(1) L. c.
(2) Annalen d. Chemie und Pharmacie. LXXXVII.

Fig. 11 *B.* — (*Caffè*)

zione non ha rilevanti modificazioni. La respirazione non fu punto influenzata da questa dose di caffè: non si potrebbe da queste esperienze ammettere con Boecker che anche per le piccole dosi di caffè la respirazione diminuisca di frequenza.

Le esperienze anche pel caffè ebbero lo stesso metodo.

Non entro in ulteriori particolarità; basti questo cenno a dimostrazione dell'attività del caffè sui muscoli vescicali dell' uomo.

§ 10. *Astringenti.*

Un interesse speciale presenta lo studio della influenza esercitata da queste sostanze su di un organo cavo, costituito di fibre liscie, perchè in due modi principali; cioè, colla costrizione vascolare, e colla riduzione di volume dell' organo, possono manifestare i loro effetti sulle emorragie di questi organi.

La riduzione di volume dell'organo per contrazioni del medesimo, è una delle circostanze più favorevoli per l'arresto dell'emorragia. Ho eseguito diverse ricerche con alcune sostanze di questo gruppo, e siccome i risultati più evidenti li ha mostrati l' acido gallico, così dirò di alcune esperienze, che riguardano questa sostanza.

Rosenstirn notava il fatto che l'acido gallico possiede la massima azione locale sui vasi, mentre il sesquicloruro di ferro anche al 50 per $^0/_0$ manifesta un' azione locale debole sui vasi (¹).

L' acido gallico in grandi dosi, è da tempo commendato nelle emorragie vescicali, a preferenza di qualsiasi altro emostatico (Cantani). Queste ricerche confermano pienamente quei risultati clinici, e dimostrano come in esso si possa riporre ogni fiducia.

(¹) *Untersuchungen ueber die örtliche Einwirkung der sogenn. Adstringentien auf die Gefässe.* Centralblatt 1876.

Una donna di 26 anni, guarita perfettamente di un catarro uterino, ci permette un' esperienza, nella quale conserva la massima tranquillità. La vescica sotto pressione di 6 c. ha 400 cc. di contenuto. Il tracciato della vessica riporta delle piccole ondulazioni che non segnano altro che i movimenti respiratorî dell'addome, le maggiori oscillazioni corrispondono a contrazioni, ed aumenti di tono dell'organo. Dopo aver osservato un decorso regolare dell' esperienza fino alle 9,30′, si somministra una soluzione di 5 grammi di acido gallico. La donna rimane tranquilla, senza alcuna modificazione respiratoria, quando alle 9,34′ incomincia un aumento forte nel tono della vescica, accompagnato da piccole contrazioni ripetute; alle 9,41′ si vuota la provetta del pletismografo di 30 cc. di liquido, alle 9,42′ la linea continua bruscamente ascendente, tantochè si riempie di altri 30 cc. la provetta del pletismografo.

Questo fatto continuasi fino alle 9,50′, e si è costretti a chiudere le comunicazioni fra pletismografo e vescica, perchè questa si sarebbe vuotata completamente. In 8′ la vescica ha cacciato 160 cc. di liquido; questo fatto è accaduto a respirazione perfettamente tranquilla, e senza che la persona se ne accorga. Si è domandato ripetutamente alla donna, se per caso avvertisse bruciore all' uretra, conoscendo in questo fatto una causa attiva di contrazioni riflesse nella vescica. La persona in esperimento non aveva alcuna sensazione. Si ripete più volte la esperienza.

La tavola IV mostra queste contràzioni vescicali quali sono prodotte dall'acido gallico, ed osservate contemporaneamente alla respirazione tranquillissima.

Il fatto che queste persone per influenza di tale sostanza riescono a vuotare la loro vescica senza avvertire il bisogno di mingere, merita qualche considerazione. Si ammise da noi (¹) che il senso del bisogno di mingere coincide coll' aumento del tono della vescica, avendo dimostrato anzi come l' aumento del tono vescicale preceda la sensazione del bisogno stesso. Si emise quindi l' ipotesi, che la pressione che il contenuto vescicale va ad esercitare sulle pareti dell' organo e quindi sui nervi di senso, sia una delle principali condizioni all' insorgenza della sensazione di ripienezza vescicale.

Pare a me che i fatti che ho riferiti, portino una valida contribuzione a quella dottrina. L' acido gallico aumenta fortemente il tono vescicale; la vescica si contrae e nessuna sensazione è avvertita dalla persona in esperimento. La causa di questo è evidentemente riposta in ciò: che nella vescica in comunicazione col pletismografo la pressione vi rimane costante coll' aumentarsi del tono, così che si elimina la quantità di liquido corrispondente al tono aumentato.

Siccome altre sostanze appartenenti al gruppo degli astringenti non fornirono risultato alcuno sui movimenti della vescica, (cloruri di ferro) ed i fenomeni furono osservati nelle migliori condizioni tanto de escludere anche per la loro costanza qualsiasi causa estrinseca, così si può concludere confermando in queste ricerche sperimentali tutta l'efficacia dell'acido gallico, non solo per la sicurezza del suo assorbimento e per la utilità che nelle emoraggie vescicali hanno le contrazioni vascolari che provoca, ma anche e maggiormente, per le contrazioni forti e durature che si determinano nei muscoli della vescica.

(¹) Mosso e Pellacani, *Sulle funzioni della vescica.* R. Accad. dei Lincei 1881. Vol. XII. p. 55.

CAPITOLO VII.

Sostanze che influiscono specialmente in modo diretto sui muscoli lisci della vescica.

Pilocarpina.

Per la pilocarpina si sarebbe potuto ammettere in precedenza un'azione principale sui muscoli della vescica esercitata a mezzo della sua azione sul cuore, (Kahler Yayka, Leyden) (¹), sui vasi (Leyden, Langley) (²), ed in genere per le sue proprietà fisiologiche molte analoghe alla nicotina (Harnach e Mayer (³) un'azione indiretta.

Chi primieramente ha richiamata l'attenzione sull'influenza della pilocarpina su di un organo a fibre lisce, furono gli ostetrici. Dopo la proposta di Masman, la pilocarpina nell'ostetricia trovò impiego principalmente per provocare il parto prematuro, ed eccitare la contrazione uterina nel caso d'inerzia; come per prevenire ed ovviare a metro-raggie dopo il parto. Schauta (⁴), Säeger (⁵), Kleinwachter (⁶) eccitarono il parto prematuro colla pilocarpina, la quale riescirebbe meglio a collo d' utero dilatato. L'atropina poi anche sull'utero manifesterebbe la sua azione antagonista. Non mancarono peraltro risultati negativi come quelli di Felsenreich (⁷), Welponer (⁸), Cuzzi (⁹) Hyerneeux.

Una ulteriore serie d'osservazioni favorevoli all' impiego della pilocarpina nell'inerzia uterina, pubblicò recentemante Schauta, epperò nello stato attuale della controversia sono desiderabili nuovi fatti, ed osservazioni più estese sull' uso della pilocarpina nell' ostetricia.

Oltre che sull' utero, trovò impiego e successo la pilocarpina in alcune malattie della vescica e precisamente nell'incontinenza d' urina (¹⁰). Le esperienze che io ebbi ad eseguire colla pilocarpina, riguardano gli animali e l' uomo: nei primi si determinò il modo d' azione della pilocarpina sui muscoli lisci della vescica cogli ordinarî mezzi di registrazione, osservando contemporaneamente le condizioni del sistema vascolare e della respirazione.

Ad un cane giovane del peso di Cg. 9,700, dopo il taglio del midollo alla regione dorsale inferiore, si pone a scoperto la vescica, e sotto pressione di 6 c. messa in comunicazione col pletismografo. Il tracciato che dà la vescica è lievemente discendente, la respirazione regolare, la pressione normale. Si fa un' iniezione sottocutanea di 0,02 di idroclorato di pilocarpina, affatto libera da jaborina. Respirazione e pressione non subiscono la minima modificazione, mentre dopo 1,21″ interviene una fortissima contrazione della vescica, per la quale in 15″ si vuota la vescica di 30 cc. di

(¹) Centralblatt. f. d. med. Wissenschaft 1876. Centralblatt. f. d. med. Wiss. 1878.
(²) Britt. med. Journal, 1875.
(³) Annalen der Chemie und Pharmacie 204, p. 67.
(⁴) Wiener medicin. Wochenschrift 1878.
(⁵) *Studien und Erfahrungen ueber das Pilocarpin in der Geburtshülfe.* Archiv. für Gynecol. XIV, S. 43
(⁶) *Einleitung der künstlichen Frugeburt mittelst. Pilocarp. muriaticum.* Centralblatt 1879.
(⁷) Wiener medic. Wochenscrift, 1878.
(⁸) Centralblatt für Gynecologie n. 15, 1878.
(⁹) *Sull'uso del cloridrato di pilocarpina per provocare il parto prematuro.* Annali di Ostetricia 1879.
(¹⁰) Sidney-Ringer, *The effects of Pilocarpin.* Centralblatt 1877.

acqua, ed in breve tutto il contenuto della vescica fu eliminato. La vescica rimane contratta, mentre l'animale è tranquillo, la respirazione e la pressione normale. Dopo 10′ dall' iniezione la vescica è nello stesso stato; incomincia però a manifestarsi dispnea, abbassamento della pressione, miosi, salivazione, agitazione. Havvi diminuzione di frequenza del polso per irritazione del vago e continuazione di quei fenomeni per 45′ dopo la iniezione. Ripetesi l' inezione di 0,02 di sostanza. Ulteriori modificazioni manifestano la respirazione ed il tracciato della pressione che è fortemente abbassata: la respirazione si fa meno frequente, man mano superficiale, poi cessa; i movimenti cardiaci rallentano ed indeboliscono progressivamente, fino all'arresto completo. La vescica fino a questo momento rimane contratta, poi dilatasi appena cessati i movimenti del cuore. Se si ripete l'esperienza in un animale che ha subito la distruzione del midollo lombare, i fenomeni si succedono nello stesso modo.

La tavola V riporta questi fenomeni; nel momento segnato da ↓ avvenne l'iniezione sottocutanea della sostanza.

L'azione della pilocarpina sui muscoli vescicali è affatto indipendente da influenze respiratorie, e da quella dei vasi sanguigni e del cuore, nonchè del sistema nervoso. Il primo fenomeno che si manifesta coll'iniezione sottocutanea della pilocarpina, è una forte e persistente contrazione dei muscoli della vescica, la quale perdura ancora, intervenendo gli effetti della pilocarpina sui vasi, sul cuore, sulla respirazione ecc.

Anche le esperienze sull' uomo confermano l' importanza dell'azione della pilocarpina sui muscoli della vescica.

Una donna di 25 anni si sottopone ad un' esperienza disposta nel modo ordinario. La vescica è sotto pressione di 10 c. con 400 cc. di contenuto. Aperte le comunicazioni col pletismografo, si dilata lentamente.

Una parte di questo tracciato è riportato nella tavola VI. Alle 9,50′ nel momento segnato da A si fa un' iniezione sottocutanea di 0,02 di pilocarpina affatto esente da jaborina. Dopo 1′ si dimostra una forte contrazione della vescica senza altra causa nota, senza sensazione alcuna, rimanendo la persona perfettamente tranquilla, come dimostra il tracciato della respirazione. Questa contrazione perdura incessantemente fino alle 10,18′ finchè la vescica si è completamente vuotata del suo contenuto. Alle 10,8′ comparve sudore, miosi, alle 10,10′ salivazione, alle 10,11′ sforzi di vomito. Cessati questi la persona ritorna tranquilla, la vescica permane contratta, anche sotto forte pressione. Ripetute volte richiesta, risponde che non ebbe la minima sensazione del bisogno di mingere.

Sul significato di questo fatto non insisto maggiormente. La pilocarpina è certo una delle sostanze più attive sui muscoli vescicali. — E ciò senza intervento di influenze secondarie le quali avvengono solo più tardi, quando già l'azione della pilocarpina sulla vessica è svolta completamente. Essa nell' uomo anche a dosi minori delle precedenti, ha dimostrato effetti immediati sulla vescica. Sembra perciò che la pilocarpina possa utilizzarsi in diverse alterazioni funzionali dei muscoli vescicali.

Parecchie altre sostanze si esperimentarono sull'uomo, fra le quali l' atropina ed il bromuro di potassio, molto commendato dai chirurghi, nel trattamento di malattie vescicali con contrazioni eccessive dei muscoli stessi: ma tutte queste non diedero a dosi terapeutiche risultati ben evidenti e costanti.

Questo studio fu finora diretto a ricercare l'influenza delle sostanze più comunemente usate in terapia sui muscoli della vescica; estendendo mano mano le ricerche, si verrà a conoscere l'azione propria di molte altre sostanze, e verranno intraprese delle esperienze sulla tossicologia propriamente detta dei muscoli lisci.

Esprimo la mia gratitudine al prof. A. Mosso per i mezzi e pei consigli coi quali volle favorire l'esecuzione di queste mie esperienze.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

I.

Tavola I. — Influenza della Stricnina a dosi terapeutiche sui muscoli della vessica di una donna. R, Respirazione - T, Tempo - V, Aumento di tono della vessica consecutivo alla somministrazione della sostanza. A, Injezione sottocutanea di 0,002 di solfato neutro di Stricnina in soluzione.

Tavola II. — Influenza dell'ergotina sul Cuore e sui muscoli vessicali di un cane. T, Tempo in minuti secondi - P, Pressione del sangue scritta mediante un manometro in comunicazione colla carotide - R, Respirazione scritta a mezzo di un pneumografo di Marey applicato al torace - V, Movimenti della vessica. Injezione dell'Ergotina Bonjeau nella vena dorsale del piede.

Tavola III. — Influenza della Chinina (soluzione d' idroclorato neutro) sui muscoli della vessica di un cane di cg. 15,270 - T, Tempo in minuti secondi - R, Respirazione scritta nel modo suddetto - P, Pressione del sangue - V, Movimenti della vessica in comunicazione col pletismografo. Momento dell' injezione sottocutanea di 0,18 della sostanza.

II.

Tavola IV. — Contrazioni vessicali nell' uomo provocate dall' acido gallico introdotto nello stomaco da 15'. R, R, Respirazione - V, V, Movimenti della vessica. Tempo in minuti primi.

Tavola V. — Effetti della injezione sottocutanea di 0,02 di pilocarpina in un cane. Injezione sottocutanea di 0,02 della sostanza - Per il tempo vedasi il testo. Momento dell'injezione. Le altre indicazioni come sopra. T, Tempo in minuti secondi.

Tavola VI. — Influenza della pilocarpina sui movimenti della vessica dell' uomo. R, Respirazione - V, movimenti della vessica registrati sul solito modo.

Ta
V.
7.14
Tempo in minuti 1°.
R.
V.
Tav. II.
P.
R.
Tempo in 1"
Tav.
V.
P.
R.
Tempo in 1"

Tav. IV

V.

V.

V.

R.

R.

R.

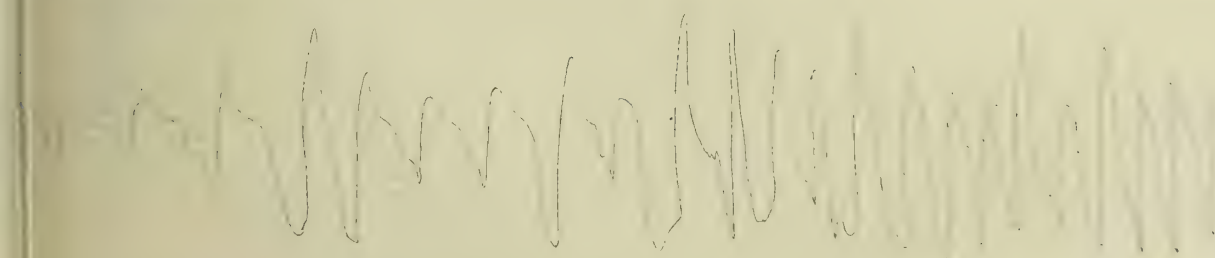
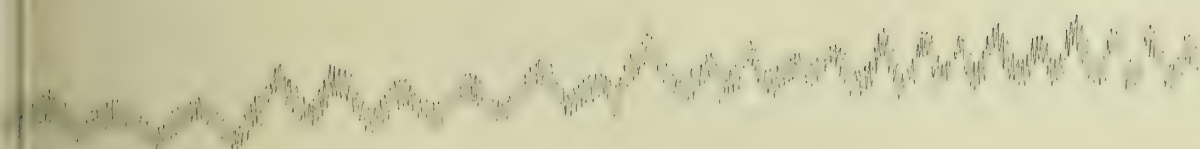
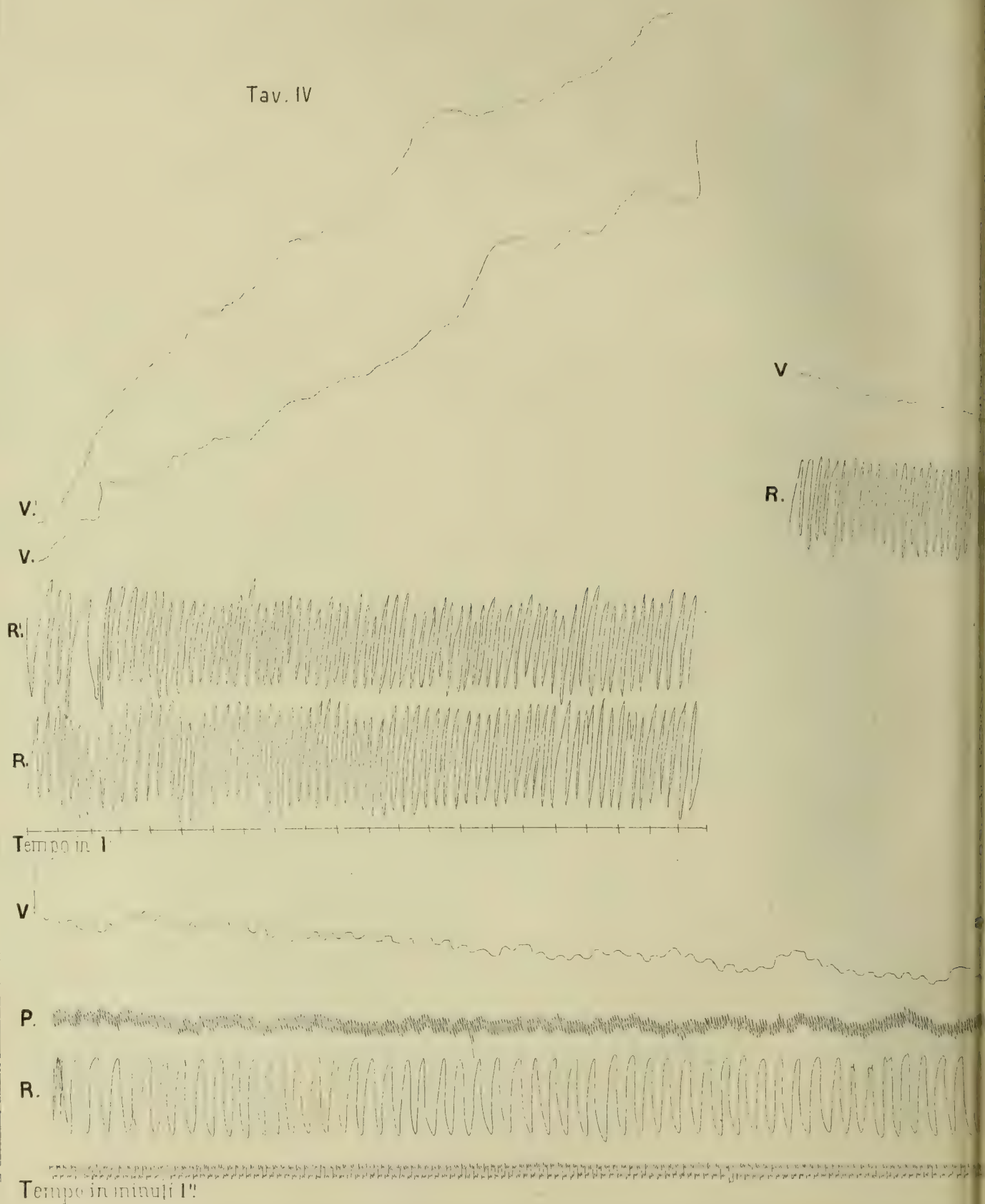
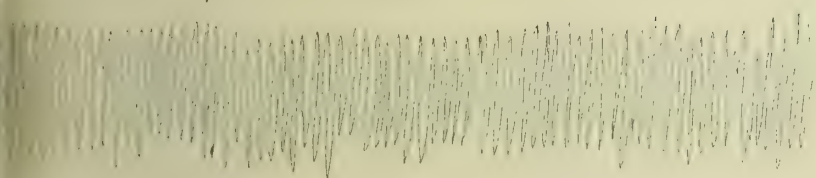
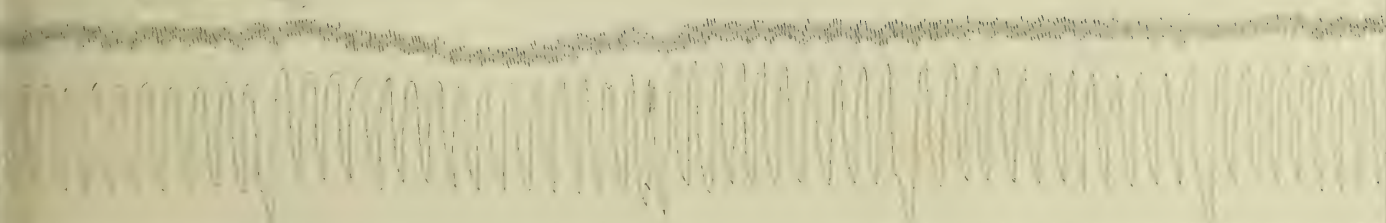
Tempo in 1"

V

P.

R.

Tempo in minuti 1"

Torino. Lit: F.lli Doyen

Tav. VI

V

Sulle costanti di rifrazione.

Memoria di R. NASINI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 15 giugno 1884.

In una Memoria presentata dal dott. Bernheimer e da me all'Accademia, e da questa approvata per l'inserzione negli Atti nella seduta del 4 maggio 1884, noi appoggiandoci a numerose esperienze dimostrammo che alcune delle relazioni più importanti che in questi ultimi tempi si erano stabilite fra la costituzione chimica ed il potere rifrangente delle sostanze organiche non avevano un serio fondamento sui fatti, e facevamo anche intravedere quanto sia difficile in genere di determinare, dirò così quantitativamente, le variazioni nelle costanti fisiche, e nel caso speciale di quelle di rifrazione, causate da variazioni ben definite nella composizione, e nella così detta costituzione chimica dei composti.

Credo ora necessario di insistere sopra alcuni punti che non furono a sufficienza svolti in quella Memoria in cui si mirava a dimostrare semplicemente che talune delle léggi stabilite nel campo della rifrazione dei composti organici non erano così semplici come da principio si era creduto, sia per mancanza di larga base sperimentale, sia perchè si fosse voluto concludere al di là di quello che la esperienza suggeriva. Alla quale dimostrazione credemmo bastare il fatto, che adottando quelle tali costanti, quelle tali espressioni che avevano servito agli autori delle leggi o regole in discorso a stabilirle, noi venivamo invece condotti necessariamente a confutarle, nè ci occupammo troppo di un esame critico di quelle costanti, giacchè al nostro scopo era necessario servirci appunto di esse.

Io mi propongo d'indagare nella presente Memoria, se le costanti che sino ad oggi si sono adoprate ogni volta che si è voluto comparare il potere rifrangente dei varî corpi abbiano un significato fisico ben netto e se proprio sia necessario adottarle a preferenza di altre: e comparando poi le diverse espressioni proposte vedere se esse conducono o no sempre agli stessi risultati dal punto di vista della teoria chimica, che sè ciò non fosse è chiaro che le nostre vedute e sulle relazioni stabilite e sulle espressioni adottate dovrebbero cambiarsi assai e perderebbero in gran parte quella certezza che sin qui è sembrato che avessero.

È noto che nello studio comparativo del potere rifrangente delle sostanze chimiche si sono presi degli speciali valori come base per i paragoni. E precisamente non si sono confrontati soltanto gli indici di rifrazione, ma sibbene dei valori funzioni di questi e delle lunghezze d'onda ma indipendenti, si è creduto, da esse. Nè si sono comparati gl'indici di per sè, o questi tali valori funzioni delle lunghezze

d'onda, ma sibbene delle espressioni, funzioni di essi e della densità delle sostanze. La ragione che non si siano adottati come base per i confronti gl'indici di rifrazione è ben chiara. Tali quantità variano rapidamente colla temperatura, e variano poi col colore del raggio che si rifrange. Ora non variando per tutti i corpi nella stessa regola col variare della temperatura e della rifrangibilità dei raggi, è evidente che una relazione stabilita fra gl'indici di due sostanze a una certa temperatura e per una data riga. può non più sussistere a diversa temperatura o per un altro raggio. Quanto alla temperatura potrebbe a tale difficoltà ovviarsi facendo le esperienze per i diversi composti i liquidi, ad esempio, a temperature corrispondenti; ma poichè ancora non si è ben d'accordo su quello che debba intendersi per temperature corrispondenti, non potendo davvero riguardarsi come tali quelle di ebullizione, ne segue che non sapremmo quale temperatura scegliere pel confronto. Ma quand'anche tale difficoltà potesse risolversi, vi sarebbe sempre l' altra della scelta del raggio, scelta che resta completamente arbitraria. Relazioni vere potrebbero stabilirsi quando vi fossero delle quantità indipendenti e dalla lunghezza d'onda del raggio e dalla temperatura; in tal caso potrebbero queste considerarsi come dipendenti dalla natura, e soltanto dalla natura del composto, e adattatissime quindi per i confronti. I fisici hanno cercato di stabilire di tali espressioni, e i chimici di queste si sono giovati nei loro studî. Cauchy nei suoi lavori di fisico-matematica fu condotto ad ammettere che le variazioni degli indici di rifrazione colla lunghezza d' onda dei raggi che si rifrangono, possono essere espresse mediante la serie:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \cdots$$

Ora il valore di n per λ_∞ è una quantità finita indipendente dai valori di λ. Empiricamente poi si è trovato che una espressione $\frac{n-1}{d}$ è pochissimo sensibile ai cambiamenti di temperatura. In tempi più recenti si è cercato di ritrovare altre espressioni, altre relazioni tra gl'indici e le lunghezze d'onda, altri limiti per n quando λ diventa infinito, e anche altre relazioni tra gl'indici o i valori degl'indici per λ_∞ e le densità. Di queste ultime espressioni merita speciale nota quella che dai due fisici Lorenz e Lorentz fu scientificamente trovata in base a teorie diverse, cioè $\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$ e che al pari dell'altra fu in questi ultimi tempi adottata negli studî di chimica fisica. Ed appunto di tali espressíoni, sulle quali sono fondate le leggi di questa parte della chimica ottica, cioè dei valori degl'indici di rifrazione indipendenti dalla lunghezza d'onda e delle formule $\frac{n-1}{d}$ e $\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$ mi propongo di parlare in questa Memoria.

La ragione per cui s'introdusse in questi studî la costante A di Cauchy, ossia l'indice di rifrazione per una lunghezza d'onda infinita, già l'ho accennata implicitamente: coll'adottare tale valore, si credette di avere eliminato ogni difficoltà, e di introdurre nel calcolo una vera costante fisica indipendente dal colore dei raggi, il limite, vale a dire, a cui tenderebbero gl'indici di rifrazione col diminuire della rifrangibilità di quelli. Questa è la ragione teorica che fece introdurre la costante A.

Ma questa ragione teorica non sembra a me che sia attualmente di gran valore. Manca anche adesso una teoria completa e completamente soddisfacente della luce, e di queste formule di dispersione ne sono state proposte diverse, e fra tutte, giova dirlo, non è certamente quella di Cauchy che sembra doversi preferire. È chiaro che tutte le teorie della luce essendo basate sopra ipotesi più o meno probabili sulla costituzione dell'etere e della materia, le deduzioni di queste ipotesi avranno sempre bisogno della prova esperimentale, perchè si possa stabilire se, e sino a qual punto esse erano giuste. Delle diverse formule rammenterò quella di Christoffel, il quale dedusse dalle teorie di Cauchy che la vera espressione era la seguente:

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}},$$

dove n_0 e λ_0 sono due costanti e quando λ diventa infinito n ha un valore finito cioè $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$. Ma da altri si sono proposte altre formule in cui per un valore infinito di λ non si ha un valore finito di n oppure si ha come limite l'unità. Ketteler propose la formula:

$$n^2 - 1 = \Sigma \frac{A}{\lambda^2 - B},$$

nella quale evidentemente, quando λ diventa infinito, n è eguale alla unità: in altri termini il limite degl'indici di rifrazione col crescere della lunghezza d'onda è la unità, ossia non vi è più rifrazione. E Ketteler mette in rilievo questa conseguenza e mostra anche come, sperimentalmente, siensi trovati nell' ultra rosso per n valori più piccoli, di quelli dati dalla formula di Cauchy per λ infinito. Una teoria che adesso è generalmente adottata è quella di Helmholtz, il quale è giunto alla conclusione esser questa la relazione tra le lunghezze d'onda e gl'indici di rifrazione:

$$n^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda^2_m}$$

dove P, Q e λ_m sono tre costanti. Il limite di n, per λ infinito, non è qui in generale una quantità finita. Abbiamo infatti:

$$n^2 - 1 = -P\lambda^2 + \frac{Q\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda^2_m} = \lambda^2 \left(\frac{Q\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda^2_m} - P \right)$$

$$= \lambda^2 \left(\frac{Q}{1 - \frac{\lambda^2_m}{\lambda^2}} - P \right)$$

ma $\lim_{\lambda = \infty} \frac{\lambda^2_m}{\lambda^2} = 0$ e quindi

$$\lim_{\lambda = \infty} (n^2 - 1) = (Q - P) \lim \lambda^2$$

$$= \pm \infty \qquad \text{secondochè} \qquad Q - P \gtrless 0.$$

Se si avesse:

$$P = Q$$

allora:

$$n^2-1=P\lambda^2\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda^2_m}-1\right)=P\lambda^2_m\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda^2_m}=P\lambda^2_m\frac{1}{1-\frac{\lambda^2_m}{\lambda^2}}$$

e

$$\lim n^2-1=P\lambda^2_m$$

$$\lim n^2=1-P\lambda^2_m.$$

Si vede dunque che, nel caso generale, il limite di n non è una quantità finita, ma sibbene l'infinito positivo o negativo. Ben'è vero che nella maggior parte delle sostanze P è uguale a Q o ne differisce pochissimo, nel qual caso un limite esiste; ma è pur vero che specialmente per sostanze molto rifrangenti, come il solfuro di carbonio ad esempio, P si allontana notevolmente da Q. Riportiamo qui i dati seguenti:

Acqua a 19,5		Alcool a 0°	
n_β = 1,33048	P = 0,865895	n_C = 1,36848	P = 0,873066
n_H = 1,34350	Q = 0,865767	n_γ = 1,37816	Q = 0,873068
	λ^2_m = 0,87979		λ^2_m = 0,97672
	Q — P = —128		Q — P = 2

Glicerina a 0°		Solfuro di carbonio a 24,8°	
n_C = 1,46365	P = 1,151797	n_β = 1,6114	P = 0,423802
n_γ = 1,47573	Q = 1,151771	n_H = 1,6956	Q = 0,424350
	λ^2_m = 0,97038		λ^2_m = 3,43492
	Q — P = — 26		Q — P = 548

Quando P è eguale a Q esiste allora un limite di n per λ_∞; infatti abbiamo visto che la formula a tre termini si trasforma nell'altra a due:

$$n^2-1=P\lambda^2_m\frac{1}{1-\frac{\lambda^2_m}{\lambda^2}}$$

o sotto altra forma:

$$n^2=1+\frac{a}{1-\frac{\lambda^2_0}{\lambda^2}}$$

dove per $\lambda=\infty$ si ha:

$$n^2_\infty=1+a \qquad \text{e} \qquad n_\infty=\sqrt{1+a}\,.$$

Questa formula a due termini, conosciuta sotto il nome di formula di Lommel, dà pure un valore finito per λ infinito e dà risultati molto migliori di quella di Cauchy, pure con due termini, come lo mostrano i seguenti esempî:

Benzolo — (Esperienze di Brühl)

μ_α = 1,49668; μ_D = 1,50137; μ_β = 1,51339; μ_γ = 1,52377

Formula di Cauchy (Esp. H_α e H_γ)

A = 1,47562 B = 0,90816

	calcolato	trovato	differenza		calcolato	trovato	differenza
μ_β	1,51404	1,51339	0,00065	μ_D	1,50177	1,50137	0,00040

Formula di Lommel (Esp. H_α e H_γ)

a = 1,18312; λ^2_0 = 1,97989; n_∞ = 1,47754

	calcolato	trovato	differenza		calcolato	trovato	differenza
μ_β	1,51369	1,51339	0,00030	μ_D	1,50155	1,50137	0,00018

ANILINA — (Esp. di Brühl)

$\mu_\alpha = 157948$; $\mu_D = 1,58629$; $\mu_\beta = 1,60434$; $\mu_\gamma = 1,62074$

Formula di Cauchy (Esp. H_α e H_γ)

A = 1,54741 B = 1,38319

	calcolato	trovato	differenza		calcolato	trovato	differenza
μ_β	1,60592	1,60434	0,00158	μ_D	1,58724	1,58629	0,00095

Formula di Lommel (Esp. H_α e H_γ)

$a = 1,40604$; $\lambda^2_0 = 2,55953$; $n_\infty = 1,55114$

	calcolato	trovato	differenza		calcolato	trovato	differenza
μ_β	1,60522	1,60434	0,00088	μ_D	1,58679	1,58629	0,00050

METIL α NAFTOLO — (Nasini e Bernheimer)

$\mu_\alpha = 1,61474$; $\mu_D = 1,62322$; $\mu_\beta = 1,64597$; $\mu_\gamma = 1,66753$

Formula di Cauchy (Tutte le esperienze — minimi quadrati)

A = 1,5721 B = 1,7872

	trovato	calcolato	differenza		trovato	calcolato	differenza
μ_α	1,61474	1,6135	0,00124	μ_β	1,64597	1,6477	0,00173
μ_D	1,62322	1,6235	0,00028	μ_γ	1,66763	1,6668	0,00083

Formula di Lommel (Tutte le esperienze — minimi quadrati)

$a = 1,49490$; $\lambda^2_0 = 2,99620$; $n_\infty = 1,57953$

	trovato	calcolato	differenza		trovato	calcolato	differenza
μ_α	1,61474	1,61447	0,00037	μ_β	1,64597	1,64678	0,00081
μ_D	1,62322	1,62358	0,00036	μ_γ	1,66763	1,66722	0,00041

DIMETILNAFTALINA — (Nasini e Bernheimer)

Formula di Cauchy (minimi quadrati)

A = 1,5437 B = 1,6376

	trovato	calcolato	differenza		trovato	calcolato	differenza
μ_α	1,60250	1,6017	0,00080	μ_β	1,63200	1,6330	0,00100
μ_D	1,61052	1,6109	0,00038	μ_γ	1,65117	1,6506	0,00057

Formula di Lommel (minimi quadrati)

$a = 1,4638$; $\lambda^2_0 = 2,8509$; $n_\infty = 1,56965$

	trovato	calcolato	differenza		trovato	calcolato	differenza
μ_α	1,60250	1,60231	0,00019	μ_β	1,63200	1,6324	0,00040
μ_D	1,61052	1,6108	0,00028	μ_γ	1,65117	1,6506	0,00057

In tale incertezza nei valori limiti di n quando λ cresce indefinitivamente, incertezza sia nelle teorie fondamentali, sia nella verifica esperimentale delle diverse espressioni trovate col calcolo, pare a me molto prematuro l'adottare come base per ricerche e comparazioni di chimica fisica dei valori, delle costanti prive forse di ogni significato fisico.

Queste furono ad ogni modo le ragioni teoretiche che fecero adottare la costante A la quale poi una volta introdotta, si seguitò da molti ad usare, giacchè parve che essa dasse resultati chimicamente più esatti e più netti che gl'indici di rifrazione:

e si vide precisamente che coll'uso della costante A introdotta in quelle tali espressioni, funzioni degl'indici e delle densità, si aveva più netto il fatto che due composti isomeri possiedono la stessa rifrazione molecolare, ad esempio, e che a differenze costanti di composizione corrispondono differenze costanti nelle rifrazioni molecolari. Le quali cose quando sempre ed in modo spiccato si verificassero, sarebbero di qualche peso, non solo perchè tali espressioni si adottassero nei lavori di chimica fisica, ma anche sarebbero una certa prova in favore delle costanti medesime od altre analoghe. Il fatto che l'adozione della costante A dà luogo a resultati più netti sarebbe, dico, una certa prova nell'ipotesi, non sappiamo quanto probabile, che due composti isomeri debbano proprio avere la stessa rifrazione, e che proprio sempre a differenze eguali nella composizione, corrispondano differenze eguali nel potere rifrangente. Bisogna però qui andar cauti perchè potrebbe anche darsi che tali regolarità maggiori nei resultati non siano che illusorie, e che dipendano soltanto dal fatto, che si sottopongono allo stesso calcolo delle sostanze, che avendo dispersioni diverse, andrebbero forse sottoposte a calcoli diversi. Vediamo più precisamente come stanno le cose. Qui riportiamo come esempio un gran numero di determinazioni che hanno servito a stabilire i valori delle rifrazioni del gruppo CH_2, dell'ossigeno alcoolico e dei così detti doppî legami.

Valore dell' incremento CH_2

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	μ_α	A	$P\frac{\mu_\alpha-1}{d}$	Diff.ª	$P\frac{A-1}{d}$	Diff.ª
Alcool metilico	CH_4O	1,32789	1,32143	13,19	7,54	12,93	7,38
» etilico	C_2H_6O	1,36054	1,35322	20,73	7,61	20,31	7,46
» isopropilico.	C_3H_8O	1,37930	1,37167	28,34	7,82	27,77	7,31
» isobutilico	$C_4H_{10}O$	1,39395	1,38579	36,16	7,83	35,41	7,61
» amilico.	$C_5H_{12}O$	1,40513	1,39655	43,99		43,92	
				Media	7,70	Media	7,44
Aldeide acetica.	C_2H_4O	1,32975	1,32229	18,61	7,39	18,18	7,24
» propionica	C_3H_6O	1,36157	1,35344	26,00	7,64	25,42	7,47
» isobutilica	C_4H_8O	1,37094	1,36258	33,64	7,96	32,89	7,77
Valeralo	$C_5H_{10}O$	1,38614	1,37749	41,60	6.7,61	40,66	2.7,46
Enantolo.	$C_7H_{14}O$	1,42339	1,41426	56,82		55,59	
				Media	7,67	Media	7,48
Acido formico	CH_2O_2	1,36927	1,36062	13,94	7,21	13,61	7,08
» acetico	$C_2H_4O_2$	1,36985	1,36184	21,15	7,47	20,69	7,32
» propionico	$C_3H_6O_2$	1,38460	1,37643	28,62	7,66	28,01	7,49
» butilico	$C_4H_8O_2$	1,39554	1,38704	36,28	7,84	35,50	7,66
» isovalerianico	$C_5H_{10}O_2$	1,40220	1,39344	44,12	7,58	43,16	7,40
» isocapronico	$C_6H_{12}O_2$	1,41164	1,40264	51,70	7,80	50,56	7,63
» enantico	$C_7H_{14}O_2$	1,41923	1,41005	59,50		58,19	
				Media	7,59	Media	7,43

Valore dell' ossigeno alcoolico

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	μ_α	A	$P\frac{\mu_\alpha - 1}{d}$	Diff.ª	$P\frac{A-1}{d}$	Diff.ª
Acido acetico	$C_2H_4\,O''O'$	1,36985	1,36184	21,15	2,54	20,69	2,31
Aldeide.	$C_2H_4\,O''$	1,32975	1,32229	18,61		18,18	
Acido propionico	$C_3H_6\,O''O'$	1,38460	1,37643	28,62	2,62	28,01	2,59
Aldeide propionica	$C_3H_6\,O''$	1,36157	1,35344	26,00		25,42	
Acido butilico norm.	$C_4H_8\,O''O'$	1,39578	1,38713	36,33	2,65	35,54	2,61
Aldeide butilica norm. . . .	$C_4H_8\,O''$	1,38222	1,37368	33,68		32,93	
Acido isobutilico	$C_4H_8\,O''O'$	1,39093	1,38259	36,25	2,61	35,48	2,59
Aldeide isobutilica	$C_4H_8\,O''$	1,37094	1,36258	33,64		32,89	
Acido valerianico	$C_5H_{10}O''O'$	1,40220	1,39344	44,12	2,52	43,16	2,50
Valeralo	$C_5H_{10}O''$	1,38614	1,37749	41,60		40,66	
Acido enantico	$C_7H_{14}O''O'$	1,41923	1,41005	59,50	2,68	58,19	2,60
Enantolo.	$C_7H_{14}O''$	1,42339	1,41426	56,82		55,59	
Alcool etilenico.	$C_2H_6\,O'_2$	1,42530	1,41651	23,82	3,09	23,32	3,01
Alcool etilico	$C_2H_6\,O'$	1,36054	1,35322	20,73		20,31	
				Media	2,67	Media	2,60

Valore del doppio legame

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	μ_α	A	$p\frac{\mu_\alpha - 1}{d}$	R_α calcolato	Diff.ª	$p\frac{A-1}{d}$	R_A calcolato	Diff.ª
Sostanze con un doppio legame									
Alcool allilico . . .	$C_3\,H_6\,O$	1,41051	1,39881	27,9	25,8	2,1	27,1	25,2	1,9
Acroleina.	$C_3\,H_4\,O$	1,39620	1,38010	26,4	23,2	3,1	25,3	22,6	2,7
Etere alliletilico. .	$C_5\,H_{10}O$	1,38565	1,37547	43,4	41,0	2,4	42,2	40,1	2,1
Acetato allilico . .	$C_5\,H_8\,O_2$	1,40205	1,39151	43,3	41,4	1,9	42,2	40,4	1,8
Cloruro d'allile . .	$C_3\,H_5\,Cl$	1,41245	1,40007	33,6	31,3	2,3	32,6	30,6	2,0
Acido metacrilico .	$C_4\,H_6\,O_2$	1,42815	1,41400	36,3	33,8	2,5	35,1	33,0	2,1
Amilene	$C_5\,H_{10}$	1,37330	1,36352	40,4	38,0	2,4	39,3	37,2	2,1
					Media	2,4		Media	2,1
Sostanze con due doppî legami									
Valerilene	$C_5\,H_8$	1,39763	1,38565	39,9	35,4	4,5	38,7	34,6	4,1
Diallile.	$C_6\,H_{10}$	1,39182	1,38589	47,5	43,0	4,5	46,0	42,1	3,9
					Media	4,5		Media	4,0

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	μ_α	A	$P\frac{\mu_\alpha-1}{d}$	R_α calcolato	Diff.ª	$P\frac{A-1}{d}$	R_A calcolato	Diff.ª
Sostanze con tre doppî legami									
Benzolo.	$C_6 H_6$	1,49668	1,47562	44,0	37,8	6,2	42,2	36,9	5,3
Clorobenzolo	$C_6 H_5 Cl$	1,51986	1,49837	52,9	46,3	6,6	50,7	45,1	5,6
Bromobenzolo . . .	$C_6 H_5 B_7$	1,55439	1,53015	58,4	51,8	6,6	55,8	50,4	5,4
Anilina	$C_6 H_7 N$	1,57948	1,54741	52,8	44,9	7,9	49,8	43,5	6,3
Nitrobenzolo. . . .	$C_6 H_5 NO_2$	1,54593	1,51523	55,8	48,3	7,5	52,6	46,8	5,8
Toluolo	$C_7 H_8$	1,49111	1,47101	52,2	45,4	6,8	50,1	44,3	5,8
o. Toluidina	$C_7 H_9 N$	1,56650	1,53715	60,7	52,5	8,2	57,6	51,0	6,6
Alcool benzilico . .	$C_7 H_8 O$	1,53474	1,51330	55,4	48,4	7,0	53,2	47,2	6,0
Mesitilene	$C_9 H_{12}$	1,48701	1,46892	68,3	60,6	7,7	65,8	59,2	6,6
Alcool fenilpropilico	$C_9 H_{12} O$	1,53101	1,50980	71,7	63,6	8,1	68,8	62,1	6,7
Etere dell'acido idro-cinnamico . . .	$C_{11}H_{14}O_2$	1,49150	1,47497	86,2	79,2	7,0	83,3	77,3	6,0
					Media	7,2		Media	6,0

Da questi esempî è facile vedere che, almeno qui, non vi è davvero un gran vantaggio ad adoprare la costante A in luogo di n_α. In altri casi vedremo che un vantaggio vi è. L'esempio migliore che si può portare credo che sia quello degli eteri metilico ed etilico dei due acidi isomeri citraconico e mesaconico. Le osservazioni furono eseguite da Gladstone e i calcoli da Brühl. Nella seguente tavola sono riuniti tutti i dati che c'interessano, cioè i valori di A e B della formula di Cauchy e le rifrazioni molecolari sia rispetto alla costante A, che alle righe A, D e H.

Nome delle sostanze

NOME DELLE SOSTANZE	Temperature	d	A	B	$P\frac{A-1}{d}$	Diff.	$P\frac{n_M-1}{d}$	Diff.	$P\frac{n_D-1}{d}$	Diff.	$P\frac{n_H-1}{d}$	Diff.
Etere metilico dell'acido citraconico	15,5	1,1164	1,4339	0,5985	61,41	0,02	62,87	0,23	63,75	0,36	66,82	0,80
Etere metilico dell'acido mesaconico	16,0	1,1248	1,4373	0,6886	61,43		63,10		64,11		67,62	
Etere etilico dell'acido citraconico . . .	16,5	1,0480	1,4300	0,5620	76,32	0,28	78,04	0,49	79,14	0,56	82,69	1,05
Etere etilico dell'acido mesaconico . .	16,0	1,0500	1,4324	0,6304	76,60		87,53		79,70		83,74	

Si vede chiaramente come, adottando la costante A, gli eteri isomeri hanno la stessa rifrazione molecolare, mentre per la riga H le differenze giungono anche ad una unità. Si vede pure dai valori di B che i due isomeri non hanno la stessa dispersione.

Saranno tali esempî sufficienti perchè si debba adottare sempre tale costante? io credo di no. O si tratta di sostanze che hanno la stessa dispersione, o che pure

l'hanno diversa. Nel primo caso non vi è alcun vantaggio. Prendiamo infatti l'esempio più semplice, che siasi cioè stabilita l'eguaglianza delle rifrazioni molecolari per un dato raggio tra due composti isomeri; essendo eguali i pesi molecolari, dovremmo avere eguali anche i poteri rifrangenti, si avrà cioè:

$$\frac{n-1}{d}=\frac{n_1-1}{d_1}$$

ed anche:

$$\frac{A+\frac{B}{\lambda^2}-1}{d}=\frac{A'+\frac{B'}{\lambda^2}-1}{d_1}$$

od anche:

$$\frac{A-1}{d}+\frac{B}{d\lambda^2}=\frac{A'-1}{d_1}+\frac{B'}{d'\lambda^2}.$$

E poichè le due sostanze hanno per ipotesi la stessa dispersione, e $\frac{B}{d}$ e $\frac{B'}{d_1}$ sono quindi eguali, evidentemente anche $\frac{A-1}{d_1}$ e $\frac{A'-1}{d_1}$ saranno eguali nè più nè meno di quello che si aveva adoperando un indice qualunque. Analoga dimostrazione potrebbe farsi quando si fosse trovata una differenza costante fra tre o più corpi aventi uguale dispersione, prendendo come base del calcolo un indice di rifrazione qualunque: troveremmo una differenza costante anche per gli altri indici, ed anche per la costante A, solo i valori assoluti di queste differenze cambierebbero. Nel caso poi di sostanze non aventi un'identica dispersione, ci può essere talora un vantaggio, seppure vuolsi considerare come tale, adottando la costante A invece degl'indici di rifrazione. Ma ciò sembrami non dimostrar niente e non implicare menomamente l'esistenza reale del valore A o di un valore analogo; è il processo stesso di calcolo che conduce a questo risultato, e basta che la formula di dispersione sia assai esatta per rappresentare i fenomeni almeno nella parte dello spettro considerata. Supponiamo anche qui il caso di due isomeri i cui indici sieno n e n_1 e le densità d e d_1: se si ha:

$$\frac{n-1}{d}>\frac{n_1-1}{d_1} \quad \text{potremo porre} \quad \frac{n-1}{d}-\frac{n_1-1}{d_1}=a.$$

E poichè:

$$\frac{n-1}{d}=\frac{A-1}{d}+\frac{B}{\lambda^2 d}$$

e

$$\frac{n_1-1}{d_1}=\frac{A_1-1}{d_1}+\frac{B_1}{\lambda^2 d_1}$$

avremo anche:

$$\frac{n-1}{d}-\frac{n_1-1}{d_1}=\frac{A-1}{d}-\frac{A_1-1}{d_1}+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{B}{d}-\frac{B'_1}{d_1}\right)$$

oppure:

$$\frac{A-1}{d}-\frac{A_1-1}{d_1}=a-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{B}{d}-\frac{B_1}{d_1}\right)$$

vale a dire che la differenza dei poteri rifrangenti specifici e molecolari rispetto alla costante A è minore di quella rispetto all'indice n, essendo positiva la differenza che moltiplica $\frac{1}{\lambda^2}$, poichè quasi sempre accade che di due isomeri ha la maggiore dispersione quello che ha il maggiore potere rifrangente specifico. E tenendo conto del fatto che per due isomeri i valori di $\frac{B}{d}$ sono poco differenti tra loro, si vede anche che la diminuzione vi sarà, ma non sarà eccessiva. Se però si trattasse di sostanze i cui poteri dispersivi sono molto distanti, potrà anche accadere che la differenza si faccia tanto grande da invertire la relazione, cioè se il composto M aveva un potere rifrangente maggiore dell'isomero M' per la riga H_α ad esempio, per la costante A potrà essere il contrario. Ciò di rado si verifica, perchè in tutti gli studî fatti fin qui, si sono sempre comparati i composti della stessa serie; ma se la comparazione si volesse effettuare ad esempio tra composti della serie grassa e quelli della serie aromatica, bene spesso dovremmo notare tali invertimenti. L'aldeide benzoica $C_7 H_6 O$ e l'acetalo $C_6 H_{14} O_2$ hanno poteri rifrangenti molecolari di poco differenti per la riga H_α: per la prima abbiamo 54,65, per l'altro un numero un po' minore 53,93. Per la costante A le relazioni sono completamente invertite: per l'aldeide benzoica abbiamo 51,65 e per l'acetalo invece 52,82. Altri esempî potrebbero portarsi, comparando composti della serie aromatica e grassa.

Ora dovremmo dire che questa relazione sia più vera dell'altra? io non lo credo. E che questa concordanza maggiore non implichi nulla, lo proverebbe un fatto assai semplice.

È noto che nel potere dispersivo rotatorio, la rotazione per diversi colori è rappresentata dalla formula:

$$\alpha = \frac{A}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^4} + \dots$$

dove per λ infinito la rotazione sparisce.

Questa formula è stata dedotta teoricamente, e le esperienze di Soret e Sarasin, di Boltzmann e le mie hanno dimostrato corrispondere bene ai fatti. Ultimamente ne propose un'altra Lommel, ed anche in questa la rotazione sparisce per λ infinito. Però è ben vero che una formula analoga a quella di Cauchy:

$$\alpha = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$$

gia adottata da v. Lang, se non soddisfa bene per una larga estensione dello spettro, soddisfa però abbastanza per un piccolo tratto, specialmente per sostanze dotate di non grande potere dispersivo.

Or bene, comparando i valori di A invece che di α è certo che in molti casi si avrebbe una maggiore regolarità.

Supponiamo che il composto M abbia un potere rotatorio molecolare un po' diverso, un po' più grande dell' isomero M' e supponiamo anche che esso abbia una dispersione un po' maggiore. In questo caso spesso accadrà che il valore A soddisfi meglio, cioè i due isomeri avranno per esso poteri rotatorî molecolari più concordanti,

quantunque tale valore A non abbia significato fisico alcuno e la formula da cui si deduce non valga che per una porzione limitatissima dello spettro.

Del resto poi in alcuni casi si ha una concordanza maggiore adoprando gl'indici di rifrazione tali quali, anzichè la costante A.

Ma contro l'adozione di tali costanti, vi è io credo, un'altra potente ragione di ordine pratico; e precisamente la loro poca esattezza, e la variabilità loro col variare degli elementi che si adoprano per il calcolo. Si fanno ordinariamente esperienze per un tratto piccolissimo dello spettro, da $H\alpha$ a $H\gamma$, ossia in lunghezze d'onda espresse in milionesimi di millimetro, da 656,7 a 434,3 mentre, come è noto, lo spettro si estende da 1444 a 185,22. Al più qualche volta si esperimenta da A ad H. Or bene, anche in tali limiti ristretti, prendendo due righe piuttosto che due altre per base del calcolo, si hanno, anche per sostanze dotate di mediocre dispersione, differenze molto forti nei valori di A. Differenze tanto forti, che adottando uno piuttosto che l'altro valore, si possono fare entrare a piacere in certe categorie alcuni corpi e farne uscire degli altri, ammettere o negare l'esistenza di un ossigeno alcoolico o aldeidico, o di un doppio legame. È certo molto arbitraria una così lunga estrapolazione. Alcuni esempî serviranno a chiarire ciò.

Prenderemo delle esperienze eseguite in un tratto assai esteso dello spettro, dalle riga A alla riga H. Abbiamo:

Benzolo. — T = 15° (Esperienze di Kundt)

Valore di A	Indici dai quali si dedusse il valore di A
1,4759	n_A e n_D
1,4746	n_A e n_H
1,4750	n_C e n_F
1,4742	n_D e n_F
1,4715	n_F e n_H

Si ha tra i valori di A una differenza massima di 0,0044.

Acqua. — T 30,2 (Esperienze di v. d. Willigen)

Da n_A e n_H si ricava il valore 1,3224 per A, mentre da n_C e n_F il valore 1,3229. La differenza è 0,0005, che non è tanto piccola se si considera la poca dispersione dell'acqua.

Acido metilsalicilico — T 19,6 (Esperienze di Wernicke)

Da n_A e n_H si ha il valore 1,5014, da n_C e n_F 1,5032 e da n_F e n_H 1,4866. Differenza massima 0,0148. Adottando il 1° valore la rifrazione molecolare sarebbe 64,57, adottando il 3° 62,67. Differenza 1,90, ossia il valore di un doppio legame.

Anilina. — T = 21,5. (Gladstone e Dale).

Valore di A	
1,5400	da n_A e n_H
1,5397	da n_D e n_F
1,5449	da n_A e n_D
1,5261	da n_F e n_H

La differenza massima, cioè quella tra i due ultimi valori è 0,0188. Tra le rifrazioni molecolari si avrebbe una differenza di 1,70 (49,58 — 47,88).

Ora non è a dirsi che a tale difficoltà si ovvia facendo sempre il calcolo nello stesso modo perchè non abbiamo davvero dati per credere di essere nel giusto, sottoponendo allo stesso calcolo sostanze diverse. Riepilogando mi sembra doversi concludere che per ora non possiamo dire che tali costanti abbiano un significato fisico ben netto e sono da riguardarsi come empiriche. Riguardandole come tali, non sappiamo quali scegliere. Ad ogni modo resta sommamente arbitrario da poche esperienze fatte in una parte limitata dello spettro, dedurre i valori che assumono gl'indici per λ infinito. Valori così ricavati non possono servire di base a paragoni, essendo forse privi di ogni significato, o in ogni modo non aventi relazioni eguali, per i diversi corpi, con quei limiti, supposto pure che esistessero. Finalmente poi mi sembra non vi sia vantaggio alcuno nell'adottare queste costanti. Per composti aventi la stessa dispersione o quasi, i risultati sono gli stessi; per quelli che l'hanno diversa vi è qualche volta maggiore concordanza, la quale però non implica nulla, potendo anzi essere la conseguenza del calcolo, e celare delle vere e proprie relazioni, essendo assai più ragionevole il credere che a differenze, sia pure piccole, di struttura, corrispondano differenze piccole di potere rifrangente, anzichè supporre che questo non se ne risenta affatto.

Veniamo ora al così detto potere rifrangente specifico, o rifrazione specifica, cioè a quelle relazioni fra gl'indici e le densità indipendenti dalla temperatura. Tra queste, le più adottate, e quelle che meglio soddisfano alla esperienza, sono le due seguenti:

$$\frac{n-1}{d} \quad \text{e} \quad \frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}.$$

Della prima si servirono Landolt, Gladstone e Brühl e tutte le relazioni più interessanti furono trovate con questa formula, in base alla quale si calcolarono le rifrazioni atomiche degli elementi, e gli aumenti dovuti ai così detti doppi legami. I lavori di Wüllner dimostrarono che in limiti non molto estesi di temperatura l'espressione si manteneva presso a poco costante. Così ad esempio Bernheimer ed io, in limiti ancor più estesi che Wüllner, trovammo:

	T	$\frac{\mu_\alpha-1}{d}$	$\frac{A-1}{d}$
Bromonaftalina.	16,5°	0,4374	0,4103
	28,1°	0,4380	0,4108
	77,6°	0,4372	0,4100
Anetolo	14,9°	0,5605	0,5257
	21,6°	0,5602	0,5272
	34,4°	0,5604	0,5267
	77,3°	0,5585	0,5272

Tale formula fu dedotta empiricamente. Un significato teorico si cercò poi di darlo, vedendo che corrispondeva bene ai fatti. Essa enuncierebbe, secondo Mallard che un corpo materiale è formato di molecole rifrangenti immerse in un mezzo non rifrangente.

Nel 1880 dai due fisici Lorenz e Lorentz fu quasi contemporaneamente proposta l'altra espressione la quale e dagli autori stessi e da Prytz si mostrò corrispondere pienamente. Si notò poi che questa formula dava in generale resultati esatti come l'altra. In qualche caso anche meno esatti, come per esempio:

	T	$\frac{A^2-1}{(A^2+2)\,d}$	Differenza	$\frac{A-1}{d}$	Differenza
Fosforo solido .	29,2	0,2786	0,0028	0,5617	0
» liquido		0,2814		0,5617	
Fosforo solido .	34,7	0,2787	0,0030	0,5616	0
» liquido		0,2817		0,5616	
Fosforo solido .	37,5	0,2788	0,0030	0,5616	0,0001
» liquido		0,2818		0,5615	
Fosforo liquido	29,2	0,2814	0,0012	0,5617	0,0003
» »	53,5	0,2826		0,5614	

Ma in quei casi in cui l'altra dava resultati affatto inattendibili, questa invece corrispondeva, se non pienamente, certo assai meglio come lo mostra la seguente tabella.

Stato di aggregazione	Temperatura	$\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}$				$\frac{n-1}{d}$			
		n_{Li}	Differenza	n_{Na}	Differenza	n_{Li}	Differenza	n_{Na}	Differenza
				Acqua					
Liquido. . .	10°	—	—	0,2062	— 0,0001	—	—	0,3338	— 0,0002
»	20°	—	—	0,2061	+ . . . 7	—	—	0,3336	. 235
Vapore . . .	100°	—	—	0,2068		—	—	0,3101	
				Alcool etilico					
Liquido. . .	10°	0,2789	+ 0,0003	0,2804	+ 0,0003	0,4555	— 0,0001	0.1582	— 0,0001
»	20°	0,2792	+ . . 18	0,2807	+ . . 18	0,4554	— . 339	0,4581	— . 344
Vapore . . .	100°	0,2810		0,2825		0,4215		0,4237	
				Etere etilico					
Liquido. . .	10°	0,3010	+ . . . 2	0,3026	+ . . . 3	0,4905	— . . . 4	0,4935	— . . . 5
»	20°	0,3012	+ . . 42	0,3029	+ . . 39	0,4901	— . 323	0,4930	— . 331
Vapore . . .	100°	0,3054		0,3068		0,4578		0,4599	

Stato di aggregazione	Temperatura	$\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}$ n_{Li}	Differenza	n_{Na}	Differenza	$\frac{n-1}{d}$ n_{Li}	Differenza	n_{Na}	Differenza
				Acetato etilico					
Liquido. . .	10°	0,2533		0,2547		0,4148		0,4174	
»	20°	0,2536	+ . . . 3	0,2519	+ . . . 2	0,4147	— . . . 1	0,4172	— . . . 2
Vapore . . .	120°	0,2670	+ . 134	0,2683	+ . 131	0,4004	— . 143	0,4024	— . 148
				Joduro d' etile					
Liquido. . .	10°	0,1543		0,1557		0,2634		0,2663	
»	20°	0,1544	+ . . . 1	0,1558	+ . . . 1	0,2630	— . . . 4	0,2658	— . . . 5
Vapore . . .	100°	0,1558	+ . . 14	0,1571	+ . . 13	0,2336	— . 294	0,2356	— . 302
				Cloroformio					
Liquido. . .	10°	0,1780		0,1790		0,2979		0,3000	
»	20°	0,1780	. . . .	0,1791	+ . . . 1	0,2975	— . . . 4	0,2996	— . . . 7
Vapore . . .	100°	0,1787	+ . . . 7	0,1796	+ . . . 5	0,2681	— . 294	0,2694	— . 302
				Solfuro di carbonio					
Liquido. . .	10°	0,2766		0,2805		0,4889		0,4977	
»	20°	0,2769	+ . . . 3	0,2809	+ . . . 4	0,4883	— . . . 6	0,4970	— . . . 7
Vapore . . .	100°	0,2858	+ . . 89	0,2898	+ . . 89	0,4289	— . 594	0,4348	— . 622

E si notò anche, che mentre i valori $\frac{n-1}{d}$ diminuiscono col crescere della temperatura, quelli $\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}$ crescono invece. Era interessante vedere se, applicata questa formula allo studio comparativo delle sostanze organiche, dava risultati identici a quelli forniti dall' altra. Landolt eseguì i calcoli, e trovò che i resultati erano del tutto identici: che adoprando una formula o l' altra si giungeva sempre alle stesse conclusioni riguardo alla costituzione chimica. Peraltro io, nel mio lavoro sulla rifrazione atomica dello zolfo, a proposito di una sostanza gentilmente favoritami dal dott. Gabriel, l' etere tioortoformico, ebbi ad accorgermi che adoprando una formula e l'altra non giungeva agli stessi risultati, tantochè non pubblicai le osservazioni relative alla sostanza medesima. Nel lavoro poi eseguito dal dott. Bernheimer e da me c' incontrammo in diverse sostanze per le quali le due formule non danno i medesimi risultati, almeno quantitativamente, e dopo ho dovuto accorgermi esisterne anche altre per cui tale accordo non si verifica. Ma vediamo le cose più da vicino; vediamo cioè di stabilire a priori se le due formule daranno sempre gli stessi risultati, e in quali casi, seppure, li daranno diversi. Evidentemente le due formule sono legate tra loro dalla seguente relazione:

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}=\frac{n-1}{d}\cdot\frac{n+1}{n^2+2}.$$

Vediamo prima di tutto a quali condizioni debbano soddisfare gl' indici di rifrazione perchè, avendosi l' uguaglianza tra i poteri rifrangenti specifici di due sostanze in base alla formula n, essa sussista ancora in base alla formula n^2. Se si ha:

$$\frac{n-1}{d}=\frac{n_1-1}{d_1}$$

e si deve avere:

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}=\frac{n_1^2-1}{(n_1^2+2)d_1}$$

si potrà porre:

$$\frac{n-1}{d}\,\frac{n+1}{n^2+2}=\frac{n_1-1}{d_1}\,\frac{n_1+1}{n_1^2+2}$$

ossia:

$$\frac{n+1}{n^2+2}=\frac{n_1+1}{n_1^2+2}.$$

Ora risolvendo questa equazione di secondo grado rispetto a n_1 noi avremo per n_1 due radici, cioè $n_1=n$ e $n_1=\frac{2-n}{n+1}$. Vale a dire che la eguaglianza della formula n^2 si potrà avere quando, naturalmente avendosi già l'eguaglianza delle espressioni n, gl'indici sono eguali, ed eguali per conseguenza le densità, oppure quando $n_1=\frac{2-n}{n+1}$. Ora però, limitandoci al caso degli indici di rifrazione, in cui n varia da 1 a 2, per $n=1$ si avrebbe $n_1=\frac{1}{2}$ e per $n=2$ $n_1=0$. Per valori intermedî tra 1 e 2, chè in questi limiti oscillano gli indici di rifrazione della maggior parte delle sostanze, si avrebbe per n una quantità sempre frazionaria, il che non è. In altri termini è impossibile che si abbia eguaglianza tra le espressioni n^2 quando la si ha tra le espressioni n ammenochè le due sostanze non abbiano l'identico indice di rifrazione, e conseguentemente un' identica densità. Esaminiamo ora i valori $\frac{n+1}{n^2+2}$ e come variano al variare di n, supposto, per stare nel caso dell' indice di rifrazione, che n varii tra 1 e 2. Per $n=1$, $\frac{n+1}{n^2+2}=\frac{2}{3}$ e per $n=2$, $\frac{n+1}{n^2+2}=\frac{1}{2}$ ossia, variando gl'indici tra 1 e 2 i valori $\frac{n+1}{n^2+2}$ oscillano tra $\frac{2}{3}$ (0,666) e $\frac{1}{2}$ (0,5). E poichè gl'indici diminuiscono col crescere della temperatura, i valori dell' espressione $\frac{n+1}{n^2+2}$ cresceranno col crescere di essa. Ciò premesso vediamo se a priori si può stabilire come andranno le cose quando tutte le esperienze relative alla formula n si vogliono calcolare in base alla formula n^2 e prima di tutto esaminiamo le variazioni con la temperatura. Si ha in generale:

$$\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}=\frac{n-1}{d}\,\frac{n+1}{n^2+2}.$$

Ora è chiaro che, variando $\frac{n+1}{n^2+2}$ col variare della temperatura e con lo stato fisico del corpo, darà la formula n^2 risultati peggiori dell'altra, quando questa li dà assolutamente buoni. In quei casi infatti che con la formula n si hanno valori che non variano quasi con la temperatura, con la formula n^2 al contrario variano assai

come si è già visto per il fosforo liquido a diverse temperature e per quello solido paragonato al liquido. Le differenze saranno tanto più sensibili per le due formule, quanto più forti sono i cambiamenti degl'indici di rifrazione con la temperatura. In altri casi i risultati con la formula n^2 sono migliori. È noto che i valori $\frac{n-1}{d}$ in generale diminuiscono, mentre i valori $\frac{n^2+1}{(n^2+2)\,d}$ crescono col crescere della temperatura. Si viene così ad avere un compenso, che spesso è perfetto, cosicchè, mentre per la formula n si hanno risultati inattendibili, si hanno buoni con la formula n^2. Spesso anche l'influenza del termine $\frac{n+1}{n^2+2}$ è preponderante, e i valori di n^2 crescono con la temperatura. Questo anzi è il caso più generale. Quanto al risultato pratico per ora può dirsi che le due formule soddisfano egualmente bene tutt'e due, senzachè vi siano ragioni forti per dare la preferenza ad una piuttostochè ad un'altra. Veniamo ora alle conseguenze chimiche, e cerchiamo di stabilire se le due formule potranno sempre condurre a risultati identici. Come già dissi, Landolt trovò che sì, e ne dedusse che le relazioni già stabilite erano sicure, come appare dalle seguenti tabelle.

Valcre dell' incremento CH_2

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	$P\frac{\mu_\alpha^2-1}{(\mu_\alpha^2+2)\,d}$	Diff.ª	$P\frac{A^2-1}{(A^2+2)\,d}$	Diff.ª
I (*Alcool*)					
Alcool metilico.	$C H_4 O''$	8,16		8,01	
» etilico	$C_2 H_6 O$	12,71	4,55	12,47	4,46
» isopropilico . . .	$C_3 H_8 O$	17,28	4,57	16,97	4,50
» isobutilico. . . .	$C_4 H_{10} O$	21,96	4,68	21,55	4,58
» amilico	$C_5 H_{12} O$	26,59	4,63	26,09	4,54
		Media	4,61	Media	4,52
II (*Aldeidi*)					
Aldeide acetica.	$C_2 H_4 O$	11,50		11,27	
» propionica. . . .	$C_3 H_6 O$	15,93	4,43	15,61	4,34
» isobutilico . . .	$C_4 H_8 O$	20,56	4,63	20,15	4,54
Valeralo.	$C_5 H_{10} O$	25,31	4,75	24,80	4,65
Enantolo	$C_7 H_{14} O$	34,20	2.4,45	33,56	2.4,38
		Media	4,57	Media	4,48
III (*Acidi*)					
Acido formico	$C H_2 O_2$	8,52		8,34	
» acetico.	$C_2 H_4 O_2$	12,93	4,41	12,67	4,33
» propionico. . . .	$C_3 H_6 O_2$	17,42	4,49	17,09	4,42
» butilico	$C_4 H_8 O_2$	22,01	4,59	21,60	4,51
» isovalerianico . .	$C_5 H_{10} O_2$	26,72	4,71	26,21	4,61
» isocapronico. . .	$C_6 H_{12} O_2$	31,22	4,50	30,62	4,41
» enantico.	$C_7 H_{14} O_2$	35,85	4,63	35,17	4,55
		Media	4,56	Media	4,47

Valore dell' ossigeno aldeidico

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	$P\frac{\mu_\alpha^2-1}{(\mu_\alpha^2+2)d}$	Diff.ª	$P\frac{A^2-1}{(A^2+2)d}$	Diff.ª
Aldeide acetica.	C_2H_4O'' $(CH_2)_2$	11,50 9,12	2,38	11,27 8,94	2,33
Aldeide propionica. . .	C_3H_6O'' $(CH_2)_3$	15,93 13,68	2,25	15,61 13,41	2,21
Acetone	C_3H_6O'' $(CH_2)_3$	16,05 13,68	2,37	15,71 13,41	2,30
Aldeide butilica	C_4H_8O'' $(CH_2)_4$	20,52 18,24	2,28	20,11 17,88	2,23
Aldeide isobutilica . .	C_4H_8O'' $(CH_2)_4$	20,56 18,24	2,32	20,15 17,88	2,27
Valeralo.	$C_5H_{10}O''$ $(CH_2)_5$	25,31 22,80	2,51	24,80 22,35	2,45
Enantolo	$C_7H_{14}O$ $(CH_2)_7$	34,20 31,92	2,28	33,56 31,29	2.27
	Media	$O''_\alpha =$	2,34	$O''_A =$	2,29

Valore dell' ossigeno alcoolico

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	$P\frac{\mu_\alpha^2-1}{(\mu_\alpha^2+2)d}$	Diff.ª	$P\frac{A^2-1}{(A^2+2)d}$	Diff.ª
Acido acetico.	$C_2H_4O''O'$	12,93	1,43	12,67	1,40
Aldeide	C_2H_4O''	11,50		11,27	
Acido propionico. . . .	$C_3H_6O''O'$	17,42	1,49	17,09	1,48
Aldeide propionica. . .	C_3H_6O''	15,93		15,61	
Acido butilico normale	$C_4H_8O''O'$	22,05	1,53	21,61	1,50
Aldeide butilica »	C_4H_8O''	20,52		20,11	
Acido isobutilico. . . .	$C_4H_8O''O'$	22,03	1,47	21,61	1,46
Aldeide isobutilica. . .	C_4H_8O''	20,56		20,15	
Acido valerianico. . . .	$C_5H_{10}O''O'$	16,72	1,41	26,21	1,41
Valeralo.	$C_5H_{10}O''$	25,31		24,80	
Acido enantico	$C_7H_{14}O''O'$	35,85	1,65	35,17	1,61
Enantolo	$C_7H_{14}O''$	34,20		33,56	
Alcool etilenico	$C_2H_6O'_2$	14,33	1,62	14,07	1,60
Alcool etilico.	C_2H_6O'	12,71		12,47	
		Media	1,51	Media	1,49

Valore dell' idrogeno

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	$P\frac{\mu_\alpha^2-1}{(\mu_\alpha^2+2)\,d}$	Diff.ª	$P\frac{A^2-1}{(A^2+2)\,d}$	Diff.ª
Alcool metilico	$C\,H_4\,O'$ $C\,H_2\,O'$	8,16 6,14	2,02	8,01 6,03	1,98
» etilico	$C_2\,H_6\,O'$ $(C\,H_2)_2\,O'$	12,71 10,70	2,01	12,47 10,50	1,97
» propilico	$C_3\,H_8\,O'$ $(C\,H_2)_3\,O'$	17,28 15,26	2,02	16,97 14,97	2,00
» isobutilico . . .	$C_4\,H_8\,O'$ $(C\,H_2)_4\,O'$	21,96 19,82	2,14	21,55 19,44	2,11
» amilico	$C_5\,H_{10}O'$ $(C\,H_2)_5\,O'$	26,59 24,38	2,21	26,09 23,91	2,18
	Media	per H_2	2,08		2,01

Valore dei doppî legami. Sostanze con 1, 2, 3 *doppî legami*

NOME DELLE SOSTANZE	FORMULA	$P\frac{\mu_\alpha-1}{d}$	R'_α calcolato	Diff.ª	$P\frac{A-1}{d}$	R'_A calcolato	Diff.ª
Etere alliletilico . . .	$C_5\,H_{10}\,O'$	26,39	24,38	2,01	25,76	23,92	1,84
Acido metacrilico . . .	$C_4\,H_6\,O''\,O'$	21,80	20,08	1,72	21,17	19,70	1,47
Amilene	$C_5\,H_{10}$	24,64	24,80	1,84	24,06	22,35	1,71
Valerilene	$C_5\,H_8$	24,16	20,72	3,44	23,52	20,31	3,21
Diallile.	$C_6\,H_{10}$	28,77	25,28	3,49	27,99	24,78	3,21
Benzolo	$C_6\,H_6$	25,93	21,12	4,81	24,99	20,70	4,29
Fenolo	$C_6\,H_6\,O'$	27,75	22,70	5,05	26,72	22,27	4,45
Toluolo.	$C_7\,H_8$	30,79	25,68	5,11	29,71	25.17	4,54
Alcool benzilico	$C_7\,H_8\,O'$	32,23	27.26	4.97	31, 14	26,74	4,40
Aldeide benzoica . . .	$C_7\,H_6\,O''$	31,77	25,94	5,83	30,29	25,42	4,87
Aldeide salicilica . . .	$C_7\,H_6\,O''\,O'$	34,03	27,52	6,51	31,87	26,99	4,88
Acido metilsalicilico .	$C_8H_8O''O'_2$	39,80	33,66	6,14	37,98	33,03	4,95
Benzoato di metile . .	$C_8\,H_8\,O''\,O'$	37,55	32,08	5,47	36,17	31,46	4,71
Benzoato d'etile. . . .	$C_9\,H_{10}O''O'$	42,20	36,64	5,56	40,72	35.93	4,79
Mesitilene	$C_9\,H_{12}$	40,33	34,80	5,53	39,05	34,11	4,94
Alcool fenilpropilico .	$C_9\,H_{12}\,O'$	41,75	36,38	5,37	40.34	35,68	4,66
Idrocinnamato d' etile.	$C_{11}H_{14}O''O'$	50,85	45,76	5,09	49,39	44,87	4,52

Prendiamo il caso più semplice, quello dell'eguaglianza di potere rifrangente di due sostanze in base alla formula n. Per quello che abbiamo detto, l'eguaglianza

della formula n^2 non potrà aversi se non quando gl'indici di rifrazione di due composti sono eguali. Trovò Landolt che, ad esempio, per gli isomeri, l'uguaglianza si manteneva e ciò è naturale:

		n_α	A	R_α	R'_α	R_A	R'_A
Alcool butilico normale	$C_4H_{10}O$	1,3971	1,3889	36,28	22,01	35,45	21,66
» isobutilico . . .		1,3940	1,3858	36,16	21,96	35,41	21,55
Trimetilcarbinol		1,3857	1,3776	36,30	22,09	35,53	21,68
Etere etilico		1,3511	1,3437	36,31	22,31	35,53	21,89
Acido capronico. . . .	$C_6H_{12}O_2$	1,4116	1,4026	54,70	31,22	50,56	30,62
Valerianato metilico. .		1,3927	1,3842	51,80	31,46	50,67	30,85
Butinato etilico		1,3940	1,3858	51,40	31,20	50,33	30,63
Formiato amilico . . .		1,3959	1,3874	52,18	31,66	51,06	31,06

Gl'indici di rifrazione degl'isomeri differiscono così poco tra di loro, che i valori $\frac{n+1}{n^2+2}$ se ne risentono pochissimo ed in fondo si vengono a moltiplicare i due poteri rifrangenti specifici eguali per numeri pochissimo differenti tra loro. Ma se noi comparassimo sostanze che hanno indici di rifrazione molto diversi, cosa che sin qui non si è mai fatta, sarebbe impossibile che le due formule conducessero al medesimo risultato. Se per l' una si avesse eguaglianza, per l'altra si dovrebbero avere differenze più o meno forti, secondochè più o meno differiscono gl' indici di rifrazione o anche le costanti A supposto pure che queste fossero esattissime. In altri termini, se si comparano sostanze aventi indici di rifrazione disuguali, e molto disuguali, l'accordo tra le due formule deve necessariamente cessare. Un esempio chiarirà ciò. L'acetalo $C_6H_{14}O_2$ e il nitrobenzolo $C_6H_5NO_2$ hanno presso a poco la stessa rifrazione molecolare, rispetto alla costante A e alla formula n: si ha infatti:

$$\text{Acetalo} \quad A = 1{,}37217 \quad P\frac{A-1}{d} = 52{,}87$$

$$\text{Nitrobenzolo} \quad A = 1{,}51522 \quad P\frac{A-1}{d} = 52{,}64$$

I valori di A come si vede sono molto diversi. Per la formula n^2 abbiamo:

$$\text{Acetalo} \quad P\frac{A^2-1}{(A^2+2)\,d} = 32{,}27\,; \qquad \text{Nitrobenzolo} \quad P\frac{A^2-1}{(A^2+2)\,d} = 30{,}82$$

Come si vede le rifrazioni molecolari sono diventate assai diverse. Si ha anche:

$$\text{Aldeide benzoica } C_7H_6O \quad A = 1{,}50940 \quad P\frac{A-1}{d} = 51{,}65 \quad P\frac{A^2-1}{(A^2+2)\,d} = 30{,}29$$

$$\text{Etere acetacetico } C_6H_{10}O_4 \quad A = 1{,}40725 \quad P\frac{A-1}{d} = 51{,}62 \quad P\frac{A^2-1}{(A^2+2)\,d} = 31{,}22$$

E molti altri esempî analoghi potrebbero addursi. Passiamo oltre: ai valori degl'incrementi CH_2. Come sono dedotti questi incrementi? Dal confronto di termini omologhi di una medesima serie. Ora le variazioni degl' indici di rifrazione per i termini omologhi di una medesima serie, sono assai piccoli. Ad esempio gl'indici degli alcool omologhi della serie grassa, variano da 1,3279 a 1,4057. Quelli degli acidi da 1,3693 a 1,4192. In altri termini i valori di $\frac{n+1}{n^2+2}$ variano, per gli

alcool da 0,6186 a 0,6053 per gli acidi da 0,6113 a 0,6026 e analoghe variazioni si riscontrano tra le aldeidi e gli eteri omologhi. Quand' anche prendessimo il valore medio della differenza CH_2 in base alla formula n, e lo moltiplicassimo per i limiti estremi tra cui oscillano i valori $\frac{n+1}{n^2+2}$ avremmo dei numeri che oscillano tra 4,40 e 4,80 come infatti realmente accade. Lo stesso è a dirsi per i valori degli ossigeni alcoolici dedotti dal confronto degli acidi colle rispettive aldeidi. In generale si può anzi dire che per passare da un valore della formula n al corrispondente della formula n_2 lo si deve moltiplicare pel valore medio di $\frac{n+1}{n^2+2}$. Così ad esempio

	$P\frac{\mu_\alpha-1}{d}$	$P\frac{\mu^2_\alpha-1}{(\mu^2_\alpha+2)\,d}$	Coeff.te
Alcool propilico . . .	28,60	17,42	0,6071
Esano.	48,63	29,70	0,6107
Acetato d'allile. . . .	43,34	26,26	0,6059
Benzolo.	44,03	25,93	0,5889
Benzoato d'etile . . .	71,76	42,20	0,5880

Per i composti del benzolo il coefficiente è un po' minore: per gli altri tutti però oscilla tra 0,59 e 0,62.

Però per l'ossigeno aldeidico non è il valore n_2 uguale a quello n moltiplicato per quel valore medio. Abbiamo infatti i seguenti valori per le rifrazioni atomiche di O″:

r_α 3,40 $\quad r'_\alpha$ 2,34

r_A 3,29 $\quad r'_A$ 2,29

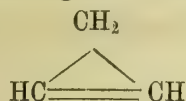
Vale a dire:

$$r'_\alpha = r_\alpha \times 0,6882$$

$$r'_A = r_A \times 0,6960$$

mentre abbiamo visto che i cofficienti per passare da una rifrazione molecolare trovata alla corrispondente oscillano tra 0,5 e 0,666. La ragione di questo fatto si trova in ciò, che per dedurre i valori dell'ossigeno aldeidico si sono comparate le aldeidi coi valori calcolati di CH_2: da un' aldeide $C_nH_{2n}O$ si è sottratto C_nH_{2n}: ora tra i coefficienti per le aldeidi e quelli per gli incrementi CH_2 vi è una differenza che va facendosi sempre più piccola di mano in mano che vi sale nella serie: la differenza però è sempre nello stesso senso, cioè i cofficienti per le aldeidi sono sempre maggiori che quelli per i valori CH_2. Infatti per questi valori i coefficienti sono 0,6 0,6008: per le aldeidi varia da 0,618 (aldeide acetica) a 0,6019 (enantolo). Su questo ritornerò a proposito dei doppi legami. Da tutto questo emerge che si poteva prevedere in gran parte che con la nuova formula si avrebbero avuti risultati concordi coll'antica in molti casi, giacchè appunto per dedurre i valori delle rifrazioni degli atomi o dei gruppi di atomi si confrontano sostanze aventi valori di n e di A poco differenti; quindi le differenze costanti si moltiplicano press'a poco per numeri eguali. Si poteva però prevedere che non sempre le due formule potevano dare risultati eguali, e già lo abbiamo dimostrato nel caso dell' uguaglianza e analogamente si dimostrerebbe per gl' incrementi CH_2 ecc. Che le due formule non conducano sempre ai medesimi risultati molti esempî lo provano.

È noto che Brühl nei suoi lavori aveva trovato che per i composti propargilici cioè l'alcool propargilico, l'etere etilpropargilico, e l'acetato propargilico, contenenti tutti un legame acetilenico, si aveva un aumento di rifrazione molecolare minore che per i composti aventi un legame etilenico. E, poichè si aveva come fatto costante che, aumentandosi i legami tra carbonio e carbonio, si aumentava la rifrazione molecolare, questo parve a Brühl un fatto stranissimo, e anzi fu indotto a proporre che si cambiasse la formula di struttura dei derivati propargilici ed ammise per l'idrocarburo fondamentale, ossia per l'allilene, la seguente costituzione:

```
      CH2
     /   \
HC═══════CH
```

Si aveva infatti che la rifrazione molecolare di questi composti eccedeva in media la normale di 1,9 per l'indice n e di 1,8 per la costante A mentre l'aumento dovuto a un doppio legame è 2,4 e rispettivamente 2. Bene altrimenti vanno le cose quando si comparano i resultati relativi alla formula n^2. Allora i composti propargilici rientrerebbero nella regola di Brühl, giacchè la loro rifrazione molecolare eccede la normale di una quantità intermedia fra l'aumento dovuto a uno e quello dovuto a due doppî legami. Si ha infatti:

		$P\frac{A-1}{d}$	Rif.e mol.e calc.a	Diff.a
Alcool propargilico	C_3H_4O	24,0	22,6	1,4
Etere etilpropargilico	C_5H_8O	39,5	37,5	2,0
Acetato propargilico	$C_5H_6O_2$	39,7	37,8	1,9
			Media	1,8

mentre l'aumento dovuto a un doppio legame è 2. Per l'altra formula si ha:

		$P\frac{A^2-1}{(A^2+2)d}$	Rif.e mol.e calc.a	Diff.a
Alcool propargilico	C_3H_4O	14,47	12,93	1,54
Etere etilpropargilico	C_5H_8O	23,99	21,87	2,12
Acetato propargilico	$C_5H_6O_2$	24,02	22,12	1,90
			Media	1,85

E poichè l'aumento dovuto a un doppio legame per la formula n^2 è 1,59 ne segue un disaccordo notevole tra le due formule. Altre eccezioni furono poi trovate da Bernheimer e da me, eccezioni che per verità si potevano prevedere. Tali eccezioni sono relative al fatto che ad una data differenza tra i valori trovati e i calcolati, in base alla formula n, per i derivati della naftalina, l'anetolo ecc. corrisponde, per la formula n^2, un numero che ha col primo un rapporto ben diverso che nelle altre serie non sature, come l'etilenica e l'aromatica. Per passare in generale da una rifrazione molecolare calcolata (n) alla corrispondente (n^2) il coefficiente è presso a poco costante: varia di poco per le diverse formule e oscilla in limiti vicinissimi a 0,6.

Per passare invece da una rifrazione molecolare trovata (n) alla corrispondente (n^2) i coefficienti variano un poco più: tra 0,6186 (alcool metilico) e 0,561 (bromonaftalina). C'è poi nella serie etilenica e aromatica una certa differenza quasi costante tra i coefficienti che servono per passare da una rifrazione trovata (n) alla corrispondente (n^2) e quelli analoghi per le rifrazioni calcolate. In altri termini si ha:

$$a - b = m \quad \text{(Formula } n\text{)}$$

e quando si passa alla formula n^2:

$$(\lambda - x)\,a - \lambda b = \lambda_1 m$$

od anche:

$$\lambda (a - b) - ax = \lambda_1 m = \lambda m - ax.$$

In un altro caso si avrà:

$$c - d = m$$

e

$$\lambda_2 m = \lambda m - cx$$

ora se x si conserva uguale e d differisce poco da a, come spesso accade, si comprende come i diversi valori $\lambda_1 m, \lambda_2 m$ differiranno poco tra di loro e su per giù sussisteranno per la formula n^2 le stesse regolarità trovate per la formula n. Ciò si verifica per le differenze tra le rifrazioni molecolari trovate e le calcolate per la serie etilenica e aromatica, in media $x = 0,03$: i valori di a, c ecc. ecc., non differiscono molto tra di loro e ad una differenza m (formula n) corrisponde una differenza m_1 costantemente, bene inteso dentro i limiti in cui da Brühl si è ammesso che tali differenze potessero variare. Alla equazione $a - b = m$ tutti i casi possono ridursi basta dividere tutta l'equazione per il più grande multiplo di 2,4 (H_α) o di 2 (A) contenuto in m. Ciò premesso se a invece di avere per coefficiente $\lambda - x$ ha per coefficiente $\lambda - y$, allora si avrà:

$$\lambda_2 m = \lambda m - ay$$

e $\lambda_2 m$ non potrà essere uguale a $\lambda_1 m$ e ne differirà tanto più quanto più y differirà da x e anche poi a seconda dei valori di a.

Ora mentre x non giunge a 0,03, y invece è presso a poco uguale a 0,04. Si aggiunga inoltre il peso molecolare elevato dei composti della naftalina che fa crescere il fattore a e ci si persuaderà facilmente che, se per le altre serie a una differenza m corrispondeva una certa differenza $\lambda_1 m$, per i derivati della naftalina, anetolo ecc., deve necessariamente corrispondere un numero minore, nè potrebbe essere altrimenti. Nella qui annessa tavola riporto i dati più interessanti relativi al disaccordo delle due formule:

NOME DELLE SOSTANZE	$P\frac{\mu_\alpha - 1}{d}$	R_α calcolata	Diff.ª	$P\frac{\mu_\alpha^2 - 1}{(\mu_\alpha^2 + 2)\,d}$	R'_α calcolata	Diff.ª
Dimetilnaftalina	93,11	87,60	5,51	52,96	51,14	1,82
α Naftolo.	80,45	75,20	5,25	45,69	43,60	2,09
Propil α naftolo. . . .	104,22	98,00	6,22	59,06	55,20	3,86
Bromonaftalina.	90,54	86,43	4,11	50,78	49,98	0,80
Alcool cinnamico . . .	73,83	70,40	3,43	42,45	41,42	1,03
Anetolo	82,95	78,00	4,95	47,97	45,98	1,99

Nè diversamente vanno le cose per la costante A

NOME DELLE SOSTANZE	$P\frac{A-1}{d}$	R_A calcolata	Diff.ª	$P\frac{A^2-1}{(A^2+2)d}$	R'_A calcolata	Diff.ª
Dimetilnaftalina. . . .	87,56	83,80	3,76	50,37	49,35	1,09
α Naftolo.	75,25	71,62	3,63	43,29	41,97	1,32
Propil α naftolo	98,15	93,95	4,20	56,82	55,38	1,44
Bromonaftalina.	84,93	82,38	2,53	48,25	48,12	0,13
Alcool cinnamico . . .	69,65	67,35	2,30	40,47	39,99	0,48
Anetolo	77,80	74,79	3,01	45,46	44,46	1,00

I dati raccolti in questa tavola ci mostrano come le due formule non conducano agli stessi resultati. Per la serie dell'etilene si aveva, che a una differenza di 2,4 ($H\alpha$) e di 2,1 (A) fra le rifrazioni molecolari trovate e le calcolate corrispondevano differenze di 1,79 e di 1,60 per la formula n^2. Per la stessa serie per composti con due doppî legami si avevano le differenze 4,5 e 4 e rispettivamente 3,47 e 3,21. Per la serie del benzolo poi per le differenze 7,2 e 6 a cui corrispondevano le altre 5,45 e 4,67. È facile il vedere che il rapporto tra l'eccesso del valore trovato sul calcolato per la formula n alla quantità corrispondente alla formula n^2 è lo stesso per tutt'e tre le serie e precisamente è 1,32 per la riga $H\alpha$ e 1,29 per la costante A. Per i derivati della naftalina e per l'anetolo ad esempio, e per l'alcool cinnamico, il rapporto è circa 1,8 per la riga $H\alpha$ e 1,5 per la costante A. E anche per il timolo che pure appartiene alla serie del benzolo con catene laterali sature, i due rapporti sono 1,43 e 1,37. Da tutto questo appare evidentemente come diversi siano i resultati a cui conducono le due formule; e se noi volessimo stare alle leggi di Brühl ben diverse sarebbero le deduzioni riguardo alla costituzione chimica. Infatti se fosse vero che i doppî legami, e soltanto i doppî legami fanno aumentare la rifrazione molecolare, noi saremmo costretti ad ammettere, in base alla formula n, che nei derivati della naftalina ve ne sono contenuti sette o in qualche caso sei, e cinque nell'alcool cinnamico e per lo meno cinque nell'anetolo. Al contrario la formula n^2 ci direbbe che in alcuni derivati della naftalina vi sono soli sei doppî legami, in altri soltanto cinque, come nella bromonaftalina, e per l'anetolo e l'alcool cinnamico la rifrazione confermerebbe quasi la costituzione generalmente ammessa. Dovremmo per ciò dire che si debba dare la preferenza alla formula n^2? A me non sembra, giacchè mi pare di aver dimostrato che il dare le due formule resultati concordanti è un puro caso che si verifica solo quando si comparano sostanze aventi indici di rifrazione, o costanti A presso a poco uguali. Dire che non sono bene stabilite alcune relazioni quando le due formule non danno resultati concordanti, è lo stesso che voler limitare i confronti soltanto fra composti aventi indici uguali o, trattandosi di serie, indici che differiscono tra loro di quantità uguali.

Certamente il fatto che le due espressioni:

$$\frac{n-1}{d} \quad \text{e} \quad \frac{n^2-1}{(n^2+2)d}$$

non sempre conducono agli stessi resultati è assai grave e fa nascere dei forti dubbî

sulla reale esistenza di alcune relazioni trovate. Se a questo si aggiunge che non si possono determinare con esattezza per le diverse sostanze dei valori indipendenti dalle lunghezze d'onda dei raggi che si rifrangono, si vedrà che siamo quasi costretti a limitarci ai paragoni di composti aventi dispersione eguale. E se si pensa poi alle diverse conclusioni riguardo alla costituzione chimica a cui si giunge prendendo una piuttostochè un'altra formula pel potere rinfrangente specifico, formule del resto che fisicamente sono assai soddisfacenti, mi sembra doversi concludere come già conclusi in altra Memoria, insieme col dott. Bernheimer, che bisogna andar molto cauti in tali ricerche e soprattutto dare a questi studî una direzione più qualitativa che quantitativa. Cercare quale influenza esercitino sulla rifrazione molecolare le variazioni di composizione della molecola o di funzione chimica degli atomi che la compongono, cercare sino a qual punto gli atomi e i gruppi componenti la molecola conservino una certa rifrazione è certo utilissimo, ed i classici lavori di Landolt fatti in questa direzione resteranno sempre come un modello in tal genere, giacchè Egli non concluse mai al di là di quello che l'esperienza suggeriva, e confrontò sempre sostanze confrontabili. Ma quando, partendo dal preconcetto che ad una data mutazione nella composizione chimica corrisponda sempre in qualunque serie e per qualsivoglia termine di ogni serie, una certa variazione fissa nella rifrazione e, per trovare le relazioni, si confrontano composti non confrontabili, l'indirizzo mi sembra sbagliato. Teoricamente, perchè assai probabile, e tutte le osservazioni lo mostrano, che in sostanze molto diverse, variazioni anche analoghe producono effetti diversi: praticamente poi perchè le costanti di cui ci serviamo per i calcoli non son tali, come si crede da alcuni, da permettere i confronti fra composti non aventi uguale dispersione, sia anche perchè altre di queste costanti conducono a resultati diversi, senzachè sappiamo per ora quale si debba adottare.

BIBLIOGRAFIA

Landolt, Pogg. Ann. CXVII, 353 (1862). CXXII, 545 (1864). — Liebig's Annalen CCXIII, 75 (1882).

Brühl, Liebig's Annalen CC, 139 (1880). CCIII, 1 (1880). — Berl. Ber. XIV, 2735 (1881).

Nasini e Bernheimer, Atti della r. Accademia dei Lincei. Anno 1884.

Landolt und Börnstein-Physickalisch-Chemische Tabellen.

Lommel, Wiedemann's Annalen 1883.

Wüllner, Wiedemann's Annalen XVII, 580 (1882).

Ketteler, Wiedemann's Annalen XII, 362 (1881).

Lommel, Wiedemann's Annalen III, 251 (1878).

Lorentz, Wiedemann's Annalen IX, 641 (1880).

Lorenz, Wiedemann's Annalen XI (1880).

Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second' ordine.

Memoria del prof. DAVIDE BESSO

approvata con relazione al Presidente

nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

In questo scritto, premesso un cenno sul prodotto di soluzioni di più equazioni differenziali lineari omogenee, sono esposte delle proprietà dell' equazione differenziale lineare omogenea del quart' ordine, soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second' ordine (¹).

I.

1. Sieno date m equazioni differenziali lineari omogenee, rispetto alla stessa variabile, degli ordini rispettivi $n_1, n_2, \dots n_m$, e sia:

$$W = yzu \dots \qquad (\alpha)$$

il prodotto di m soluzioni delle m equazioni, cioè d'una soluzione della prima, per una della seconda, ecc. Formando le successive derivate di questo prodotto, ed eliminando le derivate di ciascuna delle m funzioni d'ordine eguale o maggiore di quello dell' equazione differenziale corrispondente, si otterranno delle equazioni lineari rispetto ai prodotti della forma:

$$y^{(\lambda)} \ z^{(\mu)} \ u^{(\nu)} \dots$$

il numero dei quali è:

$$h = n_1 \, n_2 \dots n_m - 1 \ .$$

Perciò, formando h derivate della (α), si avrà un sistema di h equazioni lineari il quale permetterà, in generale, di determinare quelli h prodotti, ed è chiaro ch'essi risulteranno funzioni razionali di W, dei coefficienti delle equazioni differenziali e di alcune derivate di queste funzioni. Ora, fra le quantità che in tal modo si possono determinare, sono i prodotti di $m-1$ delle m funzioni $y, z, u \dots$ per la derivata prima dell' m^a: dividendo ciascuno di questi prodotti pel prodotto W si otterranno le derivate logaritmiche delle m funzioni. Dunque:

D a t o i l p r o d o t t o W, l e d e r i v a t e l o g a r i t m i c h e d e l l e m f u n z i o n i

(¹) Questa classe d' equazioni, ed altre affini, sono state per altre vie investigate dai signori Goursat e Halphen. Veggasi la Nota del primo: *Sur une classe d'équations linéaires du quatrième ordre*, e quella del secondo: *Sur quelques équations differentielles linéaires du quatrième ordre*, ambedue nei Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, anno 1883.

$y, z, u, \ldots$ si possono, in generale, esprimere razionalmente mediante W, i coefficienti delle equazioni differenziali, ed alcune derivate di queste funzioni.

2. Formando $h+1$ derivate della (α) si ottiene un sistema di $h+1$ equazioni lineari mediante il quale si possono eliminare gli h prodotti: $y^{(\lambda)}\ z^{(\mu)}\ u^{(\nu)} \ldots$. Il risultato di quest' eliminazione è, in generale, un' equazione differenziale lineare omogenea, rispetto a W, dell' ordine:

$$h+1 = n_1\, n_2 \ldots n_m;$$

dunque:

Il prodotto W soddisfa, in generale, ad un' equazione differenziale lineare omogenea dell' ordine $n_1\, n_2 \ldots n_m$, i cui coefficienti sono funzioni razionali di quelli delle equazioni differenziali date e di alcune loro derivate.

II.

3. I prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine soddisfanno ad un' equazione differenziale lineare omogenea del quart' ordine, i cui coefficienti sono funzioni razionali di quelli delle due equazioni del second' ordine e di alcune loro derivate, purchè queste due equazioni non abbiano la proprietà che il quoziente di due soluzioni dell' una sia eguale al quoziente di due soluzioni dell'altra.

Sia:

$$yz = u$$

il prodotto d'una soluzione della:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (a)$$

per una soluzione della:

$$z'' + p_1 z' + q_1 z = 0 \qquad (b)$$

Colle sostituzioni:

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p dx} \cdot Y, \qquad z = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} \cdot Z,$$

$$\rho = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}, \qquad \rho_1 = q_1 - \frac{p_1{}^2}{4} - \frac{p'_1}{2},$$

le (a) (b) si trasformano nelle:

$$Y'' + \rho Y = 0 \qquad (a') \qquad\qquad Z'' + \rho_1 Z = 0 \qquad (b')$$

le quali sono distinte quando il quoziente di due soluzioni della (a) non sia eguale al quoziente di due soluzioni della (b), e soltanto in questo caso.

Ciò premesso, derivando la:

$$YZ = U,$$

ed eliminando le derivate d'ordine superiore al primo per mezzo delle (a') (b'), si ottengono le:

$$YZ' + Y'Z = U'$$

$$2Y'Z' = U'' + \nu U$$

$$-2\rho YZ' - 2\rho_1 Y'Z = U''' + \nu U' + \nu' U$$

$$-2\rho' YZ' - 2\rho'_1 Y'Z - 2\nu Y'Z' = U^{IV} + \nu U'' + 2\nu' U' + (\nu'' - \nu^2 + \sigma^2) U$$

nelle quali:

$$\nu = p_1 + p\,, \qquad \sigma = p_1 - p$$

Coll' eliminazione dei tre prodotti:

$$YZ'\,,\ Y'Z\,,\ Y'Z'\,,$$

si ottiene l' equazione:

$$U^{IV} - \frac{\sigma'}{\sigma}\,U''' + 2\nu U'' + \left(3\nu' - 2\nu\frac{\sigma'}{\sigma}\right)U' + \left(\nu'' + \sigma^2 - \nu'\frac{\sigma'}{\sigma}\right)U = 0 \quad \text{I}$$

la quale, postovi:

$$U = e^{\frac{1}{2}\int (p+p_1)dx}\,u\,,$$

si trasforma in una equazione differenziale lineare omogenea del quart'ordine, rispetto alla funzione u, i cui coefficienti sono funzioni razionali di p, q, p_1, q_1 e loro derivate.

4. Nell' ipotesi del teorema precedente le derivate logaritmiche d' una soluzione della (a) e d' una soluzione della (b) sono funzioni razionali del prodotto di queste due soluzioni, dei coefficienti delle due equazioni differenziali e di alcune derivate di queste cinque funzioni.

Dalle precedenti equazioni si ricava:

$$2\sigma\frac{Y'}{Y} = 2\sigma\left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{2}p\right) = -\frac{U'''}{U} - (2\nu - \sigma)\frac{U'}{U} - \nu'\,,$$

$$2\sigma\frac{Z'}{Z} = 2\sigma\left(\frac{z'}{z} + \frac{1}{2}p_1\right) = \frac{U'''}{U} + (2\nu + \sigma)\frac{U'}{U} + \nu'\,,$$

e queste provano che i rapporti $\frac{y'}{y}, \frac{z'}{z}$ sono funzioni razionali di u, p, q, p_1, q_1, e di alcune derivate di queste cinque funzioni.

5. L' equazione del quart' ordine ammette delle soluzioni che non sono prodotti d' una soluzione della (a) per una soluzione della (b).

Indicando con y_1, y_2 due integrali fondamentali della (a) e con z_1, z_2, due integrali fondamentali della (b), l' equazione del quart' ordine è soddisfatta dalle quattro funzioni:

$$u_1 = y_1 z_1\,, \qquad u_2 = y_1 z_2\,, \qquad u_3 = y_2 z_1\,, \qquad u_4 = y_2 z_2\,,$$

le quali costituiscono un sistema d' integrali fondamentali. Infatti, se avesse luogo una relazione della forma:

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$$

le a, b, c, d significando costanti, sarebbe:

$$\frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2} = -\frac{y_2}{y_1}\,,$$

cioè il quoziente di due soluzioni della (b) sarebbe eguale al quoziente di due soluzioni della (a).

Ma affinchè la:

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4$$

si possa mettere nella forma:

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)\ (\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2)$$

le costanti a, b, c, d devono verificare la relazione:

$$ad - bc = 0 .$$

E questa condizione è anche sufficiente.

6. α) I prodotti delle coppie di soluzioni delle (a') (b') soddisfanno all'equazione differenziale non lineare:

$$\left(U'''+(2\nu+\sigma)U'+\nu' U\right)\left(U'''+(2\nu-\sigma)U'+\nu' U\right)+2\sigma^2 U(U''+\nu U)=0 \quad \text{II}$$

β) Ogni soluzione comune all'equazione lineare I ed all'equazione non lineare II è il prodotto d'una soluzione della (a') per una soluzione della (b').

α) Moltiplicando fra loro le due equazioni del n. 4 si ottiene la II, che è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle (a') (b').

β) Risulta dal numero precedente che, indicando con Y_1, Y_2 due integrali fondamentali della (a') e con Z_1, Z_2 due integrali fondamentali della (b'), ogni soluzione della I ha la forma:

$$U = a\, Y_1 Z_1 + b\, Y_1 Z_2 + c\, Y_2 Z_1 + d\, Y_2 Z_2 ,$$

ossia:

$$U = Y_1 \psi_1 + Y_2 \psi_2 \qquad (c)$$

in cui ψ_1, ψ_2 significano due soluzioni della (b'); e che, se queste sono legate dalla:

$$\psi'_1 \psi_2 - \psi_1 \psi'_2 = 0 ,$$

quella soluzione della I è il prodotto d'una soluzione della (a') per una soluzione della (b'). Ciò premesso, derivando la (c) si ottengono successivamente le:

$$(Y'_1 \psi_1 + Y'_2 \psi_2) + (\psi'_1 Y_1 + \psi'_2 Y_2) = U' \qquad (c_1)$$

$$2(Y'_1 \psi'_1 + Y'_2 \psi'_2) = U'' + \nu U \qquad (c_2)$$

$$-2\rho_1 (Y'_1 \psi_1 + Y'_2 \psi_2) - 2\rho(\psi'_1 Y_1 + \psi'_2 Y_2) = U''' + \nu U' + \nu' U \qquad (c_3)$$

Dalle (c_1) (c_3) risulta:

$$2\sigma(Y'_1 \psi_1 + Y'_2 \psi_2) = -U''' - (2\nu - \sigma)U' - \nu' U ,$$

$$2\sigma(\psi'_1 Y_1 + \psi'_2 Y_2) = U''' + (2\nu + \sigma)U' + \nu' U ,$$

e quindi:

$$4\sigma^2 (Y'_1 \psi_1 + Y'_2 \psi_2)(\psi'_1 Y_1 + \psi'_2 Y_2) = -\left(U''' + (2\nu-\sigma)U' + \nu' U\right)\left(U''' + (2\nu-\sigma)U' + \nu' U\right) \qquad (d)$$

Ora se la U, soluzione della I, soddisfa alla II, si avrà, in forza delle (d) (c_2):

$$(\psi'_1 \psi_2 - \psi_1 \psi'_2)(Y'_1 Y_2 - Y_1 Y'_2) = 0 ,$$

e, per essere diverso da zero il secondo fattore, si conchiuderà che quella U è il prodotto d'una soluzione della (a') per una soluzione della (b').

7. Trovare una relazione fra i coefficienti dell'equazione differenziale lineare omogenea del quart'ordine, che è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine.

Suppongasi che l'equazione:

$$u^{IV} + Pu''' + Qu'' + Ru' + Su = 0 \qquad (1)$$

sia soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle:

$$\eta'' + r\eta' + s\eta = 0 \qquad (2) \qquad\qquad \xi'' + r_1\xi' + s_1\xi = 0 \qquad (3)$$

Colle sostituzioni:

$$u = e^{-\frac{1}{4}\int P dx} . \, v , \qquad \eta = e^{-\frac{1}{8}\int P dx} . \, y , \qquad \xi = e^{-\frac{1}{8}\int P dx} . \, z ,$$

le tre equazioni si trasformeranno nelle:

$$v^{IV} - Q_1 v'' - R_1 v' - S_1 v = 0 \qquad (1')$$

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2') \qquad z'' + p_1 z' + q_1 z = 0 \qquad (3')$$

in cui:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{3}{8}P^2 + \frac{3}{2}P' - Q, \\ R_1 &= P'' - \frac{1}{8}P^3 + \frac{1}{2}PQ - R, \\ S_1 &= \frac{3}{256}P^4 - \frac{3}{32}P^2P' + \frac{1}{4}P''' - \frac{3}{16}P'^2 + Q\left(\frac{1}{4}P' - \frac{1}{16}P^2\right) + \frac{1}{4}RP - S, \end{aligned}\right\} (f)$$

$$p = r - \frac{1}{4}P, \qquad q = s - \frac{1}{8}Pr + \frac{1}{64}P^2 - \frac{1}{8}P',$$

$$p_1 = r_1 - \frac{1}{4}P, \qquad q_1 = s_1 - \frac{1}{8}Pr_1 + \frac{1}{64}P^2 - \frac{1}{8}P',$$

e la (1′) sarà soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle (2′) (3′).

Pongasi ora:

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p dx}. Y, \qquad z = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}. Z,$$

$$\rho = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}, \qquad \rho_1 = q_1 - \frac{p_1^2}{4} - \frac{p'_1}{2}$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(p + p_1), \qquad v = e^{\int \tau dx}. U;$$

la trasformata in U:

$$U^{IV} + P_2 U''' + Q_2 U'' + R_2 U' + S_2 U = 0 \qquad (1'')$$

sarà soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle:

$$Y'' + \rho Y = 0 \qquad (2'') \qquad Z'' + \rho_1 Z = 0; \qquad (3'')$$

epperciò sarà (3):

$$P_2 = -\frac{\sigma'}{\sigma}, \qquad Q_2 = 2\nu, \qquad R_2 = 3\nu' - 2\nu\frac{\sigma'}{\sigma}, \qquad S_2 = \sigma^2 + \nu'' - \nu'\frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Da queste si ricavano facilmente le due relazioni:

$$\frac{3}{2}Q'_2 + Q_2 P_2 - R_2 = 0, \qquad (9)$$

$$\left(S_2 - \frac{1}{2}Q''_2 - \frac{1}{2}P_2 Q'_2\right)' + 2P_2\left(S_2 - \frac{1}{2}Q''_2 - \frac{1}{2}P_2 Q'_2\right) = 0, \qquad (10)$$

le quali devono essere verificate dai coefficienti d'un'equazione differenziale lineare omogenea del quart' ordine, quando questa è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second' ordine prive del secondo termine.

Dalle due equazioni ora trovate possiamo ricavare una relazione fra i coefficienti della (1′) eliminando la funzione τ che è in esse implicita; ed a tale scopo dobbiamo sostituire a P_2, Q_2, R_2, S_2 i loro valori in funzione di τ e di Q_1, R_1, S_1, i quali sono:

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= 4\tau, \qquad Q_2 = -Q_1 + 6(\tau' + \tau^2) \\ R_2 &= -R_1 + 4(\tau'' + 3\tau\tau' + \tau^3) - 2Q_1\tau \\ S_2 &= -S_1 - R_1\tau - Q_1(\tau' + \tau^2) + \tau''' + 4\tau\tau'' + 3\tau'^2 + 6\tau^2\tau' + \tau^4 \end{aligned}\right\} (g)$$

Con questa sostituzione la (9) si trasforma nella:

$$\tau'' + 6\tau\tau' + 4\tau^3 - \frac{2}{5} Q_1 \tau + \frac{1}{5} R_1 - \frac{3}{10} Q'_1 = 0 \qquad (11)$$

per mezzo della quale, e della sua derivata, le τ'', τ''' si possono esprimere in funzione di τ, τ' e dei coefficienti Q_1, R_1; e sostituendo i valori così ottenuti nella formula di S_2, si ottiene:

$$S_2 = -3\tau'^2 + 6\tau^2\tau' + 9\tau^4 - \left(\frac{3}{5}R_1 + \frac{1}{5}Q'_1\right)\tau - \frac{3}{5}Q_1\tau' - \frac{9}{5} Q_1\tau^2 - S_1 + \frac{3}{10}Q''_1 - \frac{1}{5}R'_1,$$

quindi:

$$S_2 - \frac{1}{2}Q''_2 - \frac{1}{2}P_2Q'_2 = 9\tau'^2 + 18\tau^2\tau' + 9\tau^4 + \frac{3}{5}(Q'_1 - R_1)\tau - \frac{9}{5}Q_1\tau' - \frac{9}{5}Q_1\tau^2 + \frac{2}{5}R'_1 - \frac{1}{10}Q''_1 - S_1,$$

e la (10) diviene:

$$84\lambda\tau^2 + 42\lambda\tau' - \left(26\lambda' + \frac{4}{5}\mu\right)\tau - \left(\frac{18}{5}\lambda Q_1 + 4\lambda'' + \frac{1}{10}\mu'\right) = 0 \qquad (12)$$

in cui:

$$10\lambda = Q'_1 - R_1, \qquad 10\mu = 9Q_1^2 - 30Q''_1 + 100S_1 \qquad (13)$$

Derivando la (12) ed eliminando τ'' colla (11) e poi, dall'equazione risultante e dalla (12) eliminando la τ', si ottiene l'equazione:

$$L\tau + M = 0 \qquad (14)$$

nella quale:

$$L = 416\lambda'^2 - 8\mu\lambda' - \frac{16}{25}\mu^2 + 42\lambda\left(-34\lambda'' - \mu' + \frac{48}{5}Q_1\lambda\right) \qquad (15)$$

$$M = \left(\frac{18}{5}Q_1\lambda + 4\lambda'' + \frac{1}{10}\mu'\right)\left(16\lambda' - \frac{4}{5}\mu\right) + 42\lambda\left(\frac{3}{5}\lambda Q'_1 - \frac{18}{5}Q_1\lambda' + 84\lambda^2 - 4\lambda''' - \frac{1}{10}\mu''\right) \quad (16)$$

Ora eliminando τ dalle (12) (14) si ottiene la relazione:

$$84\lambda M^2 + \left(26\lambda' + \frac{4}{5}\mu\right)LM - \left(\frac{18}{5}\lambda Q_1 + 4\lambda'' + \frac{1}{10}\mu'\right)L^2 + 42\lambda(ML' - M'L) = 0 \quad (17)$$

che ha luogo fra i coefficienti della (1') quando questa è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine.

La relazione corrispondente all'equazione generale (1) si ricaverà dalla (17) sostituendo a Q_1, R_1, S_1 i loro valori in funzione di P, Q, R, S [1].

8. Se i coefficienti della (1') sono legati dalla relazione (17) essa è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine, purchè non sia $\lambda=0$, nè $L=0$, nè sia eguale a zero la funzione:

$$T = 9\left(M^2 - LM' + L'M - \frac{1}{10}Q_1L^2\right)^2 - L^3\left(6\lambda M + 4\lambda' L + \frac{1}{10}\mu L\right). \quad (18)$$

[1] Non è forse inutile l'osservare che le funzioni λ e μ, qui introdotte a scopo di semplificazione, sono quelle che, eguagliate a zero, stabiliscono la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1') sia soddisfatta da una forma cubica di due integrali fondamentali d'un'equazione differenziale lineare omogenea del second' ordine.

Dimostriamo dapprima che, se i coefficienti P_2, Q_2, R_2, S_2 verificano le:

$$\frac{3}{2} Q'_2 + Q_2 P_2 - R_2 = 0 \tag{9}$$

$$\left(S_2 - \frac{1}{2} Q''_2 - \frac{1}{2} P_2 Q'_2\right)' + 2P_2 \left(S_2 - \frac{1}{2} Q''_2 - \frac{1}{2} P_2 Q'_2\right) = 0 \tag{10}$$

l'equazione del quart' ordine ($1''$) è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni del second' ordine prive del secondo termine, purchè non sia:

$$S_2 - \frac{1}{2} Q''_2 - \frac{1}{2} P_2 Q'_2 = 0 .$$

Infatti posto:
$$\nu = \frac{1}{2} Q_2 , \quad \sigma^2 = S_2 - \frac{1}{2} Q''_2 - \frac{1}{2} P_2 Q'_2 ,$$

si avrà dalla (10)
$$P_2 = - \frac{\sigma'}{\sigma} ,$$

e quindi dalla (9):
$$R_2 = 3\nu' - 2\nu \frac{\sigma'}{\sigma} ,$$

e sarà:
$$S_2 = \sigma^2 + \nu'' - \nu' \frac{\sigma'}{\sigma} .$$

Ora suppongasi che i coefficienti Q_1, R_1, S_1 della ($1'$) verifichino la (17) in cui L ed M sono dati dalle (15) (16) e λ, μ dalle (13), e che ciascuna delle tre funzioni λ, L, T sia diversa da zero. Posto:

$$\tau = - \frac{M}{L} \tag{14'}$$

la (17) diverrà:

$$42\lambda (2\tau^2 + \tau') - \left(26\lambda' + \frac{4}{5} \mu\right) \tau - \left(\frac{18}{5} \lambda Q_1 + 4\lambda'' + \frac{1}{10} \mu'\right) = 0 . \tag{19}$$

Derivando questa, e all' eguaglianza che ne risulta aggiungendo la stessa (19) dopo averla moltiplicata per 2τ, si ottiene:

$$42\lambda (\tau'' + 6\tau\tau' + 4\tau^3) +$$
$$+ \left(16\lambda' - \frac{4}{5}\mu\right)(2\tau^2 + \tau') - \left(\frac{36}{5}\lambda Q_1 + 34\lambda'' + \mu'\right)\tau - \left(\frac{18}{5}\lambda Q_1 + 4\lambda'' + \frac{1}{10}\mu'\right)' = 0,$$

ed eliminando $2\tau^2 + \tau'$ da questa e dalla precedente:

$$\left.\begin{aligned} 1764\lambda^2(\tau'' + 6\tau\tau' + 4\tau^3) = &\left(-16\lambda' + \frac{4}{5}\mu\right)\left[\left(26\lambda' + \frac{4}{5}\mu\right)\tau + \frac{18}{5}\lambda Q_1 + 4\lambda'' + \frac{1}{10}\mu'\right] \\ &+ 42\lambda\left(\frac{36}{5}\lambda Q_1 + 34\lambda'' + \mu'\right)\tau + 42\lambda\left(\frac{18}{5}\lambda Q_1 + 4\lambda'' + \frac{1}{10}\mu\right)' \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ciò premesso, pongasi:

$$P_2 = 4\tau , \qquad Q_2 = - Q_1 + 6(\tau' + \tau^2) ,$$
$$R_2 = - R_1 + 4(\tau'' + 3\tau\tau' + \tau^3) - 2Q_1\tau ,$$
$$S_2 = \tau''' + 4\tau\tau'' + 3\tau'^2 + 6\tau^2\tau' + \tau^4 - Q_1(\tau' + \tau^2) - R_1\tau - S_1 .$$

Dalle prime tre si ricava:

$$\frac{3}{2} Q'_2 + Q_2 P_2 - R_2 = - \frac{3}{2} Q'_1 + R_1 - 2\tau Q_1 + 5(\tau'' + 6\tau\tau' + 4\tau^3) \tag{21}$$

la quale, in forza della (20), diviene:

$$1764\lambda^2 \left(\frac{3}{2} Q'_2 + Q_2 P_2 - R_2\right) = \tau\left[42\lambda(170\lambda'' + 5\mu' - 48 Q_1 \lambda) - 2080\lambda'^2 + 40\mu\lambda' + \frac{16}{5}\mu^2\right]$$
$$+ (4\mu - 80\lambda')\left(\frac{18}{5}\lambda Q_1 + 4\lambda'' + \frac{1}{10}\mu'\right) + 42\lambda\left(-3\lambda Q'_1 - 420\lambda^2 + 18\lambda' Q_1 + 20\lambda''' + \frac{1}{2}\mu''\right)$$

e questa, avuto riguardo alle (15) (16) (14'), si riduce alla:

$$\lambda^2\left(\frac{3}{2}Q'_2+Q_2P_2-R_2\right)=0,$$

ossia alla:

$$\frac{3}{2}Q'_2+Q_2P_2-R_2=0 \qquad (9')$$

Ora dalla (21) risulta:

$$\tau''=-6\tau\tau'-4\tau^3+\frac{3}{10}Q'_1-\frac{1}{5}R_1+\frac{2}{5}Q_1\tau,$$

e quindi:

$$\tau'''=24\tau^2\tau'+24\tau^4-6\tau'^2+\frac{2}{5}Q_1\tau'-\frac{12}{5}Q_1\tau^2+\left(\frac{6}{5}R_1-\frac{7}{5}Q'_1\right)\tau+\frac{3}{10}Q''_1-\frac{1}{5}R'_1,$$

e con questi valori si troverà:

$$S_2-\frac{1}{2}Q''_2-\frac{1}{2}P_2Q'_2=9(\tau'+\tau^2)^2-\frac{9}{5}Q_1(\tau'+\tau^2)+6\lambda\tau+\frac{9}{100}Q_1^2-4\lambda'-\frac{1}{10}\mu;$$

$$\left(S_2-\frac{1}{2}Q''_2-\frac{1}{2}P_2Q'_2\right)'=(\tau'+\tau^2)\left(-72\tau\tau'-72\tau^3+\frac{18}{5}(Q'_1-R_1)+\frac{72}{5}Q_1\tau\right)+$$
$$+6\lambda\tau'+\left(6\lambda'-\frac{18}{25}Q_1^2\right)\tau-\frac{18}{5}Q_1\lambda-4\lambda''-\frac{1}{10}\mu'.$$

Dalle ultime due si ricava:

$$\left(S_2-\frac{1}{2}Q''_2-\frac{1}{2}P_2Q'_2\right)'+2P_2\left(S_2-\frac{1}{2}Q''_2-\frac{1}{2}P_2Q'_2\right)=$$
$$=42\lambda(\tau'+2\tau^2)-\tau\left(26\lambda'+\frac{4}{5}\mu\right)-\frac{18}{5}Q_1\lambda-4\lambda''-\frac{1}{10}\mu',$$

ossia, per la (19):

$$\left(S_2-\frac{1}{2}Q''_2-\frac{1}{2}P_2Q'_2\right)'+2P_2\left(S_2-\frac{1}{2}Q''_2-\frac{1}{2}P_2Q'_2\right)=0. \qquad (10')$$

Osservando infine che la precedente espressione di:

$$S_2-\frac{1}{2}Q''_2-\frac{1}{2}P_2Q'_2,$$

può essere trasformata nella: $\dfrac{T}{L^4}$,

in cui T è dato dalla (18), è chiaro che le (9') (10') provano il teorema enunciato.

9. Data un' equazione differenziale lineare omogenea del quart' ordine, soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second' ordine, trovare queste due equazioni.

Sia dapprima l' equazione:

$$U^{IV}+P_2U'''+Q_2U''+R_2U'+S_2U=0 \qquad (1'')$$

soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle:

$$Y''+\rho Y=0 \quad (2'') \qquad Z''+\rho_1Z=0 \quad (3')$$

Dalle:

$$P_2=-\frac{\sigma'}{\sigma}, \qquad Q_2=2\nu, \qquad R_2=3\nu'-2\nu\frac{\sigma'}{\sigma}, \qquad S_2=\sigma^2+\nu''-\nu'\frac{\sigma'}{\sigma},$$

nelle quali:

$$\nu=\rho_1+\rho, \qquad \sigma=\rho_1-\rho,$$

si ricava:

$$\rho_1 = \frac{1}{4} Q_2 + \frac{1}{2} \sqrt{S_2 - \frac{1}{2} Q''_2 - \frac{1}{2} P_2 Q'_2}\,.$$

$$\rho = \frac{1}{4} Q_2 - \frac{1}{2} \sqrt{S_2 - \frac{1}{2} Q''_2 - \frac{1}{2} P_2 Q'_2}\,.$$

Ora la:

$$u^{IV} + Pu''' + Qu'' + Ru' + Su = 0 \qquad (1)$$

colla sostituzione:

$$u = e^{-\frac{1}{4}\int P dx} \cdot v\,,$$

si trasforma nella:

$$v^{IV} - Q_1 v'' - R_1 v' - S_1 v = 0 \qquad (1')$$

i cui coefficienti sono dati dalle (f); e questa, colla sostituzione:

$$v = e^{\int \tau dx} \cdot U\,,$$

si trasforma nella (1″) i cui coefficienti sono dati dalle (g). Perciò, e in forza delle (14), (15), (16), (13), le P_2, Q_2, R_2, S_2 sono date funzioni razionali di Q_1, R_1, S_1 e loro derivate, e quindi anche di P, Q, R, S e loro derivate.

Indicando con Y_1, Y_2 due integrali fondamentali della (2″), e con Z_1, Z_2 due integrali fondamentali della (3″), e ponendo:

$$e^{\int \left(\tau - \frac{P}{4}\right) dx} = \omega\,,$$

le funzioni:

$$\omega Y_1 Z_1\,, \quad \omega Y_1 Z_2\,, \quad \omega Y_2 Z_1\,, \quad \omega Y_2 Z_2\,,$$

saranno quattro integrali fondamentali della (1).

III.

10. L'equazione differenziale lineare omogenea del quart' ordine, soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second' ordine, possiede quattro integrali fondamentali dei quali è nulla una forma quadratica

Sieno y_1, y_2 due integrali fondamentali d'una delle due equazioni del second'ordine, z_1, z_2 due integrali fondamentali dell'altra; l'equazione del quart' ordine è soddisfatta dai quattro prodotti:

$$u_1 = y_1 z_1\,, \quad u_2 = y_1 z_2\,, \quad u_3 = y_2 z_1\,, \quad u_4 = y_2 z_2\,,$$

i quali costituiscono un sistema d' integrali fondamentali (5), e questi sono legati dalla relazione:

$$u_1 u_4 - u_2 u_3 = 0\,.$$

11. Trovare una relazione fra i coefficienti d'un'equazione differenziale lineare omogenea del quart' ordine, per la quale sia nulla una forma quadratica di tre o di quattro soluzioni linearmente indipendenti.

Se l' equazione:

$$u^{IV} + Pu''' + Qu'' + Ru' + Su = 0 \qquad (1)_1$$

ha la proprietà enunciata, tale proprietà spetterà pure alla trasformata:

$$v^{IV} - Q_1 v'' - R_1 v' - S_1 v = 0 \qquad (1')_1$$

i cui coefficienti sono dati dalle (f); epperciò questa ammetterà tre o quattro soluzioni, linearmente indipendenti, tali che sia eguale a zero la somma dei loro quadrati. Sieno v_1, v_2, v_3, oppure v_1, v_2, v_3, v_4 queste soluzioni, e pongasi:

$$\Sigma v^{(h)} v^{(k)} = (h, k),$$

e, in conseguenza:

$$(h, k)' = (h, k+1) + (h+1, k),$$

$$(h, 4) = Q_1 (h, 2) + R_1 (h, 1) + S_1 (h, 0).$$

Mediante queste, derivando la:

$$(0, 0) = 0,$$

si troverà:

$$\left.\begin{aligned} (1, 3) &= -\frac{3}{4}(2, 2) + \frac{1}{4} Q_1 (1, 1) \\ (2, 3) &= -\frac{1}{10}(4R_1 - Q'_1)(1, 1) - \frac{1}{5} Q_1 (1. 2) \\ 10(3, 3) + \frac{21}{2} Q_1 (2, 2) &+ 18R_1 (1, 2) + \left(4R_1 - Q''_1 - 10S_1 + \frac{1}{2} Q_1^2\right)(1, 1) = 0 \end{aligned}\right\} (22)$$

le quali danno le (1, 3) (2, 3) (3, 3) per mezzo delle (1, 1), (2, 2), (1, 2), e dei coefficienti della $(1')_1$. Ora è chiaro che, con nuove derivazioni, si otterranno delle equazioni in cui, oltre ai coefficienti della $(1')_1$ non entreranno che le tre funzioni (1, 1), (2, 2), (1, 2); e propriamente, derivando tre volte l' ultima delle (22), si avranno le tre:

$$A\,(1, 1) + B\,(2, 2) + C\,(1, 2) = 0 \qquad (23)$$

$$A_1(1, 1) + B_1(2, 2) + C_1(1, 2) = 0 \qquad (24)$$

$$A_2(1, 1) + B_2(2, 2) + C_2(1, 2) = 0 \qquad (25)$$

nelle quali:

$$\left.\begin{aligned} A &= 69Q_1\lambda - 40\lambda'' - \mu' \\ B &= 105\lambda \\ C &= -260\lambda' - S\mu \end{aligned}\right\} (26)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A' + \frac{1}{4} CQ_1 - \frac{1}{5} B(4R_1 - Q'_1) \\ B_1 &= B' + \frac{1}{4} C \\ C_1 &= C' + 2A - \frac{2}{5} BQ_1 \end{aligned}\right\} (27)$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= A'_1 + \frac{1}{4} C_1 Q_1 - \frac{1}{5} B_1(4R_1 - Q'_1) \\ B_2 &= B'_1 + \frac{1}{4} C_1 \\ C_2 &= C'_1 + 2A_1 - \frac{2}{5} B_1 Q_1 \end{aligned}\right\} (28)$$

$$10\lambda = Q'_1 - R_1, \qquad 10\mu = 9Q_1^2 - 30Q''_1 + 100S_1 \qquad (13)$$

Dalle tre equazioni (23) (24) (25), per essere la (1, 1) diversa da zero ([1]), risulta la:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (29)$$

che dev' essere soddisfatta dai coefficienti della $(1')_1$ quando sia eguale a zero una forma quadratica di tre o di quattro sue soluzioni linearmente indipendenti ([2]).

12. Se una forma quadratica di quattro integrali fondamentali della $(1')_1$ sia eguale a zero, e se inoltre le quantità λ, L e T, definite dalle (13) (15) (18) sieno diverse da zero, la $(1')_1$ è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second' ordine.

Dalle (26) (27) si ricava con facili calcoli:

$$\left.\begin{aligned} AB_1 - A_1B &= -25M \\ BC_1 - B_1C &= 25L \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

in cui L ed M sono definite dalle (15) (16). Perciò posto:

$$\Delta = (AC_1 - A_1C)(BB'_1 - B_1B') + (BA_1 - B_1A)(BC'_1 - B_1C') + (CB_1 - C_1B)(BA'_1 - B_1A'),$$

sarà:

$$ML' - M'L = \frac{1}{625}\Delta;$$

e, indicato con Ω il primo membro della (17), tenendo presenti le (26), si troverà:

$$625\Omega = \frac{2}{5}B\Delta + \frac{4}{5}B(AB_1 - A_1B)^2 + \frac{1}{10}C(AB_1 - A_1B)(BC_1 - B_1C) +$$
$$+ \frac{1}{10}(A - BQ_1)(BC_1 - B_1C)^2.$$

Se ora si trasforma la Δ eliminando le A', B', C', A'_1, B'_1, C'_1, mediante le (27) (28), e s'indica con D il primo membro della (29), si trova:

$$\Delta = BD - 2(AB_1 - A_1B)^2 + \frac{1}{4}(BC_1 - B_1C)\Big(Q_1(BC_1 - B_1C) + (CA_1 - C_1A)\Big),$$

e, sostituendo nella precedente espressione di Ω:

$$625\Omega = \frac{2}{5}\cdot 105^2 \cdot \lambda^2 D. \qquad (31)$$

Da questa risulta che, se la $(1')_1$ ammette quattro integrali fondamentali tali che una loro forma quadratica sia eguale a zero, nel quale caso è soddisfatta la (29), deve pure verificarsi la (17); e, in forza del teorema (8), si conchiude che, se le quantità λ, L e T sieno diverse da zero, la $(1')_1$ è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine.

([1]) Cfr. il n. 2 della Memoria: *Sul prodotto di più soluzioni d'un' equazione differenziale lineare omogenea* ecc. (Atti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XIV).

([2]) In relazione alla nota a pag. 224, si può osservare che la (29) è soddisfatta quando le funzioni λ e μ sono ambedue eguali a zero, nel quale caso la $(1')_1$ possiede quattro integrali fondamentali v_1, v_2, v_3, v_4 legati dalle relazioni:

$$v_2^2 - v_1 v_3 = 0, \qquad v_3^2 - v_2 v_4 = 0.$$

Risulta pure dalla (31), e dai teoremi (8) e (10), che, se ha luogo la (29) e le quantità λ, L e T sieno diverse da zero, la $(1')_1$ possiede quattro integrali fondamentali dei quali è nulla una forma quadratica.

13. I coefficienti ρ, ρ_1 delle equazioni del second'ordine (2'')(3''), sono le radici d'un'equazione quadratica i cui coefficienti sono funzioni razionali di quelli dell'equazione del quart'ordine (1) e di alcune loro derivate ([1]).

Sieno Y_1, Y_2 due integrali fondamentali della:

$$Y'' + \rho Y = 0 \tag{2''}$$

e Z_1, Z_2 due integrali fondamentali della:

$$Z'' + \rho_1 Z = 0. \tag{3''}$$

Posto:

$$\eta_1 = Y_1 Z_1, \qquad \eta_2 = Y_1 Z_2, \qquad \eta_3 = Y_2 Z_1, \qquad \eta_4 = Y_2 Z_2,$$

$$U_1 = \frac{\eta_1 + \eta_4}{2}, \quad U_2 = i\frac{\eta_1 - \eta_4}{2}, \quad U_3 = i\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}, \quad U_4 = \frac{\eta_2 - \eta_3}{2},$$

le quattro funzioni U_1, U_2, U_3, U_4 saranno quattro integrali fondamentali della:

$$U^{IV} + P_2 U''' + Q_2 U'' + R_2 U' + S_2 U = 0 \tag{1''}$$

i quali verificheranno la:

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = 0;$$

e sarà:

$$\eta_1^{(h)} \eta_4^{(h)} - \eta_2^{(h)} \eta_3^{(h)} = [h, h],$$

quando si ponga:

$$U_1^{(h)^2} + U_2^{(h)^2} + U_3^{(h)^2} + U_4^{(h)^2} = [h, h].$$

Ora dalle (2'') (3'') si ricavano facilmente i valori dei determinanti $Y''_1 Y'_2 - Y'_1 Y''_2$, $Y_1''' Y_2' - Y_1' Y_2'''$, ecc., mediante ρ, ρ_1 e le due costanti:

$$Y'_1 Y_2 - Y_1 Y'_2 = c, \qquad Z'_1 Z_2 - Z_1 Z'_2 = c_1;$$

e con questi valori si troverà:

$$\eta'_1 \eta'_4 - \eta'_2 \eta'_3 = [1, 1] = -cc_1,$$
$$\eta_1'' \eta_4'' - \eta_2'' \eta_3'' = [2, 2] = -2cc_1\nu,$$
$$\eta_1''' \eta_4''' - \eta_2''' \eta_3''' = [3, 3] = -cc_1(3\nu^2 + 4\varphi),$$

in cui:

$$\nu = \rho + \rho_1, \qquad \varphi = \rho\rho_1;$$

epperciò sarà:

$$\nu = -\frac{1}{2}\frac{[2,2]}{[1,1]}, \qquad \varphi = \frac{1}{4}\frac{[3,3]}{[1,1]} - \frac{3}{16}\frac{[2,2]^2}{[1,1]^2}. \tag{32}$$

D'altra parte le equazioni (23) (24) (25) determinano i rapporti: $\dfrac{(1,2)}{(1,1)}, \dfrac{(2,2)}{(1,1)}$, razionalmente, mediante i coefficienti della (1') e loro derivate, e le (22) permettono di esprimere in simile forma i rapporti:

$$\frac{(1,3)}{(1,1)}, \quad \frac{(2,3)}{(1,1)}, \quad \frac{(3,3)}{(1,1)}.$$

[1] Questa proposizione risulta già da quanto è stato dimostrato al n. 9, ma la dimostrazione che segue porge un altro mezzo, che in taluni casi è più spedito, pel calcolo dei coefficienti delle due equazioni del second'ordine.

Inoltre le (14) (30) (23) (24) danno:

$$\tau = -\frac{M}{L} = \frac{AB_1 - A_1B}{BC_1 - B_1C} = \frac{(1,2)}{(1,1)} = \frac{1}{2}\frac{(1,1)'}{(1,1)}$$

la quale prova che gli integrali delle due equazioni (1') (1'') sono legati dalla:

$$U = v(1,1)^{-\frac{1}{2}}$$

e che, in conseguenza, i rapporti:

$$\frac{[2,2]}{[1,1]},\ \frac{[3,3]}{[1,1]},$$

sono funzioni razionali dei rapporti:

$$\frac{(1,2)}{(1,1)},\ \frac{(2,2)}{(1,1)},\ \text{ecc.}$$

Dunque le funzioni ρ, ρ_1 sono le radici d' un' equazione quadratica i cui coefficienti si esprimono razionalmente mediante i coefficienti della (1') ed alcune loro derivate, e quindi anche mediante i coefficienti della (1) e loro derivate.

Sull'equazione del quinto grado.
Memoria del prof. DAVIDE BESSO

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

L'equazione del quinto grado è stata risolta mediante le funzioni ellittiche, e per diverse vie, da illustri matematici, uno dei quali, il Brioschi, dimostrò che la *risolvente*:

$$y^6+10y^3-12xy+5=0$$

può essere risolta eziandio per mezzo di serie ipergeometriche (¹).

Nel presente scritto è risolta, mediante queste funzioni, la *ridotta* di Jerrard:

$$y^5+y-x=0\,,$$

e la stessa equazione è pure risolta, e con maggiore semplicità, per mezzo di serie ipergeometriche del terz'ordine. E, mediante serie ipergeometriche del second'ordine, è risolta l'equazione del sesto grado qui sopra trascritta.

Vi è premessa la dimostrazione d'un teorema sull'equazione differenziale lineare soddisfatta dalle radici d'un'equazione algebrica.

I.

1. Le radici d'un'equazione algebrica di grado n, priva del secondo termine, $n-1$ delle quali non sieno legate da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti, soddisfanno ad un'equazione differenziale lineare omogenea dell'ordine $n-1$, i cui coefficienti sono funzioni razionali di quelli dell'equazione algebrica, i quali si suppongono funzioni d'una stessa variabile, e di alcune derivate di queste funzioni.

Indicate con $y_1, y_2 \ldots. y_{n-1}, y_n$ le radici dell'equazione algebrica:

$$y^n+p_1y^{n-2}+p_2y^{n-3}+\ldots.++p_{n-2}y+p_{n-1}=0 \qquad \text{I}$$

il determinante:

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots\ldots & y_{n-1}^{(n-2)} \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \ldots\ldots & y_{n-1}^{(n-3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y'_1 & y'_2 & \ldots\ldots & y'_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

(¹) Nella Memoria: *Sopra una classe di forme binarie.* Annali di Matematica vol. VIII della seconda serie.

per l'ipotesi fatta, sarà diverso da zero, epperciò esisterà un'equazione differenziale lineare omogenea dell'ordine $n-1$, soddisfatta dalle $n-1$ funzioni $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$, ed è chiaro ch'essa sarà soddisfatta anche dalla y_n. Sia:

$$y^{(n-1)} - S_1 y^{(n-2)} - S_2 y^{(n-3)} - \dots\dots - S_{n-2} y' - S_{n-1} y = 0 \qquad \text{II}$$

l'equazione differenziale di cui si tratta. Il coefficiente S_r è una frazione avente a denominatore il determinante Δ, e, per numeratore, quel determinante che si deduce dal determinante Δ sostituendo agli elementi della linea r^{ma} le derivate $(n-1)^{me}$ delle $n-1$ funzioni. Queste frazioni si possono trasformare ponendo, in luogo del denominatore, il determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots\dots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \dots\dots & y_{n-1}^{(n-3)} & y_n^{(n-3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y'_1 & y'_2 & \dots\dots & y'_{n-1} & y'_n \\ y_1 & y_2 & \dots\dots & y_{n-1} & y_n \\ 1 & 1 & \dots\dots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

e, al posto dei numeratori, i determinanti che si deducono da questo colla sostituzione indicata; moltiplicando poi i due termini di ciascuna frazione pel determinante denominatore, è chiaro che gli elementi dei nuovi determinanti saranno della forma:

$$\Sigma y^{(h)} y^{(k)},$$

in cui il simbolo Σ si riferisce a tutte le radici della (I).

Ora le derivate d'una radice della I sono funzioni razionali di questa radice, dei coefficienti della I e d'alcune loro derivate, epperciò è chiaro che le somme:

$$\Sigma y^{(h)} y^{(k)},$$

sono funzioni razionali dei coefficienti della I, di loro derivate, e delle radici della stessa I, e, rispetto a queste, simmetriche.

Dunque i coefficienti dell'equazione differenziale II sono funzioni razionali dei coefficienti dell'equazione algebrica I e di loro derivate.

2. Dalla precedente dimostrazione risulta un metodo pel calcolo dei coefficienti dell'equazione differenziale II, il quale, in generale, non è il più opportuno. Ma, sia pel calcolo delle somme $\Sigma y^{(h)} y^{(k)}$, come per quello delle somme $\Sigma y^{(h)} y^r$, che possono pure essere utilmente applicate al calcolo dei coefficienti dell'equazione differenziale, ed anche in alcuni casi particolari nei quali si può giungere direttamente alla equazione differenziale, è di valido aiuto un teorema dovuto a Brioschi [1], in forza del quale, indicando con s_r la somma delle potenze r^{me} delle radici della I, con F' la derivata del primo membro della I, considerato quale funzione dei soli coefficienti,

[1] *Intorno ad alcune formole per la risoluzione delle equazioni algebriche.* Annali di scienze matematiche e fisiche, tomo quinto.

e ponendo:

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots\ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & \ldots\ldots & s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots\ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots\ldots & s_{n-2} & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_{n-1} & y \\ s_2 & s_3 & \ldots\ldots & s_n & y^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \ldots\ldots & s_{2n-4} & y^{n-2} \\ 1 & y & \ldots\ldots & y^{n-2} & 1 \end{vmatrix},$$

si ha, per ogni radice della I,

$$Dy'^2 = QF'^2 .$$

II.

3. Il teorema di Brioschi, sopra citato, si presta molto opportunamente alla ricerca dell'equazione differenziale lineare soddisfatta dalle radici della:

$$y^5 + y - x = 0 . \tag{1}$$

Per quest'equazione si ha:

$$D = 3125x^4 + 256,$$
$$Q = 240y^4 + 200xy^3 + 125x^2y^2 + 256,$$
$$= 125y^{12} + 450y^8 + 565y^4 + 256,$$

e in conseguenza:

$$Dy'^2 = 125y^{12} + 450y^8 + 565y^4 + 256,$$

la quale, derivata due volte, dà:

$$2Dy'' + D'y' = 125 . 12y^{11} + 450 . 8y^7 + 565 . 4y^3$$
$$= 160y^3 + 600xy^2 + 1500x^2y,$$

$$2Dy''' + 3D'y'' + D''y' = 480y^2y' + 1200xyy' + 1500x^2y' + 600y^2 + 3000xy.$$

Ma dalla (1) e dalla sua derivata risulta:

$$yy' = \frac{5}{4}xy' - \frac{1}{4}y,$$

epperciò sarà:

$$2Dy''' + 3D'y'' + D''y' = 3750x^2y' + 2550xy + 480y^2,$$

e, derivando:

$$2Dy^{\text{IV}} + 5D'y''' + 4D''y'' + D'''y' = 3750x^2y'' + 11250xy' + 2310y ,$$

ossia:

$$(3125x^4 + 256)y^{\text{IV}} + 31250x^3y''' + 73125x^2y'' + 31875xy' - 1155y = 0 \tag{2}$$

che è l'equazione differenziale lineare soddisfatta delle radici della (1).

4. Colla sostituzione:

$$\xi = -\frac{3125}{256}x^4,$$

l'equazione differenziale, ora trovata, diviene:

$$\xi^3(\xi - 1)\frac{d^4y}{d\xi^4} + \xi^2(A\xi - B)\frac{d^3y}{d\xi^3} + \xi(C\xi - I)\frac{d^2\xi}{d\xi^2} + (E\xi - H)\frac{dy}{d\xi} + Gy = 0 \tag{3}$$

in cui:

$$\left.\begin{array}{llll} A=7\ , & C=\frac{411}{40}\ , & E=\frac{183}{80} & \\ B=\frac{9}{2}\ , & I=\frac{51}{16}\ , & H=\frac{3}{32}\ , & G=-\frac{231}{256.625} \end{array}\right\} \quad (4)$$

La forma di questa equazione è simile a quella d'una classe d'equazioni che il sig. Goursat ha mostrato potersi integrare per mezzo di serie ipergeometriche d'ordine superiore, cioè di serie della forma:

$$F(a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2 \dots b_{n-1}, \xi)=1+\sum_1^\infty \frac{\Pi_r(a_1)\Pi_r(a_2)\dots\Pi_r(a_n)}{1.2\dots r\Pi_r(b_1)\dots\Pi_r(b_{n-1})}\xi^r,$$

in cui:

$$\Pi_r(\alpha)=\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1) \text{ (¹)}.$$

Vedremo fra poco, seguendo in parte la via tracciata dal sig. Goursat per la classe d'equazioni ch'egli considera, che la (3) si può integrare per mezzo di serie così fatte. Ma osserviamo prima che, escluso il caso in cui una delle b sia un intero negativo o nullo, queste serie sono convergenti, indipendentemente dall'ordine dei termini, per tutti i valori reali o complessi delle a e b, quando sia $\mathrm{mod}\,\xi<1$, e, nel caso di $\mathrm{mod}\,\xi=1$, per quei valori delle a e b tali che la somma delle parti reali delle b sia maggiore della somma delle parti reali delle a.

5. Se la serie:

$$y=\nu_0+\nu_1\xi+\nu_2\xi^2+\dots \quad (5)$$

è convergente nel circolo di raggio 1, essa soddisferà, in questo circolo, alla (3), quando sia:

$$\left\{r^4+(A-6)r^3+(C-3A+11)r^2+(E-C+2A-6)r+G\right\}\nu_r=$$
$$=(r+1)\left\{r^3+(B-3)r^2+(I-B+2)r+H\right\}\nu_{r+1},$$

per tutti i valori di r; e questa condizione è soddisfatta quando si ponga:

$$\nu_0=1\,, \qquad \nu_r=\frac{\Pi_r(a_1)\Pi_r(a_2)\Pi_r(a_3)\Pi_r(a_4)}{1.2\dots r\Pi_r(b_1)\Pi_r(b_2)\Pi_r(b_3)}\,,$$

in cui le a significano le radici della:

$$a^4-(A-6)a^3+(C-3A+11)a^2-(E-C+2A-6)a+G=0\,,$$

e le b le radici della:

$$b^3-(B-3)b^2+(I-B+2)b-H=0\,.$$

Coi valori (4) di A, B,.... si trova:

$$a_1=-\frac{1}{20}\,,\quad a_2=\frac{3}{20}\,,\quad a_3=\frac{7}{20}\,,\quad a_4=\frac{11}{20}\,.$$

$$b_1=\frac{1}{4}\,,\quad b_2=\frac{1}{2}\,,\quad b_3=\frac{3}{4}\,,$$

e per questi valori delle a e b la serie (5) è convergente nel circolo di raggio 1, ed anche per $\mathrm{mod}\,\xi=1$.

(¹) Goursat, *Sur les fonctions hypergéometriques d'ordre superieur.* Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences. Vol. 96.

Dunque, per $\mod \xi < 1$, la:

$$f_1 = \mathrm{F}\left(-\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \xi\right) \tag{6}$$

è un integrale della (3).

Si trova poi che la sostituzione:

$$y = \xi^{\lambda} u,$$

non muta la forma della (3) quando λ sia una radice della:

$$\lambda^3 - (\mathrm{B} - 3)\lambda^2 + (\mathrm{I} - \mathrm{B} + 2)\lambda - \mathrm{H} = 0,$$

cioè per:

$$\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4},$$

ed eseguiti i calcoli per le corrispondenti equazioni in u, si trova che le:

$$\left.\begin{aligned}
\eta_2 &= \xi^{\frac{1}{4}} f_2 = \xi^{\frac{1}{4}} \mathrm{F}\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \xi\right) \\
\eta_3 &= \xi^{\frac{1}{2}} f_3 = \xi^{\frac{1}{2}} \mathrm{F}\left(\frac{9}{20}, \frac{13}{20}, \frac{17}{20}, \frac{21}{20}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \xi\right) \\
\eta_4 &= \xi^{\frac{3}{4}} f_4 = \xi^{\frac{3}{4}} \mathrm{F}\left(\frac{7}{10}, \frac{9}{10}, \frac{11}{10}, \frac{13}{10}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \xi\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

sono altri tre integrali della (3), per $\mod \xi < 1$, e si prova facilmente che le quattro funzioni $f_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ non sono legate da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.

È da osservare che anche le tre serie f_2, f_3, f_4 sono convergenti per $\mod \xi = 1$.

6. Le due sostituzioni:

$$\xi = \frac{1}{z}, \qquad y = z^{\mu} v,$$

non mutano la forma della (3) quando μ sia una radice della:

$$\mu^4 - (\mathrm{A} - 6)\mu^3 + (\mathrm{C} - 3\mathrm{A} + 11)\mu^2 - (2\mathrm{A} + \mathrm{E} - \mathrm{C} - 6)\mu + \mathrm{G} = 0,$$

cioè per:

$$\mu = -\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{7}{20}, \frac{11}{20};$$

ed a questi valori corrispondono le soluzioni dell'equazione in v, per $\mod z < 1$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{F}_1 &= \mathrm{F}\left(-\frac{1}{20}, \frac{4}{20}, \frac{9}{20}, \frac{14}{20}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, z\right) \\
\mathrm{F}_2 &= \mathrm{F}\left(\frac{3}{20}, \frac{8}{20}, \frac{13}{20}, \frac{18}{20}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, z\right) \\
\mathrm{F}_2 &= \mathrm{F}\left(\frac{7}{20}, \frac{12}{20}, \frac{17}{20}, \frac{22}{20}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, z\right) \\
\mathrm{F}_4 &= \mathrm{F}\left(\frac{11}{20}, \frac{16}{20}, \frac{21}{20}, \frac{26}{20}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Perciò la (3) sarà soddisfatta, per $\mod \xi > 1$, dalle quattro funzioni:

$$z^{-\frac{1}{20}} \mathrm{F}_1, \quad z^{\frac{3}{20}} \mathrm{F}_2, \quad z^{\frac{7}{20}} \mathrm{F}_3, \quad z^{\frac{11}{20}} \mathrm{F}_4,$$

le quali costituiscono un sistema d'integrali fondamentali.

Anche le quattro serie F_1, F_2, F_3, F_4 sono convergenti per mod $\xi = 1$.

7. Risulta da quanto precede che, posto:

$$\xi = -\frac{3125}{256} x^4,$$

le radici della (1), per mod $\xi < 1$, avranno la forma:

$$y_r = c_{r,1} f_1 + c_{r,2} \xi^{\frac{1}{4}} f_2 + c_{r,3} \xi^{\frac{1}{2}} f_3 + c_{r,4} \xi^{\frac{3}{4}} f_4 .$$

in cui le f sono date dalle (6) (7) e le c significano costanti.

E poichè, per ciascuna radice, il primo ed il secondo membro sono funzioni continue finchè mod ξ non supera l'unità, l'eguaglianza sussisterà anche per mod $\xi = 1$.

Le costanti si determinano osservando che, quando z tende a zero, una delle radici, e sia y_o, tende a zero, e le altre hanno per limiti le radici quarte dell'unità negativa. Indicando queste con $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, si avrà:

$$y_0 = c'_{0,2} x f_2 + c'_{0,3} x^2 f_3 + c'_{0,4} x^3 f_4 ,$$
$$y_r = \delta_r f_1 + c'_{r,2} x f_2 + c'_{r,3} x^2 f_3 + c'_{r,4} x_3 f_4 ,$$

quindi si troverà successivamente:

$$c'_{02} = \lim (y_0 x^{-1}) = 1 , \qquad c'_{r,2} = \lim (y_r - \delta_r f_1) x^{-1} = -\frac{1}{4} ,$$

$$c'_{0,3} = \lim (y_0 - x f_2) x^{-2} = 0 , \quad c'_{r,3} = \lim \left(y_r - \delta_r f_1 + \frac{1}{4} x f_2 \right) x^{-2} = \frac{5}{32} \delta_r^3$$

$$c'_{0,4} = \lim (y_0 - x f_2) x^{-3} = 0 , \quad c'_{r,4} = \lim \left(y_r - \delta_r f_1 + \frac{1}{4} x f_2 - \frac{5}{32} \delta_r^3 x^2 f_3 \right) x^{-3} = \frac{5}{32} \delta^2 .$$

Dunque le radici della (1), per mod $\xi \leqq 1$, sono date dalle:

$$\begin{cases} y_0 = x f_2 \\ y_r = \delta_r f_1 - \dfrac{1}{4} x f_2 + \dfrac{5}{32} \delta_r^3 x^2 f_3 + \dfrac{5}{32} \delta_r^2 x^3 f_4 . \end{cases}$$

8. Per mod $\xi \geqq 1$, indicate con $d_{r,1}, d_{r,2}, d_{r,3}, d_{r,4}$ delle costanti, le radici della (1) avranno la forma:

$$y_r = d_{r,1} z^{-\frac{1}{20}} F_1 + d_{r,2} z^{\frac{3}{20}} F_2 + d_{r,3} z^{\frac{7}{20}} F_3 + d_{r,4} z^{\frac{11}{20}} F_4$$

in cui le F sono date dalle (8) e $z = \frac{1}{\xi}$.

Posto nella (1):

$$y = \omega x^{\frac{1}{5}} ,$$

essa si trasforma nella:

$$\omega^5 + x^{-\frac{4}{5}} \omega - 1 = 0 ,$$

dalla quale risulta che, quando x tende all'infinito, cioè quando z tende a zero, le ω tendono ad altrettanti limiti finiti, i quali sono le radici quinte dell'unità, che indicheremo con $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Osservando poi che dalla precedente espressione di y_r si ricava:

$$\omega_r = d'_{r,1} F_1 + d'_{r,2} x^{-\frac{4}{5}} F_2 + d'_{r,3} x^{-\frac{8}{5}} F_3 + d'_{r,4} x^{-\frac{12}{5}} F_4 ,$$

si troverà, con metodo analogo a quello del n. precedente,

$$d'_{r,1} = \varepsilon_r\,, \quad d'_{r,2} = -\frac{1}{5}\varepsilon_r^2\,, \quad d'_{r,3} = -\frac{1}{25}\varepsilon_r^3\,, \quad d'_{r,4} = -\frac{1}{125}\varepsilon_r^4$$

e si conchiuderà che, per mod $\xi \geqq 1$, le radici della (1) sono date dalla formula:

$$y_r = \varepsilon_r x^{\frac{1}{5}} F_1 - \frac{1}{5}\varepsilon_r^2 x^{-\frac{3}{5}} F_2 - \frac{1}{25}\varepsilon_r^3 x^{-\frac{7}{5}} F_3 - \frac{1}{125}\varepsilon_r^4 x^{-\frac{11}{5}} F_4\,.$$

III.

9. In una precedente Memoria ([1]) ho dimostrato che, se un'equazione differenziale lineare omogenea del quart'ordine ammette quattro integrali fondamentali, dei quali sia eguale a zero una forma quadratica, quell'equazione è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine, purchè non abbiano luogo certe relazioni fra i suoi coefficienti. Ora l'equazione differenziale (2), per essere soddisfatta dalle radici della (1), possiede quattro integrali fondamentali dei quali è nulla una forma quadratica; ed eseguiti i calcoli, si trova che per essa sono verificate le altre condizioni del teorema citato, e che, in conseguenza, essa è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine. E propriamente si trova che, posto:

$$y = D^{-\frac{1}{2}}.u\,,$$

la trasformata in u è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle due equazioni del second'ordine:

$$Y'' + \rho Y = 0\,, \qquad Z'' + \rho_1 Z = 0\,,$$

in cui:

$$\rho = -\frac{3}{20D^2}.3125(21.256x^2 + 3125x^6) + 6\sqrt{5}D^{-\frac{1}{2}}\,,$$

$$\rho_1 = -\frac{3}{20D^2}.3125(21.256x^2 + 3125x^6) - 6\sqrt{5}D^{-\frac{1}{2}}\,,$$

essendo:

$$D = 3125x^4 + 256 \text{ ([2])}.$$

10. Queste due equazioni si possono trasformare in altre a coefficienti razionali colla sostituzione:

$$x^4 = \frac{256}{3125}.\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\,,$$

e si hanno le due:

$$\xi(1-\xi^2)^2\frac{d^2Y}{d\xi^2} + \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-6\xi^2)\frac{dY}{d\xi} + \frac{3}{400}(100\xi^3 - 105\xi \pm 8)Y = 0\,,$$

una delle quali si deduce dall'altra mutando ξ in $-\xi$.

([1]) *Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine*, num. 12.

([2]) Stimo inutile esporre la traccia dei non brevi calcoli, poichè questo risultato può essere facilmente verificato.

Colla sostituzione:

$$Y = (1-\xi)^{\mu} (1+\xi)^{\nu} v ,$$

si trova che il coefficiente di v nella trasformata è divisibile per $(1-\xi^2)$ quando sia

$$\mu = \begin{cases} -\frac{9}{40} \\ -\frac{1}{40} \end{cases}, \quad \nu = \begin{cases} \frac{3}{40} \\ -\frac{13}{40} \end{cases};$$

e posto:

$$\mu = -\frac{9}{40}, \qquad \nu = \frac{3}{40},$$

essa diviene:

$$\xi(1-\xi^2)\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \left(-\frac{27}{10}\xi^2 + \frac{3}{5}\xi + \frac{1}{2}\right)\frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{400}(84-189\xi)v = 0 .$$

Se ora in questa si pone:

$$\xi = \frac{1}{z},$$

e nella trasformata,

$$v = z^{\lambda} t ,$$

l'equazione in t sarà:

$$z(z^2-1)\frac{d^2 t}{dz^2} + \left(\left(2\lambda + \frac{3}{2}\right)z^2 - \frac{3}{5}z + \left(\frac{7}{10} - 2\lambda\right)\right)\frac{dt}{dz} +$$

$$+ \left(\left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{2}\right)z + \left(\frac{21}{100} - \frac{3}{5}\lambda\right) + \left(\frac{17}{10}\lambda - \lambda^2 - \frac{189}{400}\right)z^{-1}\right)t = 0 ,$$

la quale per:

$$\lambda = \frac{7}{20}, \qquad z = 2\eta - 1 ,$$

si riduce all'ipergeometrica:

$$\eta(1-\eta)\frac{d^2 t}{d\eta} + \left(\frac{7}{5} - \frac{11}{5}\eta\right)\frac{dt}{d\eta} - \frac{119}{400}t = 0 .$$

11. Indicando con $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ due integrali fondamentali dell'equazione ipergeometrica, ora trovata, saranno:

$$Y_1 = (1-\xi)^{-\frac{9}{40}}(1+\xi)^{\frac{3}{40}}\xi^{-\frac{7}{20}}\varphi_1\left(\frac{\xi+1}{2\xi}\right)$$

$$Y_2 = (1-\xi)^{-\frac{9}{40}}(1+\xi)^{\frac{3}{40}}\xi^{-\frac{7}{20}}\varphi_2\left(\frac{\xi+1}{2\xi}\right)$$

due integrali fondamentali della:

$$Y'' + \rho Y = 0 ,$$

e

$$Z_1 = (1+\xi)^{-\frac{9}{40}}(1-\xi)^{\frac{3}{40}}\xi^{-\frac{7}{20}}\varphi_1\left(\frac{\xi-1}{2\xi}\right)$$

$$Z_2 = (1+\xi)^{-\frac{9}{40}}(1-\xi)^{\frac{3}{40}}\xi^{-\frac{7}{20}}\varphi_2\left(\frac{\xi-1}{2\xi}\right)$$

due integrali fondamentali della:

$$Z'' + \rho_1 Z = 0\,;$$

epperciò le funzioni:

$$u_1 = \xi^{-\frac{7}{10}}(1-\xi^2)^{\frac{7}{20}}\varphi_1\left(\frac{\xi+1}{2\xi}\right)\varphi_1\left(\frac{\xi-1}{2\xi}\right),$$

$$u_2 = \xi^{-\frac{7}{10}}(1-\xi^2)^{\frac{7}{20}}\varphi_1\left(\frac{\xi+1}{2\xi}\right)\varphi_2\left(\frac{\xi-1}{2\xi}\right),$$

$$u_3 = \xi^{-\frac{7}{10}}(1-\xi^2)^{\frac{7}{20}}\varphi_2\left(\frac{\xi+1}{2\xi}\right)\varphi_1\left(\frac{\xi-1}{2\xi}\right),$$

$$u_4 = \xi^{-\frac{7}{10}}(1-\xi^2)^{\frac{7}{20}}\varphi_2\left(\frac{\xi+1}{2\xi}\right)\varphi_2\left(\frac{\xi-1}{2\xi}\right),$$

saranno quattro integrali fondamentali dell'equazione differenziale del quart'ordine (2).

Per le φ si trovano facilmente le espressioni:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\eta) &= F\left(\frac{7}{20},\frac{17}{20},\frac{7}{5},\eta\right)\\ \varphi_2(\eta) &= \eta^{-\frac{2}{5}}F\left(-\frac{1}{20},\frac{9}{20},\frac{3}{5},\eta\right)\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

che valgono per mod $\eta < 1$; e le:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\eta) &= \eta^{-\frac{7}{20}}F\left(-\frac{1}{20},\frac{7}{20},\frac{1}{2},\frac{1}{\eta}\right)\\ \varphi_2(\eta) &= \eta^{-\frac{17}{20}}F\left(\frac{9}{20},\frac{17}{20},\frac{3}{2},\frac{1}{\eta}\right)\end{aligned}\right\}\quad(c)$$

che valgono per mod $\eta > 1$.

12. Per ottenere le formule delle radici della:

$$y^5 + y - x = 0$$

mediante gli integrali (b) (c), si devono distinguere i quattro casi:

$$\begin{array}{lll}
\text{I} & \text{mod}\,\dfrac{\xi+1}{2\xi} > 1\,, & \text{mod}\,\dfrac{\xi-1}{2\xi} > 1\,;\\
\text{II} & \text{mod}\,\dfrac{\xi+1}{2\xi} > 1\,, & \text{mod}\,\dfrac{\xi-1}{2\xi} < 1\,;\\
\text{III} & \text{mod}\,\dfrac{\xi+1}{2\xi} < 1\,, & \text{mod}\,\dfrac{\xi-1}{2\xi} > 1\,;\\
\text{IV} & \text{mod}\,\dfrac{\xi+1}{2\xi} < 1\,, & \text{mod}\,\dfrac{\xi-1}{2\xi} < 1\,.
\end{array}$$

Il caso in cui uno dei moduli sia eguale ad 1, o sieno entrambi eguali ad 1, si potrà considerare come un caso limite, perchè le F delle (b) (c) sono ancora convergenti per mod $\eta = 1$.

Consideriamo ora, ad esempio, il primo caso.

In questo, posto:

$$\psi_1 = F\left(-\frac{1}{20}, \frac{7}{20}, \frac{1}{2}, \frac{2\xi}{1+\xi}\right), \quad \theta_1 = F\left(-\frac{1}{20}, \frac{7}{20}, \frac{1}{2}, \frac{2\xi}{\xi-1}\right)$$

$$\psi_2 = F\left(\frac{9}{20}, \frac{17}{20}, \frac{3}{2}, \frac{2\xi}{1+\xi}\right), \quad \theta_2 = F\left(\frac{9}{20}, \frac{17}{20}, \frac{3}{2}, \frac{2\xi}{\xi-1}\right)$$

le:

$$u_1 = \psi_1\theta_1, \quad u_2 = \xi^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}\psi_1\theta_2, \quad u_3 = \xi^{\frac{1}{2}}(1+\xi)^{-\frac{1}{2}}\psi_2\theta_1, \quad u_4 = \xi(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\psi_2\theta_2,$$

saranno quattro integrali fondamentali della (2); e le radici della (1) avranno la forma:

$$y_r = A_r\psi_1\theta_1 + B_r\xi^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}\psi_1\theta_2 + C_r\xi^{\frac{1}{2}}(1+\xi)^{-\frac{1}{2}}\psi_2\theta_1 + D_r\xi(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\psi_2\theta_2.$$

13. Per determinare le costanti, si osservi in primo luogo che, quando ξ tende a zero, le ψ, θ hanno per limiti l'unità; perciò indicando con $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ le radici quarte dell'unità negativa, sarà:

$$A_0 = 0, \qquad A_r = \delta_r \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

Osservando poi che le derivate delle ψ, θ, rispetto a ξ, hanno un limite finito, quando ξ tende a zero, e che:

$$\frac{dy_r}{d\xi} = K\xi^{-\frac{1}{2}}(1-\xi^2)^{-\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{5y^4+1},$$

in cui:

$$K = \frac{2}{5\sqrt[4]{5}},$$

si troverà:

$$B_0 + C_0 = 2K, \qquad B_r + C_r = -\frac{1}{2}K.$$

Inoltre, essendo y_r una radice della (1), iy_r è una radice dell'equazione che si ottiene ponendo nella (1) ix in luogo di x, il che equivale a porre $-\xi$ in luogo di ξ; si troverà quindi:

$$iA_r = A_s, \qquad B_r = C_s, \qquad C_r = B_s, \qquad iD_r = -D_s,$$

ossia, ponendo:

$$\delta_2 = i\delta_1, \qquad \delta_4 = i\delta_3,$$

$$B_0 = C_0 = K, \qquad D_0 = 0,$$

$$B_2 = C_1, \qquad C_2 = B_1, \qquad B_4 = C_3, \qquad C_4 = B_3.$$

Ora, indicando con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ delle quantità che non tendono all'infinito quando ξ tende a zero, si ha:

$$\psi_1\theta_1 = 1 + \lambda_1\xi^2, \qquad \psi_1\theta_2 = 1 - \frac{29}{50}\xi + \lambda_2\xi^2,$$

$$\psi_2\theta_1 = 1 + \frac{29}{50}\xi + \lambda_3\xi^2, \qquad \psi_2\theta_2 = 1 + \lambda_4\xi^2,$$

$$(1-\xi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\xi + \mu_1\xi^2, \quad (1+\xi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\xi + \mu_2\xi^2, \quad (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \mu_3\xi^2,$$

per le quali la formula di y_r diviene:

$$y_r = \delta_r(1+\lambda_1\xi^2) - \frac{1}{2}K\xi^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{25}(B_r - C_r)\xi^{\frac{3}{2}} + \mu_4\xi^{\frac{5}{2}} + D_r\xi .$$

Mediante questa si avrà:

$$D_r = \lim\left((y_r - \delta_r)\xi^{-1} + \frac{1}{2}K\xi^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{8}K^2\delta_r^3 ,$$

e, in conseguenza:

$$-\frac{2}{25}(B_r - C_r) = \lim\left((y_r - \delta_r)\xi^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}K\xi^{-1} - \frac{5}{8}K^2\delta_r^3\xi^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{4}K^3\delta_r^2 .$$

Riassumendo, le costanti sono date dalle formule:

$$\begin{array}{lllll}
A_0 = 0 , & A_1 = \delta , & A_2 = i\delta , & A_3 = -\delta , & A_4 = -i\delta , \\
B_0 = K , & B_1 = -\frac{K}{4}(1+i\sqrt{5}) , & B_2 = -\frac{K}{4}(1-i\sqrt{5}) , & B_3 = B_1 , & B_4 = B_2 , \\
C_0 = K , & C_1 = B_2 , & C_2 = B_1 , & C_3 = B_2 , & C_4 = B_1 , \\
D_0 = 0 , & D_1 = \frac{5}{8}K^2\delta^3 , & D_2 = -iD_1 , & D_3 = -D_1 , & D_4 = iD_1 ,
\end{array}$$

nelle quali:

$$K = \frac{2}{5\sqrt[4]{5}} ,$$

e δ significa una radice quarta dell'unità negativa.

IV.

14. Nella Memoria, citata a pag. 232, Brioschi ha dimostrato che le radici quadrate delle radici della *risolvente*:

$$y^6 + 10y^3 - 12xy + 5 = 0 \quad (^1) \tag{10}$$

soddisfanno all'equazione differenziale lineare:

$$200(x^3-1)\frac{d^3u}{dx^3} + 900x^2\frac{d^2u}{dx^2} + 578x\frac{du}{dx} - 11u = 0 \tag{11}$$

le cui soluzioni sono forme quadratiche di due integrali fondamentali dell'ipergeometrica:

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}\xi\right)\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{11}{3600}\eta = 0 ,$$

nella quale $\xi = x^3$; e che, in conseguenza, le radici della (10) si possono esprimere mediante serie ipergeometriche.

Qui darò le espressioni di quelle radici mediante serie ipergeometriche del second'ordine, ma prima dimostrerò che all'equazione differenziale (11) si può pervenire con metodo simile a quello adoperato al n. 3.

(¹) Mediante le radici di quest'equazione del sesto grado si possono esprimere, razionalmente, i quadrati delle radici d'un'equazione del quinto grado, alla quale può essere ridotta l'equazione generale per mezzo di due equazioni quadratiche (Veggansi le Memorie del Brioschi, *Sull'equazione del quinto grado*, e quella del sig. Kiepert, *Auflösung der Gleichungen fünften Grades*, Borchardt, vol. 87).

15. I determinanti, indicati colle lettere D e Q al n. 2 sono dati, per l'equazione (10), dalle:

$$D = 12^3 . 10^5 . 54 (x^3 - 1)^2$$
$$Q = - 10^3 . 6^4 (x^3 - 1)(4y^5 + 38y^2 - 50x) ;$$

perciò si avrà:

$$12^3 . 10^5 . 54 (x^3 - 1)^2 y'^2 = - 10^3 . 6^4 (x^3 - 1)(4y^5 + 38y^2 - 50x) . 12^2 y^2 ,$$

ossia

$$25 (x^3 - 1) y'^2 = y^4 + xy^2 + 10y ,$$

la quale, posto:

$$y = u^2 ,$$

diviene:

$$100 (x^3 - 1) u'^2 = u^6 + xu^2 + 10 ,$$

ossia:

$$1200 (x^3 - 1) u'^2 = u^{12} + 22u^6 + 125 .$$

Da questa, colla derivazione, si ricava:

$$1200 \left(2 (x^3 - 1) u'' + 3x^2 u' \right) = 12u^{11} + 132u^5 ,$$

$$1200 \left(2 (x^3 - 1) u''' + 9x^2 u'' + 6xu' \right) = 132 (u^{10} u' + 5u^4 u') ,$$

ma dalla (10) ossia dalla:

$$u^{12} + 10u^6 - 12xu^2 + 5 = 0 ,$$

risulta:

$$u^{10} u' + 5u^4 u' = 2xu' + u ;$$

epperciò sarà:

$$1200 \left(2 (x^3 - 1) u''' + 9x^2 u'' + 6xu' \right) = 264xu' + 132u ,$$

ossia:

$$200 (x^3 - 1) u''' + 900x^2 u'' + 578xu' - 11u = 0 .$$

16. Colla sostituzione:

$$x^3 = \xi ,$$

la (11) si trasforma nella:

$$\xi^2 (\xi - 1) \frac{d^3 u}{d\xi^3} + \xi \left(\frac{7}{2} \xi - 2 \right) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(\frac{1389}{900} \xi - \frac{2}{9} \right) \frac{du}{d\xi} - \frac{11}{5400} u = 0 \qquad (11')$$

Ora si trova facilmente che la (11') è soddisfatta, per mod $\xi < 1$, dalle:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= F\left(-\frac{1}{30}, \frac{5}{30}, \frac{11}{30}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \xi \right) \\ U_2 = \xi^{\frac{1}{3}} u_2 &= \xi^{\frac{1}{3}} F\left(\frac{9}{30}, \frac{15}{30}, \frac{21}{30}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \xi \right) \\ U_3 = \xi^{\frac{2}{3}} u_3 &= \xi^{\frac{2}{3}} F\left(\frac{19}{30}, \frac{25}{30}, \frac{31}{30}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \xi \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

le quali costituiscono un sistema d'integrali fondamentali; e che, per mod $\xi > 1$,

essa ammette i tre integrali fondamentali:

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= z^{-\frac{1}{30}} v_1 = z^{-\frac{1}{30}} F\left(-\frac{1}{30}, \frac{9}{30}, \frac{19}{30}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, z\right) \\
V_2 &= z^{\frac{5}{30}} v_2 = z^{\frac{5}{30}} F\left(\frac{5}{30}, \frac{15}{30}, \frac{25}{30}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, z\right) \\
V_3 &= z^{\frac{11}{30}} v_3 = z^{\frac{11}{30}} F\left(\frac{11}{30}, \frac{21}{30}, \frac{31}{30}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, z\right)
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

in cui:

$$z = \frac{1}{\xi}.$$

È da osservare che le sei serie u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 sono convergenti anche quando il modulo della variabile è eguale all'unità.

17. Risulta da quanto precede che, per $\mathrm{mod}\, \xi \leq 1$, le radici quadrate delle radici della (10) hanno la forma:

$$\sqrt{y_r} = a_r u_1 + b_r x u_2 + c_r x^2 u_3,$$

in cui le u_1, u_2, u_3 sono date dalle (12), e le a_r, b_r, c_r significano costanti.

Per determinarle, si osservi che, quando x tende a zero, le y hanno per limiti le radici della:

$$y^6 + 10y^3 + 5 = 0,$$

e che, in conseguenza, le a sono le radici quadrate delle radici di quest'equazione. Si troverà poi:

$$b_r = \lim\,(\sqrt{y_r} - a_r)\, x^{-1} = \frac{1}{a_r^3\,(a_r^6 + 5)},$$

$$c_r = \lim\left((\sqrt{y_r} - a_r)\, x^{-2} - b_r \,.\, x^{-1}\right) = -\frac{7a_r^6 + 5}{40a_r^7\,(a_r^6 + 5)}.$$

Per $\mathrm{mod}\, \xi \geq 1$ le radici quadrate delle radici della (10) hanno la forma:

$$\sqrt{y_r} = \alpha_r z^{-\frac{1}{30}} v_1 + \beta_r z^{\frac{5}{30}} v_2 + \gamma_r z^{\frac{11}{30}} v_3,$$

in cui le v sono date dalle (13).

Le costanti si determinano facilmente osservando che, quando z tende a zero, posto:

$$\sqrt{y z^{\frac{1}{30}}} = \sqrt{\omega},$$

una delle ω ha per limite zero, e le altre hanno per limiti le quantità:

$$\varepsilon_r^2 \sqrt[5]{12},$$

in cui ε_r significa una radice quinta dell'unità.

E propriamente si trova:

$$\alpha_0 = 0, \qquad \beta_0 = \sqrt{\frac{5}{12}} \qquad \gamma_0 = 0,$$

$$\alpha_r = \varepsilon \sqrt[10]{12}, \qquad \beta_r = -\frac{1}{\sqrt{12}}, \qquad \gamma_r = -\frac{1}{12\sqrt[10]{12}}\varepsilon_r^4.$$

Di una classe d'equazioni differenziali lineari del quart'ordine, integrabile per serie ipergeometriche.

Nota del prof. DAVIDE BESSO

approvata con relazione al Presidente

nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

L'equazione lineare del quart'ordine soddisfatta dalle radici della:

$$y^5 + y - x = 0,$$

è un caso molto particolare della:

$$\varphi y^{\mathrm{IV}} + a\varphi' y''' + b\varphi'' y'' + c\varphi''' y' + h\varphi^{\mathrm{IV}} y = 0 \qquad (1)$$

in cui φ significa una funzione intera del quarto grado e le a, b, c, h sono costanti. In questo caso particolare, la sostituzione:

$$y = \varphi^{-\frac{1}{2}} u,$$

trasforma l'equazione in altra, che è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni di due equazioni del second'ordine prive del secondo termine, le quali si possono ridurre a due ipergeometriche ([1]). Di qui nasce la ricerca di altri casi in cui la (1) si possa in quel modo ridurre a due equazioni del second'ordine, e di altri casi in cui queste due equazioni si possano ridurre ad equazioni ipergeometriche: tale ricerca è l'oggetto della presente Nota.

1. Colla sostituzione:

$$y = \varphi^{\lambda} u,$$

la:

$$\varphi y^{\mathrm{IV}} + a\varphi' y''' + b\varphi'' y'' + c\varphi''' y' + h\varphi^{\mathrm{IV}} y = 0 \qquad (1)$$

si trasforma nella:

$$u^{\mathrm{IV}} + \mathrm{P}u''' + \mathrm{Q}u'' + \mathrm{R}u' + \mathrm{S}u = 0 \qquad (2)$$

in cui:

$$\mathrm{P} = (4\lambda + a)\frac{\varphi'}{\varphi},$$

$$\mathrm{Q} = (6\lambda + b)\frac{\varphi''}{\varphi} + \Big(6\lambda(\lambda - 1) + 3a\lambda\Big)\frac{\varphi'^2}{\varphi^2},$$

$$\mathrm{R} = (4\lambda + c)\frac{\varphi'''}{\varphi} + \Big(12\lambda(\lambda - 1) + (3a + 2b)\lambda\Big)\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi^2} + \lambda(\lambda - 1)(4\lambda + 3a - 8)\frac{\varphi'^3}{\varphi^3},$$

$$\mathrm{S} = (\lambda + h)\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}}{\varphi} + \Big(4\lambda(\lambda - 1) + (a + c)\lambda\Big)\frac{\varphi'\varphi'''}{\varphi^2} + \Big(6\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 3a\lambda(\lambda - 1) + b\lambda(\lambda - 1)\Big)\frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi^3}$$
$$+ \Big(3\lambda(\lambda - 1) + b\lambda\Big)\frac{\varphi''^2}{\varphi^2} + \Big(\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + a\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\Big)\frac{\varphi'^4}{\varphi^4}.$$

([1]) Cfr. la Memoria: *Sulla equazione del quinto grado.*

Ora, determinate le due funzioni σ, ν, colle:

$$\sigma = \mathrm{K} e^{-\int \mathrm{P} dx} \quad (3) \qquad \nu = \frac{1}{2} \mathrm{Q}, \tag{4}$$

in cui K significa una costante, la (2) sarà soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle:

$$\mathrm{Y}'' + \frac{1}{2} (\nu + \sigma) \mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z}'' + \frac{1}{2} (\nu - \sigma) \mathrm{Z} = 0, \tag{5}$$

quando sieno verificate le:

$$\mathrm{R} = 3\nu' - 2\nu \frac{\sigma'}{\sigma} \tag{6}$$

$$\mathrm{S} = \sigma^2 + \nu'' - \nu' \frac{\sigma'}{\sigma} \text{ (1)} \tag{7}$$

Coi precedenti valori di P, Q, R, S si trova che la (6) è soddisfatta, qualunque sia la funzione φ, quando sono verificate le:

$$\lambda - \frac{1}{5} c + \frac{3}{10} b = 0 \tag{8}$$

$$30\lambda^2 + \lambda (12a + 2b - 15) + ab - \frac{3}{2} b = 0 \tag{9}$$

$$20\lambda^2 + 15\lambda (a - 2) + 3a^2 - 12a + 10 = 0 \tag{10}$$

e che la (7) è soddisfatta, qualunque sia la funzione intera del quarto grado φ, quando sono verificate le:

$$8\lambda + 2a = 1 \tag{11}$$

$$\mathrm{K}^2 + \left(2\lambda + \frac{1}{2} b - h\right) \varphi^{\mathrm{IV}} = 0 \tag{12}$$

$$14\lambda^2 + \lambda (5a + 2b - c - 8) + \frac{1}{2} b (a - 2) = 0 \tag{13}$$

$$18\lambda^3 + \lambda^2 (15a - b - 48) + \lambda\left((a-2)(3a-9) - 6a + b + 6\right) - \frac{1}{2} b (a-2) = 0 \tag{14}$$

$$3\lambda^2 + \lambda (3a - b - 6) - \frac{1}{2} b = 0 \tag{15}$$

$$\lambda^3 + (a + 18) \lambda^2 + (15a - 31) \lambda + (a - 3)(3a - 4) = 0. \tag{16}$$

Eliminando a dalle (10) (11) si ottiene la:

$$8\lambda^2 + \frac{27}{2} \lambda + \frac{19}{4} = 0,$$

che è soddisfatta da:

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{19}{16} \end{cases}$$

Per:

$$\lambda = -\frac{1}{2},$$

(1) Veggasi la Memoria: *Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second' ordine.*

la (11) dà:

$$a = \frac{5}{2},$$

la (9) è verificata qualunque sia b, la (8) dà:

$$2c - 3b + 5 = 0,$$

le (13) (14) (15) (16) sono identicamente soddisfatte, e dalla (12) si ricava:

$$K = \sqrt{\left(h - \frac{1}{2} b + 1\right)\varphi^{IV}}.$$

Si conchiude:

L' equazione:

$$\varphi y^{IV} + \frac{5}{2} \varphi' y''' + b\varphi'' y'' + c\varphi''' y' + h\varphi^{IV} y = 0$$

nella quale φ significa una funzione intera del quarto grado, e le costanti sono legate dalla sola relazione:

$$2c - 3b + 5 = 0,$$

ha la proprietà che, posto:

$$y = \varphi^{-\frac{1}{2}} u,$$

la trasformata in u è soddisfatta dai prodotti delle coppie di soluzioni delle:

$$Y'' + \rho Y = 0, \qquad Z'' + \rho_1 Z = 0,$$

in cui:

$$\rho = \frac{1}{4}(b-3)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{3}{16}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(h - \frac{1}{2} b + 1\right)\varphi^{IV}} \, . \, \varphi^{-\frac{1}{2}},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{4}(b-3)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{3}{16}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(h - \frac{1}{2} b + 1\right)\varphi^{IV}} \, . \, \varphi^{-\frac{1}{2}},$$

purchè non sia:

$$h - \frac{1}{2} b + 1 = 0.$$

2. Nel caso particolare:

$$\varphi = x^4 + a_0,$$

posto:

$$x^4 = a_0 \frac{\xi^2}{1 - \xi^2},$$

le due equazioni del second' ordine si trasformano nelle:

$$4\xi(1-\xi^2)^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (1-\xi^2)(2-12\xi^2)\frac{dy}{d\xi} + \left(3\xi^3 + 3(b-3)\xi \pm \frac{1}{2} K\right) y = 0 \quad (17)$$

che si deducono l' una dall'altra collo scambio di ξ in $-\xi$.

Consideriamo ora l'equazione più generale:

$$\xi(1-\xi^2)^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (1-\xi^2)(d - g\xi^2) + (f\xi^3 + b_1 \xi + k_1) y = 0 \qquad (18)$$

Colla sostituzione:

$$y = (1-\xi)^{\gamma} (1+\xi)^{\varepsilon} u,$$

essa si trasforma nella:

$$\xi(1-\xi^2)^2\frac{d^2u}{d\xi^2}+P\frac{du}{d\xi}+Qu=0,$$

in cui:

$$P=(1-\xi^2)\Big(-(g+2\mu+2\nu)\xi^2+2(\nu-\mu)\xi+d\Big)$$

$$Q=\xi^3\Big(2\mu\nu+\mu^2+\nu^2+(\mu+\nu)(g-1)+f\Big)+\xi^2\Big(2(\mu^2-\nu^2)+(\mu-\nu)(g-2)\Big)+$$
$$+\xi\Big(-2\mu\nu+\mu^2+\nu^2-(\mu+\nu)(d+1)+b_1\Big)+k_1-(\mu-\nu)d;$$

e supponendo che sieno verificate le:

$$\left.\begin{aligned}4\mu^2+2(g-d-2)\mu+f+b_1+k_1=0\\4\nu^2+2(g-d-2)\nu+f+b_1-k_1=0\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

sarà:

$$Q=(1-\xi^2)\Big[-\Big((\mu+\nu)^2+(\mu+\nu)(g-1)+f\Big)\xi-(\mu-\nu)\Big(2(\mu+\nu)+g-2\Big)\Big],$$

e la (18) sarà trasformata nella:

$$\xi(1-\xi^2)\frac{d^2u}{d\xi^2}+(A\xi^2+B\xi+C)\frac{d^2u}{d\xi}+(D\xi+E)u=0\qquad(18')$$

nella quale:

$$\begin{aligned}A&=-2(\mu+\nu)-g\\B&=2(\nu-\mu)\\C&=d\\D&=-(\mu+\nu)^2-(\mu+\nu)(g-1)-f\\E&=-(\mu-\nu)\Big(2(\mu+\nu)+g-2\Big)\end{aligned}$$

Ora le due sostituzioni:

$$\xi=\frac{1}{z},\qquad u=z^\lambda v,$$

trasformano la (18′) nella:

$$z(z^2-1)\frac{d^2v}{dz^2}+\Big[(2\lambda+2-C)z^2-Bz-(2\lambda+A+2)\Big]\frac{dv}{dz}+$$
$$+\Big[\lambda(\lambda-C+1)z+(E-\lambda B)+\Big(D-\lambda(\lambda+A+1)\Big)z^{-1}\Big]v=0\qquad(18'')$$

e questa si riduce ad un' ipergeometrica quando sieno soddisfatte le:

$$D-\lambda(\lambda+A+1)=0\qquad(20)$$
$$2\lambda+A+2=0\qquad(21)$$
$$E-\lambda B=0.\qquad(22)$$

Col valore di λ ricavato dalla (22), cioè:

$$\lambda=\mu+\nu+\frac{1}{2}g-1,$$

la (21) si riduce ad un' identità; ma, perchè sia soddisfatta la (20), dev' essere:

$$g^2-2g-4f=0.\qquad(23)$$

Di qui risulta:

L' equazione :

$$\xi(1-\xi^2)^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+(1-\xi^2)(d-g\xi^2)\frac{dy}{d\xi}+(f\xi^3+b_1\xi+k_1)y=0$$

in cui le costanti sono vincolate dalla sola condizione:

$$g^2-2g-4f=0,$$

si può ridurre ad un' ipergeometrica, colle sostituzioni :

$$y=(1-\xi)^{\mu}(1+\xi)\ u,\qquad \xi=\frac{1}{z},\qquad u=z^{\lambda}v,$$

in cui μ *è una radice della :*

$$4\mu^2+2(g-d-2)\mu+f+b_1+k_1=0,$$

ν *è una radice della:*

$$4\nu^2+2(g-d-2)\nu+f+b_1-k_1=0,$$

e :

$$\lambda=\mu+\nu+\tfrac{1}{2}g-1.$$

L' equazione (17) ha la proprietà espressa dalla (23); perciò :

L' equazione del quart' ordine:

$$(x^4+a_0)y^{IV}+10x^3y'''+12bx^2y''+24cxy'+24hy=0$$

in cui le costanti b, c *sono vincolate dalla relazione :*

$$2c-3b+5=0,$$

e le b, h *non verificano la :*

$$h-\frac{1}{2}b+1=0,$$

può essere integrata mediante serie ipergeometriche.

3. Colla sostituzione :

$$x^4=-a_0\xi$$

l'equazione:

$$(x^4+a_0)y^{IV}+10x^3y'''+12bx^2y''+24cxy'+24hy=0\qquad\text{(I)}$$

si trasforma nella:

$$\xi^3(\xi-1)\frac{d^4y}{d\xi^4}+\xi^2(A_1\xi-B_1)\frac{d^3y}{d\xi^3}+\xi(C_1\xi-I_1)\frac{d^2y}{d\xi^2}+(E_1\xi-H_1)\frac{dy}{d\xi}+G_1y=0\qquad\text{(I')}$$

in cui :

$$A_1=7,\qquad C_1=\frac{141}{16}+\frac{3}{4}b,\qquad E_1=\frac{33}{32}+\frac{1}{16}(9b+6c)$$

$$B_1=\frac{9}{2},\qquad I_1=\frac{51}{16},\qquad H_1=\frac{3}{32},\qquad G_1=\frac{3}{32}h.$$

Ora si dimostra facilmente che la (I') è soddisfatta, per mod $\xi<1$, dalla serie ipergeometrica del terz' ordine:

$$F\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\xi\right),$$

in cui $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ significano le radici della:

$$\alpha^4-\alpha^3+\left(\frac{3}{4}b-\frac{19}{16}\right)\alpha^2-\left(\frac{7}{32}+\frac{3}{8}c-\frac{3}{16}b\right)\alpha+\frac{3}{32}h=0\ (^1).$$

(1) Si può vedere la citata Memoria: *Sull'equazione del quinto grado.*

D'altra parte la (I) può essere integrata mediante serie ipergeometriche del prim' ordine, quando sia:

$$2c - 3b + 5 = 0,$$

e non sia:

$$h - \frac{1}{2} b + 1 = 0.$$

Dunque:

La serie ipergeometrica del terz' ordine:

$$F\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \xi\right),$$

in cui le α sono le radici della:

$$\alpha^4 - \alpha^3 + \left(\frac{3}{4} b - \frac{19}{16}\right)\alpha^2 - \left(\frac{3}{8} b - \frac{23}{32}\right)\alpha + \frac{3}{32} h = 0,$$

può essere espressa, in termini finiti, mediante serie ipergeometriche del prim'ordine, purchè non sia:

$$h - \frac{1}{2} b + 1 = 0.$$

Di una classe d'equazioni differenziali lineari del terz'ordine, integrabile per serie ipergeometriche.

Nota del prof. DAVIDE BESSO

approvata con relazione al Presidente

nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

---

1. L'equazione differenziale lineare soddisfatta dalle radici della:

$$u^{12}+10u^6-12xu^2+10=0\,,$$

che può essere integrata mediante serie ipergeometriche, ed anche per mezzo di serie ipergeometriche del second'ordine ([1]), è un caso molto particolare della:

$$\varphi y'''+\frac{3}{2}\varphi' y''+b\varphi'' y'+\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}\right)\varphi''' y=0\,, \tag{1}$$

e questa, come facilmente si dimostra, è soddisfatta, qualunque sia la funzione φ, dai prodotti delle coppie di soluzioni della:

$$z''+pz'+qz=0 \tag{2}$$

in cui:

$$p=\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}\,,\qquad q=\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi''}{\varphi}\,.$$

Nel caso particolare:

$$\varphi=x^3+a\,,$$

posto:

$$x^3=-a\xi\,,$$

le (1) (2) si trasformano nelle:

$$\xi^2(\xi-1)\frac{d^3y}{d\xi^2}+\xi(A\xi-B)\frac{d^2y}{d\xi^2}+(C\xi-D)\frac{dy}{d\xi}+Ey=0 \tag{1'}$$

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2z}{d\xi^2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)\frac{dz}{d\xi}+hz=0 \tag{2'}$$

nelle quali:

$$A=\frac{7}{2}\,,\qquad C=\frac{14}{9}-4h\,,$$

$$B=2\,,\qquad D=\frac{2}{9}\,,\qquad E=-\frac{11}{5400}\,,\qquad h=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-b\right).$$

([1]) Veggasi la Memoria: *Sull' equazione del quinto grado.*

Dunque gli integrali della (1') sono forme quadratiche di due integrali fondamentali della (2'), epperciò si possono esprimere mediante serie ipergeometriche (¹).

2. Ma la (1') si può integrare eziandio per mezzo di serie ipergeometriche del second' ordine. Si trova p. e. che per mod $\xi < 1$, essa è soddisfatta dalla:

$$F\left(a_1, a_2, a_3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \xi\right)$$

in cui a_1, a_2, a_3 significano le radici della:

$$a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \left(\frac{1}{18} - 4h\right)a + \frac{2}{3}h = 0.$$

D'altra parte, per mod $\xi < 1$, la (2') ammette gli integrali fondamentali:

$$F_1 = F\left(\alpha, \beta, \frac{2}{3}, \xi\right),$$

$$\xi^{\frac{1}{3}} F_2 = \xi^{\frac{1}{3}} F\left(\alpha + \frac{1}{3}, \beta + \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \xi\right),$$

in cui α e β sono le radici della:

$$g^2 - \frac{1}{6}g - h = 0.$$

In conseguenza sarà, per mod $\xi \leqq 1$:

$$F\left(a_1, a_2, a_3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \xi\right) = C_1 F_1^2 + C_2 \xi^{\frac{1}{3}} F_1 F_2 + C_3 F_2^2 \xi^{\frac{2}{3}},$$

e si troverà facilmente:

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 0,$$

epperciò:

$$F\left(a_1, a_2, a_3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \xi\right) = \left[F\left(\alpha, \beta, \frac{2}{3}, \xi\right)\right]^2.$$

(¹) A questa classe d'equazioni del terz' ordine appartiene pure l'equazione:

$$(256x^3 + 27)\frac{d^3y}{dx^3} + 1152x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 688x\frac{dy}{dx} - 40y = 0,$$

che è soddisfatta dalle radici della:

$$y^4 + y - x = 0.$$

In questo caso particolare è:

$$h = \frac{5}{576},$$

epperciò l'integrale della:

$$\xi(1 - \xi)\frac{d^2z}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}\xi\right)\frac{dz}{d\xi} + \frac{5}{576}z = 0$$

si può esprimere per radicali.

Sull' attrito del vapor d'acqua ad alte temperature.
Memoria del dott. MICHELE CANTONE

approvata con relazione al Presidente

nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

Le accurate ricerche di molti fisici hanno portato al risultato che la legge teorica di Maxwell (¹) sulle variazioni del coefficiente d' attrito colla temperatura non è verificata sperimentalmente: secondo quella legge infatti il coefficiente stesso dovrebbe crescere proporzionalmente alla radice quadrata della temperatura assoluta e perciò la legge di variazione dovrebbe essere la stessa per tutti i gas, mentre, se si denotano con η_0 ed η i cofficienti d'attrito a 0^0 e t^0, le esperienze sinora fatte portano a relazioni empiriche della forma:

$$\eta = \eta_0 \; (1 + \alpha t)^n,$$

ove α è il coefficiente di dilatazione dei gas e l' esponente n assume valori diversi per i diversi gas ma tutti maggiori di $\frac{1}{2}$. Per citare qualche esempio, si avrebbe per l' idrogeno (²) un valore compreso fra 0,60 e 0,70; per l' ossido di carbonio, l' azoto, l'aria, l'ossigeno quel valore sarebbe di circa 0,75; per l'anidride carbonica, l'etilene, il cloruro di etile di circa 0,95. Si riteneva pertanto che l'esponente n non potesse superare l' unità anzi pareva che per i gas vicini al punto di liquefazione questo fosse un valor limite (³), se nonchè le esperienze di L. Mayer (⁴) sul vapore di benzina e quelle ultime di Koch (⁵) sul vapore di mercurio, mostrerebbero che quel limite può essere sorpassato notevolmente.

Sull'attrito del vapore d'acqua non si sono sinora fatte che esperienze a temperature ordinarie; nei due soli lavori che si hanno in proposito, quello cioè di Kundt e Warburg (⁶) e l'altro di Puluj (⁷), si è seguìto il metodo di oscillazione dei dischi e i risultati forniti dalle esperienze sono quasi coincidenti, avendo ottenuto Kundt e Warburg:

$$\eta = 0{,}0000975$$

per una temperatura di 20°, e Puluj:

$$\eta = 0{,}0000967$$

(¹) Phil. Mag S. IV, vol. 19.

(²) Puluj-Sitzungsan. d. Wiener Ak. 1876; Sitzungsb. 1876. — Warburg, Pogg. Ann. 1876. Bd. 159, S. 403. — Per gli altri gas V. Obermayer, Carls Repertorium 1876-1877.

(³) O. E. Mayer, *Die kinetische Theorie der Gase.* Breslau 1877, S. 160.

(⁴) Wied. Ann. Bd. 7, S. 497.

(⁵) Wied. Ann. Bd. 19, S. 857.

(⁶) Pogg. Ann. Bd. 155, S. 540.

(⁷) Carls Repertorium Bd. 15.

per la temperatura di 16°,7. Atteso il posto importante che occupa in fisica il vapor d'acqua e nella convinzione che ogni nuovo studio sull'attrito fornisca elementi utili per l'ulteriore sviluppo della teoria cinetica dei gas, mi è parso di qualche interesse studiare il modo di comportarsi di questo vapore relativamente all'attrito per temperature elevate e dedurre dal confronto dei miei risultati con quelli dei tre cennati sperimentatori il valore di η nella formula:

$$\eta = \eta_0 \ (1 + \alpha t)^n$$

Le temperature alle quali ho fatto le mie ricerche sono in prossimità del *cento*, e il metodo seguìto è quello dell'efflusso attraverso tubi capillari.

Le esperienze sono state fatte nel r. Istituto fisico dell'Università di Roma, il quale mi fornì gli apparecchi e i necessarî consigli.

L'apparecchio di cui mi son servito è nel suo assieme uno degli ordinarî bollitori che si adoperano nei laboratorî per la determinazione del *punto cento* dei termometri, si sono però avute nella sua costruzione cure speciali perchè fosse abbastanza solido da resistere alle pressioni cui dovea essere sottoposto e nello stesso tempo permettesse chiusure ermetiche.

Fig. 1.

Esso è rappresentato in sezione dalla fig. 1 della tavola annessa: la sua grande semplicità dispensandomi dal farne una dettagliata descrizione, dirò solo del modo come esso agisce. Il vapore che si forma in A attraversando il tubo capillare t passa nella concamerazione C da dove per il tubo h viene al refrigerante R e di là condensato passa a raccogliersi nel pallone P. La concamerazione esterna D, messa direttamente in comunicazione col recipiente A per mezzo di un largo foro f, serviva a mantenere in C la temperatura costante ed uguale molto prossimamente a quella del vapore in A: questa disposizione nel mentre ci assicurava delle condizioni del vapore all'uscita del tubo capillare, impediva che sulle pareti della concamerazione C si depositassero goccie di acqua. Del resto si è avuto cura di dare al coperchio conico m, che separa il recipiente A da D e C, una posizione inclinata, quale può

rilevarsi dalla figura, e si è procurato d'altra parte che nella congiunzione del tubo del refrigerante col recipiente non si producesse alcun salto, perchè così poteva ritenersi che, se pure traccie di vapore si fossero condensate in C, si sarebbero raccolte per intero nel tubo del condensatore. Il manometro a mercurio M permetteva di misurare l'eccesso della pressione alla quale si svolgeva il vapore su quella dell'atmosfera, la differenza di livello del mercurio nei due rami veniva letta per mezzo di un buon catetometro ed era ridotta a *zero* colle note formule dopo aver consultato il termometro x annesso al manometro. Il tubo l chiuso inferiormente era destinato a contenere il termometro che dava la temperatura d'ebollizione dell'acqua; si era attaccato sul suo prolungamento il tubo di vetro v perchè attraverso di esso potessero farsi le letture mentre tutto il termometro stava immerso nella glicerina di cui era piena la capsula lv: tale artifizio nel mentre non aggiungeva gravi difficoltà per la lettura delle temperature, impediva d'altra parte alla camera vuota del termometro di raffreddarsi e faceva quindi evitare gli errori di lettura dipendenti dalla distillazione del mercurio. L'altro tubo l_1, chiuso ancor esso inferiormente, conteneva immerso nella glicerina un piccolo apparecchio di vetro che facea parte del regolatore delle temperature, analogo a quello di Benoit [1]. La fig. 2 dà in sezione i particolari di questo pezzo: al tubo f è saldato in a un secondo tubo più largo che si chiude inferiormente in prossimità dell'orifizio di f; il mercurio riempie il tubo f per intero e il tubo p sino al livello A: al di sopra trovasi il liquido che deve venire portato alla temperatura del bollitoio alla sua tensione massima e che colle variazioni della sua forza elastica corrispondenti alle variazioni di temperatura del bagno regola l' efflusso del gas allo stesso modo come si effettua nell'apparecchio di Benoit. Il pezzo d'ottone r (fig. 1) che porta il tappo di gomma s con dentro il tubo capillare, serviva a separare il recipiente interno B dalla concamerazione C; perchè la chiusura fosse ermetica lo si è adattato sul coperchio di B coll'intermediario di un anello di kautscuk per mezzo di sei viti di pressione di cui due vedonsi rappresentate nel disegno. In modo analogo è stata fatta la chiusura superiore in b. Quando si volea fare un'esperienza, rimosso il coperchio b s'introduceva nello apparecchio il pezzo r, in cui precedentemente si era adattato il tappo s col tubo capillare t, si spingevano i dadi, di cui vanno munite le viti di pressione, il più che fosse possibile, e adattato colla stessa cura il pezzo b al coperchio superiore potevasi dar principio al riscaldamento.

Fig. 2.

L'acqua si versava in A per mezzo del tubo z munito di un robinetto a tenuta d'aria, e mediante questo stesso tubo si riportava l'acqua prima delle esperienze sempre allo stesso livello; il robinetto si teneva aperto durante il riscaldamento e si chiudeva solo circa dieci minuti dopo che l'acqua era entrata in ebollizione per mandar via tutta l'aria contenuta in A.

[1]) *Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures.* Tome I. p. C. 10

Per ottenere una ebollizione regolare non si è posto il fondo dell'apparecchio in contatto diretto delle fiamme, ma sul trepiede destinato a reggere il bollitoio era fissato un largo disco di lamiera di ferro e fra esso e il fondo dell'apparecchio trovavasi uno strato di sabbia. Si aggiunga a ciò che per la somministrazione del calore si adoperavano due lampade Bunsen di cui una era alimentata da un efflusso costante di gas, mentre l'altra, sulla quale soltanto agiva il regolatore, forniva delle quantità di calore sempre piccole relativamente a quelle date dalla prima. In tal modo il regolatore funzionava assai bene e si poteva avere una costanza tale nella temperatura di ebollizione che spesso le oscillazioni della pressione accennate dal manometro non oltrepassavano in due ore il millimetro, come si può verificare consultando i risultati delle esperienze in seguito esposti.

L'acqua proveniente dalla distillazione e che si raccoglieva nel pallone P veniva pesata su una bilancia che permetteva di valutare con sicurezza i mezzi decigrammi; una precisione maggiore sarebbe stata illusoria col metodo di sperimentare da me seguìto, mentre quella che si avea era tale da non introdurre per sè cause d'errore nel valore del coefficiente d'attrito.

Si son fatte delle esperienze preliminari per assicurarsi che il vapore all'uscita dal tubo capillare non conservasse un eccesso di pressione. Per questo si è forato il disco *b* e gli si è adattato un tubo che portava a un piccolo manometro a mercurio; messa in ebollizione l'acqua in A sotto forti pressioni, non si è constatata alcuna variazione di livello nel mercurio dei due rami; si è quindi ritenuto superfluo l'uso di quel manometro, e toltolo via si è richiuso il foro praticato in *b*.

Si è infine fatta anche la prova di resistenza dell'apparecchio: sostituito al tappo *s* un tappo chiuso si è compressa l'aria nel recipiente A mettendolo in comunicazione colla pompa per mezzo del tubo *z*, e si è spinta la pressione ad un limite che non dovea essere sorpassato nel corso delle ricerche; chiuso poscia il robinetto di cui quel tubo era munito, in circa un' ora non si ebbe a constatare dalle letture fatte sul manometro M abbassamento di sorta nella pressione, il che ci assicurava che l'apparecchio era in grado di funzionare.

Per i calcoli delle esperienze la formula di Poiseuille dà:

$$\eta = \frac{\pi}{8} \frac{p_a - p_e}{L\,V} r^4 \tau$$

ove η denota il coefficiente d'attrito, p_a la pressione del gas pria di attraversare il tubo capillare, p_e la pressione all'uscita, r ed L il raggio e la lunghezza del tubo, τ la durata dell'efflusso, e V il volume di gas che attraversa il tubo capillare ridotto alla pressione media fra le estreme p_a, p_e. Siffatta riduzione nel caso dei gas perfetti non offre alcuna difficoltà, essa si opera per mezzo delle formule:

$$V = \frac{V_a\, p_a}{\frac{p_a + p_e}{2}} \qquad V = \frac{V_e\, p_e}{\frac{p_a + p_e}{2}}$$

ove V_a V_e rappresentano i volumi del gas sotto le pressioni p_a, p_e e si adopera l'una o l'altra espressione a seconda che si conosca V_a o V_e.

Nel caso nostro si deve dedurre il volume dal peso del liquido condensato e di più si ha un vapore che passa dallo stato di saturazione a quello di vapore

soprariscaldato attraversando il tubo capillare; ci troviamo pertanto di fronte a una questione ardua non avendo nello stato attuale della scienza gli elementi necessarî per tener conto rigorosamente di quelle due condizioni. Koch [1] sperimentando sul vapore di mercurio con un metodo analogo a quello da me seguìto, dedusse il valore di V partendo dalla densità del vapore soprariscaldato e applicandogli le leggi di Boyle e Gay Lussac, però a me pare che se ci contentiamo di applicare per approssimazione a un vapore vicino al punto di saturazione la legge di Boyle, non conoscendo la sua vera legge di espansione, dobbiamo tener presente la condizione del vapore sotto la pressione p_a, epperò servendoci della formula:

$$V = 2 \cdot \frac{V_a \, p_a}{p_a + p_e}$$

dobbiamo prendere per V_a il volume corrispondente al vapore saturo sotto la pressione p_a. La termodinamica ci dà il mezzo di ottenere questo valore in modo tutto affatto teorico, ma fondato sui dati sperimentali forniti da Regnault per la tensione massima del vapore a diverse temperature e per il calor latente di evaporazione in funzione ancor esso della temperatura. Lo Zeuner [2] ha calcolato i valori del peso specifico del vapor d'acqua così dedotti ed ha dato la formula empirica:

$$\gamma = 0{,}6061 \ H^{0.9393}$$

che rappresenta in perfetto accordo coi risultati di quei calcoli la legge di variazione del peso specifico γ del vapor saturo colle pressioni H che gli corrispondono espresse in atmosfere. In prossimità del *punto cento* i valori di γ vanno sufficientemente di accordo con quelli ottenuti direttamente dalle esperienze di Fairbairn e Tate [3] e ancora di più con quelli avuti da Hirn [4]; solo si scosterebbero dai valori forniti dalla formula empirica di Herwig [5], ma qui voglio far notare che la legge di Herwig dedotta da esperienze fatte a pressioni generalmente basse non si può estendere a pressioni del vapor saturo che si avvicinano a quelle dell'atmosfera, e d'altra parte la formula:

$$V_1 = \frac{36{,}2}{p_1 \, \delta} \sqrt{a + t}$$

che dà il Wüllner [6] per determinare il volume specifico del vapor saturo a diverse temperature conformemente a quella legge e dalla quale si hanno valori molto discordanti da quelli di Zeuner, non si può applicare nel caso del vapor d'acqua a temperature vicine o superiori al *cento* perchè in essa si suppone che il vapore alla temperatura t e alla pressione di 760^{mm} possa ridursi allo stato di gas perfetto; sicchè senz'altro ci atterremo nei nostri calcoli ai valori dati dalla formula di Zeuner che sono, almeno sinora, i più attendibili per il caso nostro.

Così la espressione di η piglierà la forma:

$$\eta = \frac{\pi}{16} \, \frac{p_a^2 - p_e^2}{p_a \ L \ P} \, r^4 \, \tau \, \gamma$$

(1) V. Mem. cit. p. 866.

(2) Zeuner, *Théorie mécanique de la chaleur* etc. Paris 1869, p. 286.

(3) Phil. Mag. IV serie, vol. 21.

(4) Hirn, *Théorie méc. de la chaleur*. Paris 1862.

(5) Pogg. Ann. Bd. 137.

(6) Wüllner, *Leh. d. Experimentalphysik*. Leipzig 1875. Dr. Bd. S. 670.

ove P è il peso dell'acqua proveniente dalla distillazione e γ è espresso nel modo sopra indicato. Adottando il sistema di unità assolute fondato sul *centimetro*, *grammo*, *secondo* si avrà:

$$\eta = \frac{\pi \,.\, 13{,}5959 \,.\, 980{,}39 \,.\, 0{,}6061}{16 \,.\, 76^{0.9393}} \, \frac{h_a^2 - h_e^2}{h_a \, L \, P} \, h_a^{0.9393} \, r^4 \, \tau .$$

In questa formula 980,39 rappresenta il valore della gravità per Roma [1], 13,5959 la densità del mercurio a *zero*, ed h_a, h_e le altezze delle colonne di mercurio corrispondenti alle pressioni p_a, p_e.

Riducendo e portando su r, L la correzione per la temperatura, se si denota per k il coefficiente di dilatazione del vetro, la espressione di η assumerà la forma definitiva:

$$\eta = 27{,}146 \,.\, \frac{h_a^2 - h_e^2}{h_a^{0.0607} . L . P} \, r^4 \, \tau \, (1 + kt).$$

I raggi dei tubi adoperati nelle esperienze sono stati dedotti determinando con ogni cura la lunghezza e il peso di una colonna di mercurio introdotta nel tubo stesso. Si ebbe così:

$$r = 0{,}^{cm}0238 \text{ per il tubo I}$$
$$r = 0{,}^{cm}0229 \text{ per il tubo II.}$$

Nel corso delle esperienze si procurò che il vapor d'acqua non fosse mescolato a sostanze estranee, le quali mentre poteano alterare il fenomeno in esame avrebbero potuto anche far variare la sezione del tubo capillare. Per ovviare a questi inconvenienti s'introdusse sempre nel bollitoio acqua distillata e in tutte le esperienze pria che il tubo venisse introdotto nell'apparecchio si pulì lavandolo successivamente nell'acido nitrico, nell'acqua e nell'etere. Il tubo II ciò non pertanto lasciato nello apparecchio sin dal primo giorno che venne adoperato, diede per il coefficiente d'attrito valori che andavano assai d'accordo con quelli del tubo I, il qual fatto bastava ad assicurarmi che sebbene le mie esperienze fossero fatte servendomi di grandi quantità d'acqua, pure le condizioni di purezza del liquido erano tali da poterli ritenere sufficienti per i limiti di precisione che col mio metodo di sperimentare si poteano raggiungere.

Nelle due tabelle seguenti sono registrati i risultati delle ricerche coi due tubi: nella prima colonna si ha il numero d'ordine delle esperienze fatte a diversa temperatura, nella seconda vengono notati i valori delle differenze fra la pressione interna e l'esterna, esse rappresentano le letture fatte sul manometro M ridotte a *zero*; seguono nella terza i valori della pressione esterna misurata per mezzo di un barometro confrontato precedentemente col barometro normale del laboratorio e ridotta anch'essa a *zero*; la quarta colonna porta le temperature del vapore nel bollitoio calcolate per mezzo dei valori della seconda e terza colonna. I valori forniti direttamente dal termometro non erano molto differenti da questi così calcolati, però stante alcuni piccoli spostamenti del *punto cento* constatati per mezzo di apposite determinazioni a pressione ordinaria, si credette più conveniente servirsi delle temperature calcolate. Le cifre della quinta colonna rappresentano le durate dell'efflusso del

[1] Pisati e Pucci, Atti dell'Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol. XV.

vapore espresse in secondi e misurate per mezzo di un orologio da tasca avente un andamento assai regolare, quelle della settima i pesi dell'acqua raccolta nel pallone e finalmente quelle dell'ottava i valori del coefficiente d'attrito espressi in *grammi su centimetri quadrati.*

Tubo I. $r = 0,0238$ cm $L = 20,48$ cm

N. d'ordine delle esperienze	$h_a - h_e$	h_e	t	τ	P	η
1ª Esp.	24, 45 cm	76, 09 cm	108°, 01	5160″	63, 18 gr.	0, 000113 gr./cm²
2ª »	27, 26	76, 54	108, 95	2100	28, 50	0, 000116
» »	27, 34	76, 51	108, 97	2700	37, 60	0, 000114
3ª »	27, 01	74, 91	108, 41	4500	61, 15	0, 000113
4ª »	28, 99	74, 65	108, 90	1800	26, 75	0, 000112
» »	28, 92	74, 63	108, 88	1800	25, 60	0, 000117
5ª »	20, 28	75, 52	106, 60	5100	50, 60	0, 000114
» »	20, 20	75, 51	106, 58	1800	18, 20	0, 000111
» »	20, 20	75, 51	106, 58	900	8, 90	0, 000113
6ª »	22, 27	75, 48	107, 19	1800	19, 82	0, 000113
» »	23, 00	75, 42	107, 39	3600	40, 15	0, 000116

Tubo II. $r = 0,0229$ cm $L = 15,97$ cm

N. d'ordine delle esperienze	$h_a - h_e$	h_e	t	τ	P	η
1ª Esp.	24, 32 cm	74, 60 cm	107°, 54	1800″	28, 68 gr	0, 000112 gr./cm²
» »	24, 41	74, 59	107, 56	3600	51, 65	0, 000118
2ª »	23, 26	75, 22	107, 40	1800	27, 70	0, 000113
» »	23, 21	75, 22	107, 39	1800	26, 35	0, 000116
3ª »	22, 68	74, 55	107, 04	1800	25, 67	0, 000115
» »	22, 57	74, 52	107, 00	1800	25, 85	0, 000114

Calcolando colla formula adoperata da Koch avrei ottenuto per il coefficiente di attrito valori alquanto più piccoli di quelli sopra notati; per il primo valore della

seconda esperienza avrei avuto ad esempio 0,000112 invece di 0,000116, e nello stesso rapporto si sarebbero trovati diminuiti tutti gli altri: la differenza non è molto forte assolutamente parlando, ma trattandosi di valutare l'influenza della temperatura sul fenomeno in esame fondandosi su esperienze fatte con altri metodi a temperature basse, è tale da non poterla certamente trascurare.

Confrontando pertanto i valori di η, delle precedenti tabelle con quelli di Kundt e Warburg a 20° si può dedurre l'esponente n della formula:

$$\eta = \eta_0 \, (1 + \alpha t)^n$$

avendosi da essa:

$$n = \frac{\log \eta - \log \eta_1}{\log (1 + \alpha t) - \log (1 + \alpha t_1)}$$

Facendo $\eta_1 = 0,0000975$, $t_1 = 20$ e prendendo per α il coefficiente di dilatazione dei gas, ho calcolati i valori di n dai valori medî di η e t avuti nelle diverse esperienze e i risultati di questi calcoli sono indicati nelle due tabelle seguenti (¹).

TUBO I.

N. d'ordine delle esperienze	t	η	n
1ª Esp.	108°,01	0,000113	0,57
2ª »	108,96	115	0,61
3ª »	108,41	113	0,58
4ª »	108,89	114	0,60
5ª »	106,60	113	0,57
6ª »	107,32	115	0,63

TUBO II.

N. d'ordine delle esperienze	t	η	n
1ª Esp.	107°,56	0,000116	0,65
2ª »	107,40	115	0,62
3ª »	107,02	115	0,62

Non vi è certamente una coincidenza perfetta fra questi risultati, però è necessario osservare che anche operando con un gas a temperature non molto superiori a quelle dell'ambiente, si sono avuti per n valori discordanti non solo fra i diversi sperimentatori ma nelle cifre avute da uno stesso sperimentatore; se si pensa dunque alla grande difficoltà di operare con un vapore a così elevate temperature si può in certo modo rimaner soddisfatti dei risultati ottenuti, tanto più che essi non si scosterebbero molto da una legge che parmi esistere fra i valori dell'esponente n e

(¹) Calcolando in base al valore di Puluj si sarebbero avuti risultati quasi coincidenti.

il peso molecolare di un gas. Mettendo difatti in confronto questi elementi per i gas di cui si è sperimentato l'attrito a diverse temperature si trova che l'esponente n è tanto più grande quanto più forte è il peso molecolare, come si può rilevare dall'annesso quadro.

NOME DEL GAS	PESO MOLECOLARE	n
Idrogeno H_2	2	0,60—0,70
Ossido di carbonio CO . .	28	0,74
Etilene C_2H_4	28	0,96
Azoto N_2	28	0,74
Aria	. . . .	0,76
Ossigeno O_2	32	0,80
Protossido di azoto N_2O	44	0,93
Acido carbonico CO_2 . .	44	0,94
Cloruro di etile C_2H_5Cl	64,50	0,98
Mercurio Hg	200	1,60

Farebbe eccezione l'etilene, ma anche il Mayer [1] ha fatto notare che i gas le cui molecole sono composte di un numero maggiore di tre atomi, si comportano per l'attrito in modo anormale o almeno seguono leggi così complicate che non si può sinora ricavare relazione di sorta fra il peso molecolare e il coefficiente d' attrito. Quella legge dunque pocanzi cennata fra il peso molecolare e l' esponente n non è affatto generale, ma il trovarsi verificata per i gas la cui molecola è composta di un piccolo numero di atomi darebbe un peso al valore dedotto per n nel caso del vapor d'acqua. È vero bensì che la cifra 0,60 per questo vapore sarebbe un poco minore di quella che si ha per l' indrogeno, mentre dovrebbe essere maggiore; però si osservi che il valore di η dedotto ammettendo che l'espansione del vapor saturo segua la legge di Boyle, in realtà è maggiore di quello da me ricavato ed è probabile perciò che tenendo conto della deviazione da quella legge il vapor d'acqua rientri perfettamente nel caso generale.

[1] *Die kin. Th. d. Gase* S. 143.

Sopra la composizione dei gruppi di sostituzioni.

Memoria di ALFREDO CAPELLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 marzo 1884.

I.

1. Siano:

$$h_1 = 1 \,,\ h_2 \,,\ h_3 \,, \ldots . \, h_\nu$$

le sostituzioni di un gruppo H contenuto in un gruppo G e permutabile alle sue sostituzioni, o, come anche suol dirsi, di un gruppo H che è trasformato in se stesso da tutte le sostituzioni di G. Se $n = \mu . \nu$ è l'ordine di G, le sue sostituzioni si possono sempre rappresentare coll'insieme di μ periodi:

$$\begin{array}{llll} h_1 \,, & h_2 \,, & \ldots \,, & h_\nu \\ G_2 h_1 \,, & G_2 h_2 \,, & \ldots \,, & G_2 h_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_\mu h_1 \,, & G_\mu h_2 \,, & \ldots \,, & G_\mu h_\nu \end{array} \tag{1}$$

e, come è noto, le sostituzioni di uno stesso periodo:

$$G_i h_1 \,,\ G_i h_2 \,, \ldots \,, G_i h_\nu$$

coincidono, fatta astrazione dall'ordine, con le ν sostituzioni:

$$h_1 G_i \,,\ h_2 G_i \,, \ldots \,, h_\nu G_i \,.$$

È cosa facile escogitare diversi casi speciali nei quali le μ sostituzioni:

$$1 \,,\ G_2 \,,\ G_3 \,, \ldots \,, G_\mu$$

si possono scegliere in modo da costituire di per se stesse un gruppo d'ordine μ, ma è anche facile di assicurarsi che in generale ciò non è possibile. Prendiamo infatti per H il gruppo formato dalle potenze della sostituzione:

$$h = (a\,b\,c\,d)\,(a'\,b'\,c'\,d')$$

e per G il gruppo generato da H e dalla sostituzione:

$$\sigma = (aa'\,bb'\,cc'\,dd')$$

che è permutabile ad h. Poichè $\sigma^2 = h$, il gruppo G si compone dei soli due periodi:

$$1,\quad (a\,b\,c\,d)\,(a'\,b'\,c'\,d') \,,\quad (ac)\,(bd)\,(a'c')\,(b'd') \,,\quad (a\,d\,c\,b) \,,\quad (a'\,d'\,c'\,b')$$

ed:

$$(aa'\,bb'\,cc'\,dd') \,,\quad (ab'\,da'\,cd'\,bc') \,,\quad (ac'\,bd'\,ca'\,db') \,,\quad (ad'\,dc'\,cb'\,ba') \,.$$

In questo caso si ha dunque $\mu = 2$; ma, come il secondo periodo non contiene sostituzioni di second'ordine, è evidentemente impossibile di scegliere in esso la sostituzione G_1 in modo che il gruppo $[1, G_1]$ sia composto delle sole due sostituzioni $1, G_1$.

Ritornando dunque al caso generale e considerando che le sostituzioni $G_2, G_3, \ldots, G_\mu$

possono scegliersi a piacere nei rispettivi periodi, si presenta naturalmente la questione di ricercare come si possano scegliere le $G_2, G_3, \ldots, G_\mu$ affinchè l'ordine del gruppo $[G_2, G_3, \ldots, G_\mu]$ da esse generato sia il *minimo* possibile. In ciò che segue noi perverremo alla soluzione di questa questione in modo abbastanza semplice, basandoci sopra alcuni teoremi già noti, e vedremo che questi gruppi di ordine minimo hanno un carattere comune indipendente dalla natura dei gruppi G ed H che li determinano.

2. Anzichè occuparci delle sostituzioni generatrici $G_2, G_3, \ldots, G_\mu$, possiamo addirittura riferirci al gruppo Γ da esse generato. È chiaro primieramente che esso conterrà sostituzioni di ciascuno dei μ periodi (1), ma non conterrà poi alcun gruppo parziale che goda di questa stessa proprietà, poichè altrimenti esso non sarebbe di ordine minimo. È poi facile vedere che l'ordine di Γ sarà un multiplo di μ, poichè ognuno dei periodi (1) deve contenere lo stesso numero di sostituzioni di Γ. Infatti se:

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$$
$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m'}$$

sono rispettivamente le sostituzioni che il gruppo Γ ha in comune con due periodi diversi, ricordando che le sostituzioni di uno stesso periodo di G moltiplicate per una stessa sostituzione qualunque di G riproducono sempre quelle di un periodo di G, si vede che le sostituzioni:

$$\tau_1 . \tau_1^{-1} \theta_1, \quad \tau_2 . \tau_1^{-1} \theta_1, \ldots, \tau_m . \tau_1^{-1} \theta_1$$

che appartengono a Γ, apparterranno ad uno stesso periodo di G; ma la prima di esse è:

$$\tau_1 \tau_1^{-1} \theta_1 = \theta_1 ;$$

dunque esse sono tutte comprese fra la $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m'}$ onde $m' \geqq m$ e, similmente potendosi stabilire che $m \geqq m'$, deve essere $m' = m$. L'ordine di Γ è dunque dato da $m . \mu$, dove m è l'ordine del gruppo Γ_0 formato dalle sostituzioni comuni ai due gruppi Γ ed H. Il nostro problema coincide dunque in sostanza con quello di determinare i gruppi parziali Γ che contengono sostituzioni di ogni periodo di G e tali che l'ordine m del gruppo comune a Γ e ad H abbia il minimo valore possibile. Una volta dato il gruppo Γ si potranno scegliere le generatrici $1, G_2, G_3, \ldots, G_\mu$ in un modo qualunque fra le sostituzioni di Γ, purchè se ne tolga una da ciascun periodo di G.

3. Se p è uno dei fattori primi dell'ordine ν del gruppo H, e p^α la più alta potenza di p che divide ν, è noto che esistono in H dei gruppi parziali $P_0, P_1, P_2, \ldots$ di ordine p^α ([1]). Essi si ottengono tutti da uno di essi, ps. da P_0, trasformando P_0 con le sostituzioni di H, cosicchè si potrà sempre porre:

$$P_1 = h'^{-1} P_0 h', \quad P_2 = h''^{-1} P_0 h'', \ldots \tag{2}$$

([1]) In altro lavoro (*Sopra l'ismorfismo dei gruppi di sostituzioni*. Giornale di Mat. Tom. XVI) abbiamo stabilito in modo diretto questo teorema per mezzo di considerazioni di isomorfismo ignorando che il signor Sylow vi era giunto prima di noi (Math. Annalen. Tomo V), basandosi sopra il teorema di Cauchy che un gruppo di sostituzioni il cui ordine è divisibile pel numero primo p contiene almeno una sostituzione di ordine p. Approfittiamo pertanto della presente occasione per riparare alla mancata citazione del nome di questo autore. Per le dimostrazioni rimandiamo anche all'opera del sig.r Netto: *Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra*. Leipzig, 1882.

dove $h', h'', \ldots$ sono sostituzioni di H. Indichiamo con Π il gruppo composto da tutte quelle sostituzioni di G che trasformano in se stesso il gruppo P_0. Dico che ogni periodo di G ha in comune con Π qualche sostituzione. Consideriamo infatti un periodo qualunque:

$$G_i\,,\ G_i h_2\,, \ldots\ldots, G_i h_r \tag{3}$$

e trasformiamo P_0 per mezzo della sostituzione G_i. Poichè G_i trasforma in se stesso il gruppo H, che per supposto è permutabile a tutte le sostituzioni di G, essa trasformerà il gruppo P_0, che appartiene ad H, in un gruppo $G_i^{-1} P_0 G_i$ del pari contenuto in H. E come questo nuovo gruppo è ancora dell'ordine p^α, esso farà parte della serie $P_0, P_1, \ldots$; sia ps.:

$$G_i^{-1} P_0 G_i = P_\varepsilon\ .$$

Per le (2) si avrà allora:

$$G_i^{-1} P_0 G_i = h^{(\varepsilon)-1} P_0 h^{(\varepsilon)}$$

onde anche:

$$h^{(\varepsilon)} G_i^{-1} P_0 G_i h^{(\varepsilon)-1} = P_0$$

il che può anche scriversi:

$$(G_i h^{(\varepsilon)-1})^{-1} . P_0 . (G_i h^{(\varepsilon)-1}) = P_0\ .$$

Il gruppo P_0 è dunque trasformato in se stesso dalla sostituzione $G_i h^{(\varepsilon)-1}$ la quale fa parte evidentemente delle sostituzioni (3) che compongono l'i^{mo} periodo. Resta così dimostrato ciò che si era asserito, e, se ν' è l'ordine del gruppo Π_0 formato da tutte le sostituzioni di H che trasformano in se stesso il gruppo P_0, si conclude che ogni periodo di G contiene appunto ν' sostituzioni che del pari trasformano P_0 in se stesso. Così resta stabilito che in generale esistono sempre dei gruppi parziali contenuti in G e contenenti sostituzioni di ogni periodo di G, poichè il gruppo Π non potrebbe coincidere con l'intero gruppo G che quando il gruppo Π_0 coincidesse con l'intero gruppo H, cioè nel caso particolare in cui P_0 fosse trasformato in se stesso da tutte le sostituzioni di H, o, che è lo stesso, nel caso in cui H contenesse un solo gruppo di ordine p^α.

Se si verifica questo caso, si potrà partire invece da un gruppo Q_0 di ordine q^β, e se H contiene altri gruppi di ordine q^β, si concluderà come sopra che il gruppo formato dalle sostituzioni di G che trasformano in se stesse Q_0 è di ordine inferiore a quello di G e contiene sostituzioni di ciascun periodo di G. Così procedendo si viene a stabilire il seguente teorema: *esiste sempre qualche gruppo parziale di G che contiene sostituzioni di tutti i periodi di G, tutte le volte che il primo periodo H contenga almeno due gruppi distinti aventi per ordine la massima potenza di un certo numero primo.*

Di qui segue che, se Γ è uno dei gruppi di ordine minimo che soddisfano al problema, il gruppo Γ_0 conterrà un solo gruppo avente per ordine la massima potenza possibile di ogni numero primo, poichè se ciò non fosse esso conterrebbe un gruppo parziale di ordine inferiore che del pari soddisferebbe al problema.

4. Se un gruppo G non è composto esclusivamente di sostituzioni di classe pari (che equivalgono ad un numero pari di trasposizioni), possiamo prendere per H il gruppo formato dalle sole sostituzioni di classe pari, che sarà evidentemente

permutabile a tutte le sostituzioni di G. In tal caso il gruppo G si comporrà soltanto di due periodi, dei quali il primo è il gruppo H ed il secondo è formato da tutte le sostituzioni di G che sono di classe dispari, cosicchè se $\nu = p^{\alpha}.q^{\beta}....$ è l'ordine di H, quello di G è dato da $2.p^{\alpha}.q^{\beta}...$ Consideriamo uno dei gruppi P di ordine p^{α} contenuti in H. Per il teorema del numero precedente, il gruppo Π formato dalle sostituzioni di G che trasformano P in se stesso, contiene sostituzioni di entrambi i periodi onde il suo ordine è dato da $2.p^{\alpha}.k$, dove k è un numero intero. Poichè ora l'ordine del gruppo Π è divisibile pel fattore primo 2, esso conterrà necessariamente, pel teorema di Cauchy, almeno una sostituzione di second'ordine. Se indichiamo tale sostituzione con Θ, si avrà:

$$\Theta^2 = 1\,, \quad \Theta^{-1}\mathrm{P}\Theta = \mathrm{P},$$

onde si vede facilmente che, se il numero p è diverso da 2, l'ordine del gruppo $[\Theta, \mathrm{P}]$ generato dalla combinazione di Θ colle sostituzioni di P è precisamente $2.p^{\alpha}$. Dunque:

Se le sostituzioni di un gruppo G di ordine $2\lambda.p^{\alpha}.q^{\beta}...$ non sono esclusivamente di classe pari, esistono sempre in G dei gruppi parziali degli ordini $2p^{\alpha}, 2p^{\beta},...$

II.

5. Indichiamo con Π_i l'insieme delle sostituzioni che il gruppo parziale Π, costruito come sopra, ha in comune coll' i^{mo} periodo di G. I due gruppi G e Π sono isomorfi in quanto ai periodi (1) di G si facciano corrispondere ordinatamente i periodi:

$$\Pi_0\,,\ \Pi_1\,,\ \ldots\ldots,\ \Pi_{\mu-1} \qquad (\alpha)$$

di Π. Se ora fra i fattori primi che dividono l'ordine di Π_0 ne esiste almeno uno la cui più alta potenza rappresenti l'ordine di due o più gruppi parziali di Π_0, si potrà partendo da essa ragionare sui due gruppi Π e Π_0 precisamente come si è fatto sui gruppi G ed H, cioè dimostrare che in Π è contenuto un gruppo parziale Π' che contiene sostituzioni di ognuno dei periodi (α). Chiamando Π'_i l'insieme delle sostituzioni che Π ha in comune col periodo Π_i, si avrà che i due gruppi Π e Π' sono fra loro isomorfi in quanto ai periodi (α) del primo si facciano corrispondere ordinatamente i periodi:

$$\Pi'_0\,,\ \Pi'_1\,,\ \ldots\ldots,\ \Pi'_{\mu-1} \qquad (\beta)$$

del secondo. Così si potrà procedere finchè si giunga ad un gruppo Ω composto di μ periodi:

$$\Omega_0\,,\ \Omega_1\,,\ \ldots\ldots,\ \Omega_{\mu-1}$$

isomorfo a ciascuno dei gruppi precedenti e tale che il gruppo Ω_0 contenga un solo gruppo parziale che abbia per ordine la più alta potenza possibile di ogni fattore primo. A ciò si giungerà certamente, poichè gli ordini dei gruppi G, Π, Π', ... sono decrescenti, e soltanto si potranno presentare due casi cioè:

1° il gruppo Ω_0 si compone dell'unica sostituzione 1; in tal caso i periodi $\Omega_0, \Omega_1, ...$ si riducono a semplici sostituzioni $1, \omega_2, \omega_3, \ldots\ldots, \omega_\mu$ che costituiscono un gruppo isomorfo *oloedricamente* a G e contenuto in esso, ogni sostituzione ω_i

corrispondendo al periodo i^{mo} che la contiene. In questo caso le sostituzioni di G sono tutte contenute nello schema:

$$\begin{array}{l} 1, \quad h_2, \quad h_3, \ldots, h_\nu \\ \omega_2, \omega_2 h_2, \omega_2 h_3, \ldots, \omega_2 h_\nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_\mu, \omega_\mu h_2, \omega_\mu h_3, \ldots, \omega_\mu h_\nu \end{array}$$

che soddisfa appunto all'esigenza di avere nella prima linea verticale e nella prima linea orizzontale, due gruppi completi rispettivamente degli ordini μ e ν.

2° Se il gruppo Ω_0 contiene altre sostituzioni oltre l'unità, e sia $m = \frac{\nu}{\nu'}$ il suo ordine, si potranno sempre scegliere, in H, ν' sostituzioni:

$$1, \quad h'', \quad h''', \ldots, h^{(\nu')}$$

tali che il gruppo H sia rappresentato dallo schema:

$$\Omega_0, \quad \Omega_0 h'', \quad \Omega_0 h''', \ldots, \Omega_0 h^{(\nu')}$$

ed allora l'intero gruppo G è rappresentato dallo schema:

$$\begin{array}{l} \Omega_0, \quad \Omega_0 h'', \quad \Omega_0 h''', \ldots, \Omega_0 h^{(\nu')} \\ \Omega_1, \quad \Omega_1 h'', \quad \Omega_1 h''', \ldots, \Omega_1 h^{(\nu')} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_{\mu-1}, \Omega_{\mu-1} h'', \Omega_{\mu-1} h''', \ldots, \Omega_{\mu-1} h^{(\nu')} \end{array}$$

di cui la prima linea verticale rappresenta ancora un gruppo completo caratterizzato da ciò, che, se decomponendo in fattori primi si abbia:

$$m = p^{\alpha'} q^{\beta'} \ldots ,$$

non esiste in Ω_0 che un solo gruppo di ordine $p^{\alpha'}$, un solo di ordine $q^{\beta'}$, ecc.

6. I gruppi del tipo Ω_0 sono di una natura speciale assai semplice. Primieramente è da notare che i loro fattori di composizione sono tutti numeri primi. Infatti il gruppo Ω_0 contiene un solo gruppo P di ordine p^{α}. Ciò significa che P è permutabile a tutte le sostituzioni di Ω_0, onde si potrà sempre fare in modo che P entri a far parte della scala dei gruppi parziali:

$$\Omega_0, \quad J_1, \quad J_2, \ldots, 1$$

che serve a determinare i fattori di composizione di Ω_0, tale cioè che ogni gruppo J è dei più generali fra quelli contenuti nel precedente e permutabili alle sue sostituzioni. Allora è chiaro che i fattori di composizione di P dovranno tutti presentarsi anche come fattori di composizione di Ω. Ma P, avendo per ordine la potenza α del numero primo p, ha precisamente, come è noto ([1]), α fattori di composizione eguali a p; per simil ragione avrà β fattori di composizione eguali a q, ecc. ecc. e non potrà averne altri, poichè il prodotto di tutti questi fattori riproduce già l'ordine m di Ω_0.

7. Il numero μ, rapporto fra l'ordine di G e quello di H, sarà un fattore di composizione di G, se non esiste alcun gruppo più generale di H contenuto in G e permutabile alle sostituzioni di G. In tal caso non esisterà neanche alcun gruppo più generale di Ω_0 contenuto in Ω e permutabile alle sue sostituzioni, giacchè se J fosse un siffatto gruppo, esso dovrebbe comporsi di un certo numero di periodi di Ω

([1]) Vedi l. c.

a cominciare dal primo periodo Ω_0. Ma allora il gruppo J' che corrisponderebbe ad J nell'isomorfismo tra G ed Ω si comporrebbe di altrettanti periodi di G a cominciare dal primo periodo H e sarebbe permutabile a tutte le sostituzioni di G senza coincidere con esso, il che è contrario al supposto. Pertanto il numero μ sarà anche fattore di composizione di Ω ed allora tutti gli altri fattori di composizione di Ω saranno numeri primi, poichè essi devono coincidere coi fattori di composizione di Ω_0. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se μ è uno qualunque dei fattori di composizione di un gruppo qualunque G, esiste sempre in G un gruppo parziale che ha per primo fattore di composizione il numero μ e di cui gli altri fattori di composizione sono tutti numeri primi.

Nella dimostrazione data ora il numero μ si supponeva essere il primo fattore di composizione di G, ma ciò non è essenziale, poichè se esso non fosse il primo rispetto a G, sarebbe evidentemente il primo rispetto ad un certo gruppo G' contenuto in G, cosicchè allora basterebbe considerare in luogo di G il gruppo G' e sempre si avrebbe un gruppo Ω' che gode della proprietà enunciata e che sarebbe contenuto in G' e quindi anche in G.

8. Per proseguire nell'analisi dei gruppi Ω_0 indichiamo con P, Q, R, ... i gruppi parziali contenuti in Ω_0 aventi per ordine rispettivamente le più alte potenze $p^{\alpha'}, q^{\beta'}, r^{\gamma'}, \dots$ dei fattori primi di m.

Indichiamo inoltre con:

$$\begin{matrix} P_1, & P_2, & P_3, \dots \\ Q_1, & Q_2, & Q_3, \dots \\ R_1, & R_2, & R_3, \dots, \\ \dots & & \end{matrix}$$

le sostituzioni di questi gruppi rispettivamente. Poichè Q è il solo gruppo del suo ordine contenuto in Ω_0, si ha qualunque sia l'indice i:

$$P_i^{-1}\, Q\, P_i = Q$$

e quindi qualunque sia l'ordine j, per un certo valore corrispondente dell'indice j', si avrà:

$$P_i^{-1}\, Q_j\, P_i = Q_{j'}$$

onde:

$$Q_j\, P_i = P_i\, Q_{j'} \qquad (4)$$

D'altra parte, poichè anche P è unico del suo ordine si ha:

$$Q_j^{-1}\, P\, Q_j = P$$

onde la sostituzione P_i potrà mettersi sotto la forma:

$$P_i = Q_j^{-1}\, P_{i'}\, Q_j$$

per un certo valore dell'indice i'. Di qui si ha:

$$Q_j\, P_i = P_{i'}\, Q_j$$

e confrontando con la (4):

$$P_i\, Q_{j'} = P_{i'}\, Q_j.$$

Questa eguaglianza può anche scriversi:

$$P_{i'}^{-1}\, P_i = Q_j\, Q_{j'}^{-1}$$

dove ora il primo membro è evidentemente una sostituzione di P, nel mentre che il secondo membro è una sostituzione del gruppo Q. Ma i due gruppi P e Q, avendo rispettivamente per ordini delle potenze dei due numeri primi distinti p e q, non possono avere in comune alcuna sostituzione all'infuori dell'unità. Si ha dunque necessariamente:

$$P_{i'}^{-1} P_i = 1 , \qquad Q_j Q_{j'}^{-1} = 1$$

onde:

$$P_{i'} = P_i , \qquad Q_{j'} = Q_j .$$

Sostituendo ciò nella (4) essa prende la forma:

$$Q_j P_i = P_i Q_j \tag{5}$$

ed è valida per valori arbitrarî dei due indici i ed j.

Notiamo così di passaggio il teorema più generale, la cui dimostrazione è in sostanza contenuta in quella ora data; se due gruppi qualisivogliano non hanno in comune alcuna sostituzione fuori dell'unità ed ognuno di essi è trasformato in se stesso da tutte le sostituzioni dell'altro, dovrà necessariamente ogni singola sostituzione del primo essere permutabile ad ogni singola sostituzione del secondo.

Similmente si avrà, qualunque siano gli indici i ed j,

$$\begin{aligned} R_j P_i &= P_i R_j \\ R_j Q_i &= Q_i R_j \end{aligned} \tag{5'}$$

ecc. ecc.

Da ciò si vede facilmente che le $p^{\alpha'} \cdot q^{\beta'} \dots$ sostituzioni di Ω_0 sono tutte comprese nel tipo:

$$P_{i_1} \; Q_{i_2} \; R_{i_3} \dots \tag{6}$$

da cui si ottengono facendo variare gli indici $i_1, i_2, i_3, \dots$ rispettivamente fra 1 e $p^{\alpha'}$, fra 1 e $q^{\beta'}$, fra 1 ed $r^{\gamma'}, \dots$ in tutti i modi possibili.

Epperò ogni eguaglianza della forma:

$$P_{i_1} \; Q_{i_2} \; R_{i_3} \dots = P_{j_1} \; Q_{j_2} \; R_{j_3} \dots$$

si risolverà necessariamente nelle singole eguaglianze:

$$P_{i_1} = P_{j_1} , \qquad Q_{i_2} = Q_{j_2} , \qquad R_{i_3} = R_{j_3} , \dots$$

9. Di qui segue inoltre che ogni gruppo parziale Ω'_0 contenuto in Ω_0 gode delle stesse proprietà di Ω_0.

Sia infatti $p^{\alpha''} \, q^{\beta''} \, r^{\gamma''} \dots$ l'ordine di Ω'_0. Si deve mostrare che Ω'_0 contiene un unico gruppo di ordine $p^{\alpha''}$, cioè il gruppo formato delle sostituzioni comuni ad Ω'_0 ed al gruppo P. Sia invero π una sostituzione qualunque di un tale gruppo, cosicchè essa avrà necessariamente per ordine una semplice potenza p^k del numero primo p. Poichè essa appartiene per supposto ad Ω'_0 e quindi anche ad Ω, potrà porsi, pel numero precedente, sotto la forma:

$$\pi = P_{i_1} \; Q_{i_2} \; R_{i_3} \dots \tag{7}$$

onde innalzando i due membri alla potenza k e considerando che i fattori $P_{i_1}, Q_{i_2}, R_{i_3}, \dots$ sono fra loro permutabili,

$$\pi^{p^k} = 1 = P_{i_1}^{p^k} . \, Q_{i_2}^{p^k} . \, R_{i_3}^{p^k} \dots$$

Ma pel numero precedente una stessa sostituzione non può rappresentarsi che in un sol modo sotto la forma (6); deve dunque aversi:

$$P_{i_1}^{p^k} = 1 \,, \quad Q_{i_2}^{p^k} = 1 \,, \quad R_{i_3}^{p^k} = 1 , \dots$$

e poichè le Q_{i_2}, R_{i_3}, ... sono di ordini primi con p, esse saranno necessariamente di ordine eguale all'unità cioè:

$$Q_{i_2} = 1 \,, \qquad R_{i_3} = 1 \,, \dots$$

onde la (6) si riduce a:

$$\pi = P_{i_1} .$$

La sostituzione π appartiene dunque al gruppo P come dovevasi dimostrare.

Similmente si dimostrerà che Ω'_0 contiene un solo gruppo di ordine $q^{\beta''}$, un solo gruppo di ordine $r^{\gamma''}$, ecc.

III.

10. Ci proponiamo ora di dimostrare un'altra proprietà di cui godono esclusivamente i gruppi del tipo Ω_0, la cui importanza si manifesta specialmente per le funzioni relative a tali gruppi. Ricordiamo a tale oggetto alcune definizioni e teoremi noti [1].

Siano x_1, x_2, ..., x_n, n variabili indipendenti, che possono sempre considerarsi come le n radici di un'equazione:

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-3} + \dots + c_n = 0.$$

Due funzioni razionali:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \,, \quad L(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

si dicono della stessa *specie* se ognuna di esse può esprimersi identicamente in funzione razionale dell'altra e delle $c_1, c_2, \dots, c_n$, e l'insieme di tutte le funzioni di una stessa specie si dice costituire una *specie* [2] di funzioni. Di qui segue che se U e V sono due specie distinte di funzioni ed una delle funzioni che compongono U è esprimibile in funzione razionale di una delle funzioni di V e delle $c_1, c_2, \dots, c_n$, ogni singola funzione di U sarà esprimibile sotto le stesse condizioni per mezzo di ogni singola funzione di V; in tal caso si dice che la specie U è contenuta nella specie V.

Le specie distinte possibili sono tante quanti sono i gruppi possibili di sostituzioni fra le $x_1, x_2, \dots, x_n$, poichè, preso un gruppo qualunque H, l'insieme di tutte quelle funzioni che non sono alterate dalle sostituzioni di H e sono alterate da ogni altra sostituzione costituisce appunto una specie, le cui funzioni si dicono per tal ragione *appartenere* al gruppo H. E reciprocamente data una specie esiste sempre il gruppo cui essa appartiene. Si sa finalmente che, affinchè una specie U sia contenuta in una specie V, è necessario e sufficiente che il gruppo di U contenga il gruppo di V.

Designando per brevità con le stesse lettere U e V i gruppi delle specie U e V, se il gruppo U contiene il gruppo V, l'ordine del primo sarà eguale a quello

[1] Vedi ps. l'opera citata: *Substitutionentheorie* ecc. Capitolo V.

[2] Kronecker, Monatsberichte der Berl. Akad. 3 März, 1879.

del secondo moltiplicato per un certo fattore intero λ. Allora se F_u e L_v sono due funzioni appartenenti rispettivamente ai gruppi U e V, esse sono legate fra loro da una relazione della forma:

$$L_v^\lambda + f_1 \cdot L_v^{\lambda-1} + \dots f_2 \cdot L_v^{\lambda-2} + \dots + f_\lambda = 0 \qquad (8)$$

dove le f sono funzioni razionali di F_u e delle $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Alla L_v vanno così *conjugate* altre $\lambda - 1$ radici della (8):

$$L_v', \ L_v'', \dots, \ L_v^{(\lambda-1)}$$

che sono del pari funzioni razionali delle $x_1, \dots, x_n$, ed i cui gruppi sono dati da:

$$V' = \sigma_1^{-1} V \sigma_1, \quad V'' = \sigma_2^{-1} V \sigma_2, \dots, \quad V^{(\lambda-1)} = \sigma_{\lambda-1}^{-1} V \sigma_{\lambda-1}, \qquad (9)$$

dove le σ sono le solite sostituzioni che servono a rappresentare l'intero gruppo U come l'insieme delle λ parti:

$$V, \quad V\sigma_1, \quad V\sigma_2, \dots, V\sigma_{\lambda-1}. \qquad (10)$$

11. Diremo per brevità che la funzione F è del tipo F_0, quando il suo gruppo U appartiene a quelli del tipo Ω_0 studiati nel paragrafo precedente. Se ciò ha luogo e si prenda poi per L *una qualunque* delle funzioni appartenenti a gruppi parziali V di U, dico che le λ funzioni conjugate che soddisfano alla relativa equazione (8) non appartengono mai a specie fra loro tutte distinte.

Sia al solito $m = p^\alpha q^\beta \dots$ l'ordine di U, e P, Q, R, ... i gruppi di ordine p^α, q^β,.. rispettivamente contenuti in U. Se $\mu = p^{\alpha'} . q^{\beta'} \dots$ è *uno qualunque* dei divisori di m, esisterà sempre in U un gruppo parziale dell'ordine μ. È noto infatti che ogni gruppo di ordine p^α contiene sempre entro di sè almeno un gruppo dell'ordine $p^{\alpha'}$ per $\alpha' < \alpha$; esisteranno dunque dei gruppi P', Q', ... rispettivamente contenuti in P, Q,... e degli ordini $p^{\alpha'}$, $q^{\beta'} \dots$

Indicando con P'_i, Q'_j, ... sostituzioni tolte rispettivamente da questi gruppi, esse soddisfano alle relazioni:

$$Q'_j P'_i = P'_i Q'_j$$
$$R'_j P'_i = P'_i R'_j$$
$$R'_j Q'_i = Q'_i R'_j$$
$$\dots\dots\dots$$

come si vede dalle relazioni (5) del paragrafo precedente e quindi è chiaro che il gruppo $[P', Q', R', \dots]$ generato dalla loro combinazione sarà precisamente dell'ordine $p^{\alpha'} q^{\beta'} r^{\gamma'} \dots$ Reciprocamente, se V è uno qualunque dei gruppi parziali di U, esso sarà sempre costruibile in questo modo, poichè si è visto (art. 9) che ogni gruppo parziale di un gruppo del tipo Ω_0 è esso pure del tipo Ω_0.

Ciò posto, esiste sempre qualche sostituzione di U che non è compresa in V e trasforma in se stesso il gruppo V.

Infatti poichè V non coincide con l'intero gruppo U, dev' essere verificata almeno una delle diseguaglianze:

$$\alpha' < \alpha, \quad \beta' < \beta, \quad \gamma' < \gamma, \dots$$

Supposto, per fissare le idee, che sia $\alpha' < \alpha$, si sa che il gruppo P' è sempre contenuto in un altro P'' di ordine $p^{\alpha'+1}$, le cui sostituzioni trasformano tutte in se stesso il gruppo P'. Allora, se σ è una sostituzione di P'' che non appartiene a P',

essa trasformerà in se stesso l'intero gruppo V. Infatti poichè σ appartiene a P, si ha per le (5) del paragrafo precedente:

$$\sigma^{-1} Q' \sigma = Q', \qquad \sigma^{-1} R' \sigma = R', \ldots$$

Inoltre, poichè σ appartiene a P″ si ha pure;

$$\sigma^{-1} P' \sigma = P'.$$

Quindi:

$$\sigma^{-1} V \sigma = [\sigma^{-1} P' \sigma, \sigma^{-1} Q' \sigma, \ldots] = [P', Q', \ldots] = V.$$

Ma la sostituzione σ non appartiene a V, perchè essa ha per ordine una potenza di p, e le sole sostituzioni di V che hanno un siffatto ordine appartengono a P′; onde si vede che essa potrà sempre prendersi come una delle sostituzioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ dello schema (10), e che la corrispondente funzione conjugata avrà il suo gruppo coincidente con V e quindi apparterrà alla stessa specie di L_v.

12. Vogliamo ora dimostrare che questa proprietà spetta esclusivamente alle funzioni del tipo F_0; ossia che *se F non appartiene al tipo F_0, si può sempre determinare la funzione L (la cui specie contenga quella di F) in modo che le λ funzioni conjugate che soddisfano alla relativa equazione (8) appartengano a λ specie fra loro tutte distinte.*

Poichè F non è del tipo F_0, il suo gruppo U non sarà del tipo Ω_0, onde almeno uno dei gruppi P, Q,... contenuti in U, degli ordini p^α, q^β, ... non sarà unico del suo ordine. Sia questo ps. P, e prendiamo per V il gruppo formato da tutte le sostituzioni di U che trasformano in se stesso il gruppo P. Esso è necessariamente un gruppo parziale, poichè, se coincidesse con U, ciò significherebbe che P è trasformato in se stesso da tutte le sostituzioni di U, ed allora, come si sa, sarebbe l'unico gruppo del suo ordine contenuto in U. Or diciamo che se L_v è una funzione appartenente al gruppo V, l'equazione (8) avrà le sue radici appartenenti a specie tutte distinte. Supponiamo infatti, se è possibile, che due dei gruppi considerati all'art. 11:

$$V, \ \sigma_1^{-1} V \sigma_1, \quad \sigma_2^{-1} V \sigma_2, \ldots, \sigma_{\lambda-1}^{-1} V \sigma_{\lambda-1}$$

coincidano fra loro, ps. che sia:

$$\sigma_i^{-1} V \sigma_i = \sigma_j^{-1} V \sigma_j.$$

Di qui si dedurrebbe:

$$\sigma_j \sigma_i^{-1} V \sigma_i \sigma_j^{-1} = V$$

o, che è lo stesso:

$$\tau^{-1} V \tau = V$$

posto per brevità:

$$\sigma_i \sigma_j^{-1} = \tau.$$

È facile riconoscere che la sostituzione τ non può appartenere al gruppo V, poichè se fosse:

$$\sigma_i \sigma_j^{-1} = v$$

dove v è una sostituzione di V, se ne dedurrebbe:

$$\sigma_i = v \sigma_j$$

e:

$$V \sigma_i = V v \sigma_j = V \sigma_j$$

il che è contrario alla costruzione dello schema (10).

Poichè ora τ trasforma in se stesso il gruppo V, il gruppo parziale P sarà trasformato in un gruppo $\tau^{-1} P \tau$ del pari contenuto in U. Ma tutti i gruppi di ordine p^{α} contenuti in V si ottengono trasformando P con le sostituzioni di V; si avrà dunque:

$$\tau^{-1} P \tau = v_i^{-1} P v_i$$

dove v_i è una certa sostituzione di V. Di qui si cava:

$$(\tau v_i^{-1})^{-1} P = (\tau v_i^{-1}) = P$$

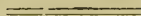
onde, poichè le sostituzioni di V sono le sole che trasformano in se stesso P, si avrà necessariamente:

$$\tau v_i^{-1} = v_j$$

e:

$$\tau = v_j v_i .$$

La sostituzione τ appartiene dunque al gruppo V, il che è in contraddizione con quanto si è visto poco fa.

Resta così dimostrato quanto si voleva. Nel tempo stesso conchiudiamo che: i gruppi del tipo Ω_0 sono i soli che godono della proprietà che ogni loro gruppo parziale è trasformato in se stesso da qualche sostituzione del gruppo non contenuta nel gruppo parziale stesso.

Sulla compressibilità dei liquidi.

Memoria di STEFANO PAGLIANI e LUIGI PALAZZO

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

(Con una tavola)

Le esperienze dei fisici che si sono occupati della determinazione del coefficiente di compressibilità dei liquidi hanno dimostrato che sopra tale valore possono influire tanto la temperatura quanto la pressione, ed in modo diverso secondo la natura dei liquidi. Dai risultati ottenuti dai diversi sperimentatori si deduce che in generale il coefficiente di compressibilità dei liquidi aumenta colla temperatura, eccetto che per l'acqua; rispetto alla influenza della pressione, essa è diversa per i diversi liquidi, e per alcuni di essi esiste discordanza fra i risultamenti dei diversi autori.

D'altra parte la conoscenza del modo di comportarsi dei liquidi compressi specialmente alle diverse temperature, è di grande importanza per poter estendere lo studio della loro dilatazione a temperature superiori a quelle del loro punto di ebollizione, come pure per verificare alcune formole di termodinamica.

Dietro queste considerazioni uno di noi aveva iniziato col dott. G. Vicentini una serie di ricerche sulla compressibilità dei liquidi e specialmente sull'influenza della temperatura sul valore del coefficiente di compressibilità. Le prime esperienze ebbero per oggetto lo studio della compressibilità dell'acqua fra 0° e 100°, poichè essa era stata misurata dal Grassi soltanto fino alla temperatura di 53°.

Crediamo utile, prima di passare all'esposizione delle nostre ricerche sopra alcuni idrocarburi ed alcoli, di ricordare qui il metodo sperimentale adoperato in quelle prime determinazioni, perchè è identico a quello adottato nelle più recenti, come pure i principali risultati di quel primo studio, e specialmente quella parte di essi che rende ragione del metodo da noi adoperato.

Metodo sperimentale. — Il metodo da noi adoperato è analogo per il principio a quello usato da Amagat nel suo studio sulla compressibilità di liquidi diversi (*Ann. chim. phys.* 1877, XI, 520). La diminuzione apparente di volume di un liquido in un recipiente per la compressione è uguale alla somma algebrica della diminuzione reale e della variazione di capacità del recipiente. Noi determinammo indirettamente questa ultima variazione, e sottraendola poi dalla diminuzione apparente osservata, abbiamo dedotta la diminuzione reale di volume del liquido. Se indichiamo con v il volume del liquido contenuto nel piezometro ad una temperatura data, con p l'aumento di pressione prodotto, espresso in millimetri, con Δv

la diminuzione di volume osservata, con a il coefficiente di compressibilità apparente, avrèmo:

$$a = \frac{\Delta v}{v} \frac{760}{p}.$$

Se μ è il coefficiente di compressibilità assoluta dell'acqua, k l'aumento della unità di capacità del recipiente per un aumento di pressione interna di una atmosfera, che chiameremo coefficiente di deformazione del recipiente, avremo $k = a - \mu$.

Determinando a per l'acqua ad una temperatura ben nota e fissa, come quella di 0°, e sottraendo dal valore ottenuto quello trovato dal Grassi per il coefficiente di compressibilità assoluta dell'acqua a 0°, deducemmo il valore di k, e lo abbiamo da principio adottato per calcolare la compressibilità assoluta dell'acqua alle diverse temperature. Vedremo però in seguito come questo modo di procedere non è rigoroso, poichè il coefficiente di deformazione di un recipiente non si mantiene costante coll'aumentare della temperatura, ma va crescendo, e avendo poi determinato con esperienze dirette tale variazione, abbiamo introdotto nel calcolo della compressibilità assoluta i valori di k corretti per le diverse temperature.

Apparecchio. — I piezometri da noi adoperati sono, come quelli del Regnault (*Mém. de l'Acad. des sciences*, 1847, XXI, 429), formati da un tubo di vetro cilindrico A (fig. 1), a basi emisferiche, al quale è saldato un cannello pure di vetro B diviso in tutta la sua lunghezza. Alla estremità di questo cannello è fissato con mastice un tubo metallico C, al quale sono saldati due tubi a robinetto D, E. Uno di questi tubi è a due diramazioni, per mezzo delle quali si può mettere il piezometro in comunicazione sia col manometro che col recipiente dell'aria compressa. All' estremità F di una delle diramazioni si fissa il tubo di piombo, che viene dal recipiente dell'aria compressa. Alla estremità G si fissa quello che va al manometro.

Secondo le temperature, alle quali si vuol sperimentare, il piezometro è tenuto in bagni diversi a temperatura costante, della disposizione dei quali diremo in seguito.

La osservazione del livello del liquido nel cannello si fa con un cannocchiale, disponendo dietro il cannello uno schermo di carta oliata, illuminato da una candela. In tal modo il menisco e le divisioni si vedono con tale nettezza che si può far la lettura con somma precisione. La divisione è di un millimetro di lunghezza e si possono apprezzare assai bene i decimi di divisione.

Per evitare l'errore, quantunque al certo assai lieve, prodotto dal riscaldamento del liquido per la compressione, si attende che il livello del liquido sotto pressione si mantenga o costante, o presenti un movimento regolare analogo a quello osservato per alcuni minuti avanti la compressione.

Siccome si volevano eseguire determinazioni a temperature diverse, dopo aver diviso il cannello con una buona macchina a dividere del laboratorio di Fisica della Università, che il prof. Naccari metteva gentilmente a nostra disposizione, e fattane una accurata calibrazione, abbiamo per ciascun piezometro determinata la capacità a 0° ed il coefficiente di dilatazione cubica per potere calcolare i volumi iniziali e le variazioni di volume osservate nel liquido.

Il manometro è ad aria libera; i due rami sono costituiti l'uno da due, l'altro da tre tubi di vetro (di diametro interno maggiore di 1 cm.) che unimmo fra di loro

per mezzo di ghiere cilindriche in ferro e di mastice. La graduazione in millimetri abbiamo fatto sul vetro stesso per mezzo di una grande macchina a dividere del nostro laboratorio. Il nostro manometro ci permette di misurare pressioni sino a quattro atmosfere e mezzo effettive.

Il recipiente dell'aria compressa della pompa di compressione adoperata è munito di un robinetto a vite, il quale permette di stabilire gradatamente la pressione nel piezometro.

Per le determinazioni a 0° il piezometro viene posto nel ghiaccio pesto in un alto e largo cilindro di vetro. Il ghiaccio non sta direttamente sul fondo del cilindro, ma sopra una rete metallica portata da un treppiede di ferro. Si ha cura di tenere anche sempre coperta di ghiaccio la porzione del cannello del piezometro che sta al disotto della divisione da leggersi.

Per le determinazioni a circa 100° si adoperò un apparecchio analogo a quello usato per la determinazione del punto 100 dei termometri, di altezza alquanto maggiore dell'ordinario.

Per le determinazioni alle altre temperature, nelle esperienze sull'acqua, il piezometro si teneva immerso in acqua contenuta nel recipiente di rame annesso all'apparecchio del Regnault, e questo recipiente era poi posto in un grande bagno di ottone a doppia parete; tanto il bagno interno che l'esterno erano muniti di agitatori che venivano mossi di conserva.

Nelle ricerche, che stiamo per esporre, si dovette adottare un'altra disposizione. Le difficoltà che qui ci si presentarono furono maggiori che non per l'acqua, per due ragioni principalmente. In primo luogo perchè la dilatabilità dei liquidi ultimamente studiati è maggiore di quella dell'acqua, quindi maggiori variazioni nel volume del liquido per piccole differenze di temperatura. In secondo luogo mentre per l'acqua si raggiunge presto sotto pressione lo stato stazionario della colonna liquida, per i liquidi in questione si richiede un tempo maggiore, talora anche più di quindici minuti, prima che il menisco diventi stazionario. Si avrebbero voluti adottare dei bagni a vapori di sostanze convenienti, che avevano dato dei buoni risultati in alcune serie di determinazioni per l'acqua, ma, per la seconda delle ragioni sopra addotte, si sarebbero richieste grandi quantità di liquidi e apparecchi appositi a distillazione continua, perchè ciascuna determinazione esigeva talora più di tre quarti d'ora; ma i nostri mezzi non ci permettevano di disporre nè di quelle, nè di questi. Dopo alcuni tentativi si adottò la disposizione seguente, che si mostrò in fatti conveniente. In un grande bagno d'acqua a doppia parete è posto un recipiente di rame, pieno di sabbia, ed entro la sabbia sta un grosso tubo di vetro contenente olio, nel quale stanno immersi il piezometro ed il termometro che serve a misurare le temperature. In tal modo si rendono meno sentite dal piezometro le variazioni di temperatura che possono avvenire nell'acqua del bagno a doppia parete, anche quando essa venga continuamente agitata. Il bagno esterno si riscalda per mezzo di una fiammella a gas, la quale si regola assai bene mediante una pinzetta a vite con passo sottile, applicata al tubo di gomma. Si lascia che il piezometro e tutto il materiale costituente il bagno si metta in equilibrio di temperatura, ed allora o senza variare affatto o variando di pochissimo l'altezza della fiamma, o la distanza

di questa dal fondo del bagno, si può ottenere o costanza, oppure un andamento molto lento e regolare nella temperatura da potersi portare con sicurezza le volute correzioni dedotte dall'andamento del livello del liquido nel piezometro, osservato prima e dopo la compressione.

Risultamenti delle ricerche sull'acqua.

L'acqua adoperata era distillata e bollita con cura in modo da privarla il più che fu possibile di aria. Furono eseguite due serie di determinazioni del coefficiente di compressibilità apparente dell'acqua a varie temperature con due diversi piezometri.

Col primo piezometro, che diremo A, si giunse ai seguenti valori del coefficiente di compressibilità apparente dell' acqua, accanto ai quali scriviamo anche quelli del coefficiente di compressibilità assoluta, dedotti dai primi ammettendo che il coefficiente di deformazione del piezometro, trovato uguale a 0,0000361 a 0°, si mantenga costante col variare della temperatura.

t	a	μ	
0°	0,0000864	0,0000503	(Grassi)
21.74	0,0000815	0,0000454	
55.12	0,0000804	0,0000443	
77.52	0,0000818	0,0000457	
99.21	0,0000834	0.0000473	

I valori dell' ultima colonna costruiti graficamente ci danno la curva rappresentata in A (v. tav.).

Nella tabella seguente sono riportati i valori del coefficiente di compressibilità apparente determinati direttamente col secondo piezometro B e quelli del coefficiente di compressibilità assoluta dedotti dai primi, ammettendo anche qui che il coefficiente di deformazione dello strumento, che si trovò uguale a 0,0000308 a 0°, si mantenga costante.

t	a	μ	
0°	0,0000811	0,0000503	(Grassi)
0.43	0,0000806	0,0000498	
1.43	0,0000806	0,0000498	
2.40	0,0000805	0,0000497	
3.24	0,0000806	0,0000498	
8.30	0,0000785	0,0000477	
9.33	0,0000785	0,0000477	
15.59	0,0000766	0,0000458	
31.06	0,00007485	0,00004405	
40.31	0,00007365	0,00004285	
49.31	0,0000736	0,0000428	
57.04	0,0000729	0,0000421	
61.15	0,0000728	0,0000420	
66.25	0,0000730	0,0000422	
77.36	0,0000745	0,0000437	
99. 2	0,0000767	0,0000459	

Se si costruiscono graficamente i valori di μ si ottiene una curva, rappresentata in B (v. tav.). Essa presenta un andamento simile a quello della curva del piezometro A; vale a dire, ambedue dimostrano che se il coefficiente di compressibilità dall'acqua va diminuendo collo aumentare della temperatura, havvi però una temperatura al di là della quale questo coefficiente cresce colla temperatura. La differenza però che si osserva nei valori assoluti per le temperature più alte, fece nascere in noi il dubbio che non si potesse ammettere come sufficientemente costante il coefficiente di deformazione del recipiente di vetro, e che quella differenza si dovesse non solo ad una diversa variazione del coefficiente di deformazione dei due piezometri colla temperatura, ma anche ad una variazione non uniforme per lo stesso piezometro. Questo dubbio ci condusse a determinare la variazione di volume esterno dei nostri piezometri a diversa temperatura.

A tale scopo dopo diversi tentativi si adottò la disposizione e l'apparecchio rappresentato nella fig. 2. Il piezometro viene posto in un recipiente chiuso e ripieno di un liquido, del quale si può misurare in un cannello diviso esterno lo spostamento prodotto dalla deformazione del piezometro, quando nell' interno di questo si eserciti una pressione. L' apparecchio è costrutto nel modo seguente. Ad un tubo di ottone A B, chiuso inferiormente, è saldata una scatola pure d'ottone MN, nel cui coperchio si hanno tre fori *a*, *b*, *c*. Sul foro *a* è saldato un tubo di ottone, nel quale entra un piccolo turacciolo di gomma, nel cui foro passa un tubo ricurvo ad angolo retto *a d e*, diviso nella sua porzione orizzontale *d e*. Perchè la chiusura riesca più perfetta, il tubo metallico è filettato e si può avvitare sopra di esso un coperchio con un foro per il quale passa il tubo di vetro. Sulla apertura *b*, abbastanza grande perchè per essa possa passare il bulbo del piezometro, è pure saldato un tubo di ottone nel quale entra un turacciolo di gomma, per il cui foro passa il cannello del piezometro. Anche qui il tubo è filettato e viene chiuso con un coperchio a vite, il quale comprime il tappo di gomma contro un dischetto di ottone forato. Finalmente in *c* è saldato un tubo a rubinetto, che serve per introdurre il liquido. Si introduce nel recipiente A B M N il piezometro, e quindi il liquido scelto per le determinazioni, avendo la precauzione che non rimanga alcuna bolla d'aria e facendo in modo che il tubo *a d e* ne venga in parte riempito. Allora si chiude il rubinetto del tubo *c* e l' apparecchio è pronto per la esperienza.

Per poter sperimentare anche a 100° alla pressione ordinaria abbiamo scelto come liquido indicatore, del petrolio bollente ad alta temperatura. Siccome a temperatura intermedia fra la ordinaria e 100°, per quanti tentativi si sieno fatti, non abbiamo potuto ottenere nè costanza, nè movimento abbastanza regolare nel livello del liquido nel tubo esterno, per dover essere il volume di questo liquido molto grande, così ci contentammo di determinare la deformazione esterna a 0° ed alla temperatura dei vapori dell'acqua bollente. Disgraziatamente essendosi per un incidente rotto il piezometro A, non abbiamo potuto fare queste determinazioni che per il piezometro B. Il volume del liquido adoperato era di cm³ 315. La capacità corrispondente ad ogni divisione (1 mm.) del cannello era di cm³ 0,000764. Il rapporto fra i due volumi era quindi uguale a 0,00000242. Il volume esterno del serbatoio del piezometro era di cm³ 115,382.

Il coefficiente di deformazione esterna k' è dato da $k' = \frac{\delta}{V'} \frac{760}{p}$, in cui δ è lo spostamento, espresso in volume, osservato nella colonna del liquido esterno, V' il volume esterno del piezometro, p l' aumento di pressione prodotto nell' interno di questo.

Il risultato medio delle determinazioni fatte a 0° diede $k' = 0{,}0000289$, quello delle determinazioni a 99°, 4, $k' = 0{,}0000336$. I due valori di k' ottenuti alle due temperature di 0° e di 100° sono perfettamente confrontabili fra loro, avendo procurato che le condizioni delle esperienze, fossero, all' infuori di quelle di temperatura, perfettamente le stesse nei due casi. Possiamo quindi ammettere che il rapporto che passa fra i due valori di k' sia pur quello che deve passare fra i due valori del coefficiente di deformazione interna, e quindi scrivere: $\frac{k_0}{k_{100}} = \frac{k'_0}{k'_{100}}$ da cui $k_{100} = \frac{k'_{100}}{k'_0} k_0$. Ora se chiamiamo con Δv_0 la diminuzione apparente del volume v_0 dell' acqua per l'aumento di pressione p in una qualunque delle esperienze fatte a 0°, e con Δv_{100} la diminuzione apparente del volume v_{100} dell'acqua per l'aumento di pressione p_1 in una delle esperienze fatte a circa 100° (99°, 2) abbiamo $k_0 = \frac{\Delta v_0}{v_0 p} - \mu_0$ e $\mu_{100} = \frac{\Delta v_{100}}{v_{100} p_1} - k_{100}$. Assumendo per μ_0 il valore dato dal Grassi possiamo con le tre ultime uguaglianze calcolare k_0, k_{100} e μ_{100}.

Abbiamo scelto per questo calcolo due determinazioni, l'una a 0°, l'altra a 99°, fra quelle che diedero valori del coefficiente di compressibilità apparente coincidenti col medio ed abbiamo ottenuto $k_0 = 0{,}0000308$, $k_{100} = 0{,}0000358$, $\mu_{100} = 0{,}0000409$.

Per una variazione di temperatura di 99°, 2 si ha dunque una variazione di 0,000005 nel coefficiente di deformazione interna del piezometro B. Non avendo potuto eseguire determinazioni a temperature intermedie abbiamo ammesso, quantunque non lo si possa fare a tutto rigore, che la variazione del coefficiente di deformazione sia proporzionale all'aumento di temperatura, tanto più trattandosi di una variazione totale piccola per un intervallo di temperatura abbastanza grande. Così abbiamo calcolato il coefficiente di deformazione per le diverse temperature, alle quali furono fatte le nostre determinazioni, e ne abbiamo dedotti i seguenti coefficienti di compressibilità assoluta:

t	μ	t	μ
0°	0,0000503	31.06	0,0000425
0.43	0,0000498	40.31	0,00004085
1.43	0,0000497	49.31	0,0000403
2.40	0,0000496	57.04	0,0000392
3.24	0,0000496	61.15	0,0000389
8.30	0,0000473	66.25	0,0000389
9.30	0,0000472	77.36	0,0000398
15.90	0,0000450	99.20	0,0000409

Se si costruiscono graficamente questi valori si ottiene la curva rappresentata in C (v. tav.). Su questa curva abbiamo letti i valori del coefficiente di compressibilità assoluta dell'acqua di 10° in 10°, riportati nella seguente tabella, con accanto i valori della velocità del suono nell' acqua calcolati colla formola di Newton $v := \sqrt{\frac{10333,3\,g}{\mu\, d}}$

in cui d è la densità dell'acqua alla temperatura data e $g = 9^m, 8038$ (Roma).

t	μ	v
0°	0,0000503	1419,2
10	0,0000470	1468,3
20	0,0000445	1510,2
30	0,0000425	1547,2
40	0,0000409	1579,9
50	0,0000397	1607,0
60	0,0000389	1627,3
70	0,0000390	1629,8
80	0,0000396	1622,3
90	0,0000402	1615,5
100	0,0000410	1605,4

Abbiamo poi anche determinato la temperatura alla quale si ha il minimo di compressibilità dell'acqua ed abbiamo trovato essere 63°, alla qual temperatura $\mu = 0,0000\ 388$. Alla temperatura del massimo di densità si trova $\mu = 0,0000488$ e per la velocità del suono si calcola $v = 1440,\ 8$, numero quasi coincidente con quello trovato da Colladon e Sturm (1435^m).

I risultati delle prime esperienze eseguite da uno di noi col dott. Vicentini si possono adunque riassumere nelle seguenti conclusioni:

1. La compressibilità dell'acqua diminuisce col crescere della temperatura da 0° sino a 63°. Al di là di 63° essa aumenta coll'aumentare della temperatura come per gli altri liquidi.

2. Non si può ammettere che la deformazione prodotta in un piezometro da una stessa pressione esercitata all' interno sia la stessa alle diverse temperature. Essa va aumentando sensibilmente coll'aumentare della temperatura.

3. Non esiste un massimo di compressibilità fra 1° e 2° come portavano ad ammettere le esperienze del Grassi. Per provar questo, sono state fatte due numerose serie di determinazioni a temperature comprese fra 0° e 4°.

Esperienze sulla compressibilità di alcuni idrocarburi ed alcoli.

Passiamo ora alle esperienze che formano principale oggetto della presente Memoria.

Le determinazioni sugli idrocarburi e quelle delle due prime serie sull'alcool etilico furono fatte col piezometro B, di cui si è detto sopra, le altre furono eseguite con un terzo piezometro, che diremo C. Ecco i dati relativi ai due piezometri.

Piezometro B. — La capacità interna a 0° di questo piezometro fino alla divisione 0 del suo cannello era uguale a cm³ 94,7176; la capacità media corrispondente ad ogni divisione del cannello era di cm³ 0,0007946 a 0°. Quindi il rapporto fra la capacità della divisione del cannello e quella del serbatoio era uguale a 0,000008389.

Coefficiente di dilatazione cubica del vetro.

da 0° a 25°	0,0000246
da 0. a 50.	0,0000250
da 0. a 100.	0,0000261

Il valore del coefficiente di deformazione a 0° era $k = 0{,}0000\,308$, ed a 99°, 2 $k = 0{,}0000358$, con una variazione di 0,000005 per una variazione di 99°, 2.

Ci siamo serviti di questi dati per calcolare i valori di k alle diverse temperature.

Piezometro C. — La capacità interna di questo piezometro a 0° fino alla divisione 0 del suo cannello è di cm³ 88,8880; la capacità media corrispondente ad ogni divisione del cannello è di cm³ 0,0007984 a 0°. Quindi il rapporto fra la capacità della divisione del cannello e quella del serbatoio è uguale a 0,000008982, rapporto anch' esso assai piccolo.

Riguardo al coefficiente di dilatazione cubica del vetro, abbiamo adottato gli stessi valori che per il piezometro B, essendo il piezometro C stato tratto dallo stesso vetro, e non avendo d'altronde delle piccole differenze nel calcolo dei volumi del liquido influenza sensibile nel valore del coefficiente di compressibilità, essendochè nella formola che ci dà il coefficiente di compressibilità apparente il prodotto $\Delta v.\ 760$ è sempre molto piccolo in confronto del prodotto vp. La porzione sporgente della colonna liquida si manteneva poi sempre ad una temperatura pochissimo differente da quella a cui fu fatta la calibrazione del cannello.

Abbiamo poi determinato il coefficiente di deformazione del piezometro C a 0° ed a 100°, determinando il coefficiente di compressibilità apparente dell' acqua in esso a quelle due temperature. I risultati sono riportati nelle tabelle seguenti:

Determinazioni a 0°

N.°	Pressione in mill.	a
1	3378,4	0,0000887
2	3367,9	887
3	3375,4	887
4	3368,9	889
5	3373,9	887
6	3362,0	888
7	3378,4	886
8	3346,5	889
9	3389,9	886
10	3366,9	889

$a = 0{,}0000887$

Si trova adunque per coefficiente medio di compressibilità apparente dell' acqua a 0° nel piezometro C: $a = 0{,}0000847$. Ammettendo col Grassi che il coefficiente di compressibilità sia $\mu = 0{,}0000503$, si ottiene per coefficiente di deformazione del piezometro C a 0°: $k = 0{,}0000384$.

Determinazioni a 99°,2

N.°	Pressione in mill.	a
11	2601,9	0,0000847
12	2618,4	846
13	2587,9	852
14	2569,9	846
15	2583,4	840
16	2604,9	849
17	2569,9	846

$a = 0{,}0000847$

Si ottiene così per coefficiente medio di compressibilità apparente dell' acqua a 99,°2 nel piezometro C: $a = 0{,}0000847$. Le determinazioni sull'acqua diedero per coefficiente di compressibilità assoluta a 99,°2 $\mu = 0{,}0000409$. Quindi si deduce per coefficiente di deformazione del piezometro: $k = 0{,}0000438$, con una variazione di 0,0000054 per una differenza di temperatura di 99,°2. Questi dati ci servirono a calcolare i valori di k alle diverse temperature.

I liquidi studiati sono i seguenti:

Benzina — Toluene — Xilene — Cimene dall'essenza di cumino. — Tre porzioni di petrolio, bollenti l'una fra 60° e 70°, l'altra fra 98° e 102°, la terza fra 120° e 130°. — Alcool metilico — Alcool etilico — Alcool propilico primario — Alcool isobutilico — Alcool amilico.

Idrocarburi.

Benzina. — La benzina adoperata è stata tratta da un campione di benzina dal catrame, già quasi tutto cristallizzabile a 0°, proveniente dalla fabbrica di prodotti chimici Kahlbaum. La si purificò ancora per cristallizzazione frazionata, e si ottenne così un liquido totalmente solidificabile a 0°. Il Louguinine, il quale fece uno studio accurato sulla densità e dilatazione della benzina e suoi omologhi (*Ann. chim. phys.* [4] XI, 453), considera questo come il carattere più sicuro di purezza della benzina.

Se ne determinò il peso specifico alla temperatura di 17°,60, e si trovò $d = 0{,}8816$. Dalla formola data dal Louguinine per le densità della benzina pura alle diverse temperature si calcola a quella temperatura $d = 0{,}8809$.

Nelle tabelle seguenti sono registrati i risultati della determinazione della compressibilità alle diverse temperature. Per ciascuna serie è dato il valore di k,

coefficiente di deformazione del piezometro corrispondente alla temperatura media alla quale vennero fatte le determinazioni.

Benzina.

SERIE I.

$k = 0,0000316$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
18	15°4	749,3	0,986	0,0001179	0,0000863
19	—	2237,5	2,944	1192	876
20	—	3361,8	4,423	1196	880
21	—	3033,7	3,992	1194	878
22	—	3400,6	4,474	1177	861
23	—	3412,5	4,490	1183	867

$t = 15°4$ μ medio $= 0,0000871$

SERIE II.

$k = 0,0000333$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
24	50°0	2955,4	3,889	0,0001451	0,0001118
25	49,8	2245,2	2,954	1435	1102
26	50,3	3359,4	4,420	1441	1108
27	50,3	2978,6	3,919	1466	1133
28	50,3	2264,0	2,979	1420	1087

$t = 50°1$ μ medio $= 0,0001110$

Diamo anche la serie seguente di determinazioni, quantunque per le condizioni speciali di temperatura in cui furono fatte le esperienze, i valori in essa riferiti non meritino la stessa fiducia degli altri. In questa serie di sperienze non fu possibile di ottenere una costanza sufficiente nella temperatura, eccezionalmente più grande che in tutte le altre serie, e quindi si dovettero portare delle correzioni abbastanza notevoli in confronto della grandezza della variazione di volume nella compressione.

SERIE III.

$k = 0,0000347$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
29	78°8	1485,8	1,955	0,0001625	0,0001278
30	78,9	2956.4	3,890	1580	1233
31	78,7	1471,5	1,936	1595	1248
32	78,6	709,1	0,933	1663	1316
33	78,8	1545,6	2,034	1604	1257

$t = 78°8$ μ medio — 0,0001264

Riassumendo otteniamo i seguenti valori per la compressibilità assoluta della benzina alle diverse temperature:

t	μ
15°4	0,0000871
50,1	0,0001110
78,8	0,0001264

Questi risultati sono fra loro legati dalla formola:

$$\mu_t = 0,0000871 + a\,(t - 15,4) - b(t - 15,4)^2 \text{ in cui } \log a = 3,88799, \log b = 1,38347.$$

Toluene. — Il toluene adoperato è quello stesso che aveva servito per lo studio fatto dal prof. Naccari e da uno di noi sulla tensione massima dei vapori e sulla dilatazione termica di alcuni liquidi (*Atti della R. Accad. delle scienze di Torino* 1881, vol. XVI). La densità a 0° è uguale a 0,88218. Beilstein e Kühlberg trovarono 0,8824 e Louguinine 0,8841. Il punto d'ebollizione è 109°,34 a 739,^{mm}9.

Toluene.

SERIE I.

$k = 0,0000308$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
34	0°	3363,2	4,425	0,0001077	0,0000769
35	—	3343,2	4,399	1076	768
36	—	3357,2	4,417	1079	771
37	—	3374,1	4,440	1079	771
38	—	3385,6	4,455	1079	771
39	—	3405,1	4,480	1078	770

$t = 0°$ μ medio $= 0,0000770$

SERIE II.

$k = 0,0000316$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
40	15°4	3362,9	4,425	0,0001171	0,0000865
41	—	3367,4	4,431	1169	853
42	—	3370,4	4,435	1167	851
43	—	3343,4	4,399	1172	856
44	—	3362,6	4,425	1166	850
45	—	3366,1	4,429	1161	845

$t = 15°4$ μ medio $= 0,0000852$

SERIE III.

$k = 0,0000332$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
46	47°8	3327,1	4,378	0.0001336	0,0001004
47	47,6	3318,0	4,360	1336	1004
48	47,6	3328.0	4,378	1328	0996
49	47,6	3323,0	4,372	1340	1008

$t = 47°65$ μ medio $= 0,0001003$

SERIE IV.

$k = 0,0000358$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
50	99°0	2660,2	3,500	0,0001842	0,0001484
51	—	2267,7	2,984	1823	1465
52	—	1537,9	2,024	1835	1477
53	—	830,5	1,093	1850	1492
54	—	2338,4	3,077	1828	1470

$t = 99°0$ μ medio $= 0,0001440$

Riassumendo si ottengono i seguenti valori per la compressibilità assoluta del toluene alle diverse temperature:

t	μ
0°	0,0000770
15,4	0,0000852
47,65	0,0001003
99,0	0,0001440

La curva che si ottiene costruendo questi valori, può essere rappresentata dalla formola:

$$\mu_t = \mu_0 \ (1 + 0,0065701\ t + 0,0000174\ t^2).$$

Xilene. — Dobbiamo questo liquido alla gentilezza del prof. Icilio Guareschi, il quale ce lo diede già depurato nel suo laboratorio. La sua densità a 0° trovammo

uguale a 0,8753. Louguinine trovò 0,8770. Il suo punto d' ebollizione è 140° alla pressione di 740 mm.

Xilene.

SERIE I.

$k = 0,0000308$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
55	0°	3330,3	4,382	0,0001043	0,0000735
56	—	3337,8	4,392	1042	734
57	—	3393,1	4,465	1040	732
58	—	3389,6	4,460	1042	734
59	—	3367,1	4,431	1045	737

$t = 0°$ μ medio $= 0,0000734$

SERIE II.

$k = 0,0000316$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
60	15°4	3404,1	4,479	0,0001085	0,0000769
61	15,5	3390,2	4,461	1079	763
62	15,5	3384,9	4,454	1088	772
63	15,6	3383,8	4,452	1081	765
64	15,4	3374,1	4,440	1095	779

$t = 15°5$ μ medio $= 0,0000770$

SERIE III.

$k = 0,0000332$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
65	48°2	3356,7	4,417	0,0001270	0,0000938
66	48,0	3363,7	4,426	1276	944
67	48,0	3376,6	4,443	1277	945
68	48,2	3353,2	4,412	1255	923

$t = 48°1$ μ medio $= 0,0000939$

SERIE IV.

$k = 0,0000358$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
69	99°2	3358,3	4,419	0,0001702	0,0001314
70	—	3343,3	4,399	1703	1315
71	—	3342,3	4,398	1705	1347
72	—	3373,2	4,438	1694	1336
73	—	3378,2	4,445	1698	1340

$t = 99°2$ μ medio $= 0,0001342$

I valori della compressibilità assoluta dello xilene alle temperature sopra accennate sarebbero i seguenti:

t	μ
0°	0,0000734
15,5	0,0000770
48,1	0,0000939
99,2	0,0001342

La curva della compressibilità del Xilene fra 0° e 99°,2 può essere rappresentata dalla formola:

$$\mu_t = \mu_0 \ (1 + 0,002204\, t + 0,0000644\, t^2).$$

Cimene. — Dobbiamo anche questo liquido alla cortesia del prof. Guareschi. Siccome però ce lo diede quale lo ebbe egli dal commercio, lo sottoponemmo a distillazione frazionata semplice, poi una porzione bollente fra 171° e 174° distillammo sul sodio, e ne separammo una buona frazione bollente fra 172 e 173° alla pressione di 742^{mm}. La determinazione della densità a 0° diede 0,8751. Kopp trovò 0,8778, e Louguinine 0,8705 per il cimene dall' essenza di cumino, e 0,8732 per quello della canfora; si sa però che questi due cimeni hanno la stessa costituzione. Spica per un cimene bollente fra 173,°2 e 174,°2 trovò do = 0,8728. Il

punto di ebollizione sopra riferito è un po' inferiore a quello che comunemente si dà per il cimene; facciamo però notare che nella determinazione di esso non fu usata alcuna cura speciale, desso è semplicemente la temperatura indicata dal termometro durante la distillazione continua del liquido, corretta però la colonna sporgente; del termometro poi non si era riscontrata l'esattezza al di sopra di 100°. Del resto il Louguinine più volte fa notare nella Memoria sopracitata come non si debba dare grande importanza al punto di ebollizione dei liquidi come carattere della loro purezza. Abbiamo quindi considerato il nostro cimene come sufficientemente puro.

Cimene dall'essenza di cumino.

SERIE I.

$k = 0,0000308.$

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
74	0°	3390,6	4,461	0,0001028	0,0000720
75	—	3375,1	4,441	1032	724
76	—	3333,2	4,386	1035	727
77	—	3379,6	4,447	1034	726
78	—	3385,6	4,455	1034	726

$t = 0°$ μ medio $= 0,0000725$

SERIE II.

$k = 0,0000317.$

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
79	18°0	3354,7	4,414	0,0001088	0,0000771
80	17,6	3385,6	4,455	1091	774
81	17,6	3386,6	4,456	1091	774
82	17,6	3381,6	4,449	1083	766
83	17,6	3364,6	4,427	1081	764
84	17,7	3390,1	4,461	1080	763

$t = 17°6$ μ medio $= 0,0000769$

SERIE III.

$k = 0,0000333.$

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
85	50°0	3376,9	4,443	0,0001268	0,0000935
86	50,8	3365,3	4,428	1265	932
87	50,7	3342,9	4,399	1264	931
88	50,95	3352,8	4,421	1254	921

$t = 50°6$ μ medio $= 0,0000930$

SERIE IV.

$k = 0,0000358.$

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
89	99°2	3393,4	4,424	0,0001632	0,0001274
90	—	3359,0	4,420	1633	1275
91	—	3371,4	4,436	1635	1277
92	—	3358,5	4,419	1645	1287
93	—	3365,4	4,428	1643	1285

$t = 99°2$ μ medio $= 0,0001279$

I valori della compressibilità assoluta del cimene studiato, sarebbero adunque:

t	μ
0°	0,0000725
17,6	0,0000769
50,6	0,0000930
99,2	0,0001279

Questi risultati possono essere espressi dalla formola:

$$\mu_t = \mu_0 \; (1 + 0,0025308 \, t + 0,0000521 \, t^2).$$

Idrocarburi dal petrolio. — In uno studio fatto l'anno scorso sopra la relazione che passa fra la densità ed il punto di ebollizione delle diverse frazioni di

un petrolio, uno di noi aveva scelto ad oggetto di ricerca un petrolio italiano, proveniente da Montechino presso Montanaro (Piacenza). Quantunque poco si sappia intorno alla composizione degli idrocarburi dei petrolii in generale, tuttavia si credette utile determinare la compressibilità di qualcuna delle frazioni ottenute, per mettere questa costante fisica in rapporto col peso specifico e con qualche altra che si vuole ancora studiare in essi, poichè, secondo l'opinione espressa dal Mendelejeff, confrontando fra loro le proprietà fisiche dei diversi idrocarburi, si potrà così arrivare ad un sistema naturale di classificazione di questi corpi secondo la loro composizione e le loro proprietà.

Frazione n. 1.

Temperatura di ebollizione 60° — 70°.
Densità a 0° = 0,7114.
» a 16,4 = 0,6965.
Probabilmente è costituita in gran parte da esano.

Serie I.

$k = 0,0000308$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
94	0°	3402,6	4,477	0,0001550	0,0001242
95	—	3399,7	4,473	1554	1246
96	—	3386,7	4,456	1552	1244
97	—	3427,7	4,510	1553	1245
98	—	3408,2	4,484	1545	1237
99	—	3336,7	4,390	1569	1261

$t = 0°$ μ medio = 0,0001246

Serie II.

$k = 0,0000315$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
100	14°6	3361,6	4,423	0,0001703	0,0001388
101	14,7	3355,3	4,415	1704	1389
102	14,6	3379,9	4,447	1718	1403
103	14,6	729,0	0,959	1732	1417
104	14,6	1523,8	2,005	1733	1418
105	14,6	2255,5	2,968	1732	1417
106	14,6	3386,1	4,455	1726	1411

$t = 14°6$ μ medio = 0,0001406

Frazione n. 2.

Temperatura di ebollizione 98° — 102°.
Densità a 0° = 0,7716.
» a 15°,4 = 0,7586.

Serie I.

$k = 0,0000308$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
107	0°	1528,1	2.011	0,0001315	0,0001007
108	—	3017,3	3,970	1312	1004
109	—	3354,8	4,414	1309	1001
110	—	3400,6	4,474	1307	999
111	—	3361,3	4,423	1309	1001

$t = 0°$ μ medio = 0,0001002

Serie II.

$k = 0,0000315$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
112	14°4	1520,4	2,000	0,0001407	0,0001092
113	14,6	2215,2	2.915	1381	1069
114	14,6	2997,8	3,944	1396	1081
115	14,5	3370,5	4,435	1406	1091
116	14,4	3385,0	4,454	1395	1080

$t = 14°5$ μ medio = 0,0001083

Frazione n. 3.

Temperatura di ebollizione 120° — 130°.
Densità a 0° = 0,7757.
» a 16,8 = 0,7512.

Serie I.

$k = 0,0000308$.

N.°	t	Pressione		a	μ
		mill.	atm.		
117	0°	753,8	0,992	0,0001252	0,0000944
118	—	3035,2	3,994	1261	953
119	—	3016,9	3,970	1265	957
120	—	2297,4	3,023	1253	945

$t = 0°$ — μ medio = 0,0000950

Serie II.

$k = 0,0000314$.

N.°	t	Pressione		a	μ
		mill.	atm.		
121	15°0	3016,0	3,969	0,0001348	0,0001031
122	15,0	2238,5	2,945	1351	1037
123	15,05	1526,1	2,008	1352	1038
124	15,10	3377,1	1,444	1359	1045
125	15,05	3394,1	4,466	1352	1038

$t = 15°05$ — μ medio = 0,0001038

Vediamo come il coefficiente di compressibilità di questi petrolii vada diminuendo coll'aumentare del punto di ebollizione, ma che però le due ultime frazioni le quali presentano una piccola differenza nella densità, hanno pure coefficienti di compressibilità poco differenti, quantunque i punti di ebollizione presentino una differenza di circa 25°.

Alcooli.

Alcool metilico. — Questo alcool, come tutti gli altri, dobbiamo alla cortesia del prof. Naccari. Il liquido era stato fornito già come puro dalla fabbrica del Kahlbaum. Lo abbiamo sottoposto prima a distillazione frazionata separandone una buona porzione bollente fra 62°,5 e 64°. Da questa per distillazione frazionata sul sodio, abbiamo separata una frazione che passava fra 63°,6 e 64°,2 alla pressione di 733^{mm},4; la densità a 0° si trovò uguale a 0,8162. Di Kopp si hanno due determinazioni: 0,8142 e 0,81796.

Alcool metilico.

Serie I.

$k = 0,0000384$.

N.°	t	Pressione		a	a
		mill.	atm.		
126	0°	3408,8	4,485	0,0001391	0,0001007
127	—	3381.8	4,454	1392	1008
128	—	3394,8	4,466	1392	1008
129	—	3379.3	4,446	1396	1012
130	—	3399.8	4,473	1392	1008

$t = 0°$ — μ medio = 0,0001008

Serie II.

$k = 0.0000392$.

N.°	t	Pressione		a	μ
		mill.	atm.		
131	15°4	3399,3	4,473	0,0001491	0,0001099
132	15,3	3396,3	4.467	1503	1111
133	15,2	3374,8	4,440	1507	1115
134	15,3	3115,3	4,494	1485	1093
135	15.4	3379,3	4.446	1493	1101

$t = 15°3$ — μ medio = 0.0001104

SERIE III.

$k = 0,0000115$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
136	57°2	2632,7	3,464	0,0001797	0,0001382
137	57,7	1812,4	2,385	1835	1420
138	57,9	3394,8	4,466	1822	1407
139	57,8	3389,1	4,459	1814	1399
140	57,7	3385,1	4,454	1813	1398
141	57,1	2279,4	2,999	1842	1427

$t = 57°6$ μ medio $= 0,0001403$

I valori del coefficiente di compressibilità dell'alcool metilico sono quindi i seguenti alle tre temperature delle esperienze:

t	μ
0°	0,0001008
15,3	0,0001104
57,6	0,0001403

Questi risultati possono essere rappresentati dalla formola:

$$\mu_t = \mu_0 (1 + 0,006225t + 0,00001007t^2).$$

Alcool etilico. — Un campione di alcool etilico purissimo della fabbrica Kahlbaum presentò a 0° la densità 0,8060. Mendelejeff dà per valore della densità dell'alcool 0,80625 a 0° e Kopp 0,8095. Abbiamo quindi considerato quel campione come sufficientemente puro per le nostre esperienze.

Alcool etilico.

SERIE I.

$k = 0,0000308$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
142	0°	3350,2	4,408	0,0001279	0,0000971
143	—	3376,0	4,441	1272	964
144	—	3389,0	4,459	1276	968
145	—	3373,0	4,438	1280	972
146	—	3351,2	4,409	1280	973

$t = 0°$ μ medio $= 0,0000970$

SERIE II.

$k = 0,0000317$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
147	18°0	3362,7	4,425	0,0001348	0,0001031
148	18,0	3362,7	4,425	1358	1041
149	18,15	3361,7	4,424	1358	1041
150	18,2	3374,5	4,440	1355	1038
151	18,2	3385,5	4,454	1369	1052

$t = 18°1$ μ medio $= 0,0001041$

Serie III.

k = 0,0000411.

N.°	t	Pressione mill.	atm.	a	μ
152	49°55	3385,6	4,454	0,0001704	0,0001293
153	49,8	3360,2	4,423	1706	1295
154	49,8	3366,2	4,429	1680	1269
155	49,8	3372,0	4,438	1711	1300
156	50,0	3373,5	4,439	1698	1287
157	50,35	3382,0	4,450	1696	1285
158	50.6	3371,5	4,438	1700	1289

t = 50°0 μ medio = 0,0001290

Serie IV.

k = 0,0000421.

N.°	t	Pressione mill.	atm.	a	μ
159	68°2	1635,9	2,710	0,0001846	0,0001425
160	68,1	3358,2	4,419	1854	1433
161	68,7	3370,7	4,437	1777	1356
162	69,2	835,5	1,097	1805	1384

t = 68°5 μ medio = 0,0001399

I coefficienti di compressibilità dell'alcool etilico ottenuti sono quindi i seguenti:

t	μ
0°	0,0000970
18,1	0,0001040
50,0	0,0001290
68,5	0,0001399

Questi risultati possono essere rappresentati dalla formola seguente:

$$\mu_t = \mu_0 (1 + 0{,}003177t + 0{,}0000550t^2).$$

Alcool propilico primario. — L'alcool adoperato è lo stesso che ha servito al prof. Naccari ed a uno di noi per lo studio sperimentale già sopra accennato.

La sua densità a 0° e 0,8203; il Rossi trovò 0,8205.

Punto di ebollizione: 95°,91 a 742^{mm},5.

Alcool propilico primario.

Serie I.

k = 0,0000384.

N.°	t	Pressione mill.	atm.	a	μ
163	0°	3378.1	4,445	0,0001251	0,0000867
164	—	3385,1	4,454	1241	857
165	—	3360,3	4,421	1236	852
166	—	3391,6	4,461	1243	859
167	—	3384,6	4,454	1241	857

t = 0° μ medio = 0,0000858

Serie II.

k = 0,0000392.

N.°	t	Pressione mill.	atm.	a	μ
168	15°0	3361,2	4,423	0,0001311	0,0000919
169	—	3390,0	4,459	1307	915
170	—	3399,0	4,472	1292	900
171	—	3384,5	4,454	1297	905
172	—	3399.5	4,472	1305	913

t = 15°0 μ medio = 0,0000910

Serie III.

$k = 0,0000411$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
173	49°6	3378,6	4,445	0,0001518	0,0001107
174	49,6	3398,1	4,471	1503	1092
175	49,5	3386,1	4,456	1513	1102
176	49,4	3396,6	4,469	1517	1106
177	49,4	3369,1	4,435	1531	1120
178	49,4	3361,2	4,423	1485	1074
179	51,2	3375,6	4,441	1495	1084

$t = 49°5$ μ medio $= 0,0001098$

Serie IV.

Siccome l' alcool propilico ha alla temperatura dei vapori dell' acqua bollente una tensione di vapore maggiore di una atmosfera, così queste determinazioni si fecero tenendo l'alcool sottoposto alla pressione di un' atmosfera effettiva.

$k = 0,0000438$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
180	99°3	719,8 — 3380,7	0,947 — 4,448	0,0002023	0,0001585
181	—	714,8 — 3371,7	0,940 — 4,345	2020	1582
182	—	710,8 — 3353,8	0,935 — 4,413	2026	1588
183	—	714,8 — 3374,8	0,940 — 4,440	2020	1582
184	—	709,5 — 3369,7	0,933 — 4,433	2033	1595

$t = 99°3$ μ medio $= 0,0001583$

I coefficienti di compressibilità trovati per l'alcool propilico sono i seguenti:

t	μ
0°	0,0000858
15,0	0,0000910
49,5	0,0001093
99,3	0,0001583

Formola che rappresenta questi risultati:

$$\mu_t = \mu_0 (1 + 0,003245 t + 0,00005302 t^2).$$

Alcool isobutilico. — Questo alcool è pure quello che ha servito per le esperienze ora accennate. La sua densità a 0° è uguale a 0,81624. Pierre e Puchot trovarono 0,817; Lieben 0,827.

Punto di ebollizione: 106°,4 a 741^{mm},8.

Alcool isobutilico.

Serie I.

$k = 0,0000384$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
185	0°	3409,3	4,486	0,0001267	0,0000883
186	—	3397,3	4,470	1266	878
187	—	3372,8	4,444	1267	883
188	—	3394,8	4,467	1264	880
189	—	3403,3	4,404	1271	887

$t = 0°$ μ medio $= 0,0000882$

Serie II.

$k = 0,0000392$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
190	14°6	3400,8	4,470	0,0001319	0,0000927
191	14,6	3375,3	4,441	1332	940
192	14,8	3404,3	4,405	1328	936
193	14,8	3399,8	4,473	1322	930
194	15,0	3392,8	4,464	1320	928

$t = 14°8$ μ medio $= 0,0000932$

Serie III.

$k = 0,0000411$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
195	51°0	3405,7	4,407	0,0001572	0,0001161
196	50,6	2233,9	2,939	1564	1153
197	—	1545,8	2,034	1565	1154
198	—	2303,7	3,031	1564	1153
199	—	2982,3	3,924	1544	1133

$t = 50°7$ μ medio $= 0,0001151$

Serie IV.

$k = 0,0000438$.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
200	98°9	3375,1	4,441	0,0002082	0,0001644
201	—	3344,8	4,401	2078	1640
202	—	3381,6	4,449	2071	1633
203	—	3371,6	4,443	2066	1628

$t = 98°9$ μ medio $= 0,0001636$

Il coefficiente di compressibilità dell'alcool isobutilico presenta quindi i seguenti valori:

t	μ
0°	0,0000882
14,8	0,0000932
50,7	0,0001151
98,9	0,0001636

Formola che rappresenta questi risultati:

$$\mu_t = \mu_0 \, (1 + 0,0029833t + 0,0000572t^2).$$

Alcool amilico. — Dell'alcool amilico inviato come purissimo dalla fabbrica Kahlbaum venne sottoposto alla distillazione frazionata, e se ne separò una frazione principale, bollente alla temperatura di 130°,5 a 131°,2 alla pressione di $736^{mm},7$. La sua densità a 0° si trovò uguale a 0,8252; Kopp dà 0,8248. Balbiano trovò per l'alcool amilico inattivo la densità 0,8238 a 0°.

Alcool amilico.

SERIE I.

k = 0,0000384.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
204	0°	3367,1	4,430	0,0001203	0,0000819
205	—	3371,1	4,443	1199	815
206	—	3393,1	4,464	1198	814
207	—	3383,1	4,451	1202	818

$t = 0°$ μ medio = 0,00008165

SERIE II.

k = 0,0000393.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
208	17°6	3351,9	4.410	0,0001260	0,0000867
209	17,5	3373,2	4,446	1260	867
210	17,4	3369,7	4,441	1263	870
211	17,4	3349,9	4,408	1270	877
212	17,3	3382,2	4,450	1264	871
213	17,2	3368,2	4,439	1263	870

$t = 17°4$ μ medio = 0,0000870

SERIE III.

k = 0,0000411.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
214	50°5	3373,8	4,446	0,0001448	0,0001037
215	50,3	3389,3	4,460	1447	1036
216	50,2	3398,8	4,472	1451	1040
217	50,6	3398,3	4,472	1442	1031
218	50,8	3384,8	4,453	1433	1022
219	50,9	3395,8	4,468	1432	1021

$t = 50°5$ μ medio = 0,0001032

SERIE IV.

k = 0,0000438.

N.°	t	Pressione mill.	Pressione atm.	a	μ
220	99°0	3383,6	4,452	0,0001883	0,0001445
221	—	3410,6	4,488	1885	1447
222	—	3375,6	4,442	1887	1449
223	—	3383,6	4,452	1883	1445
224	—	3356,2	4,416	1871	1433

$t = 99°0$ μ medio = 0,0001444

Riassumendo si hanno i seguenti valori dei coefficienti di compressibilità dell'alcool amilico.

t	μ
0°	0,00008165
17,4	0,0000870
50,5	0,0001030
99,0	0,0001444

Formola che rappresenta questi risultati:

$$\mu_t = \mu_0 (1 + 0,0029134t + 0,0000490t^2).$$

Considerazioni sui risultati.

In principio della presente Memoria si è detto che lo studio della compressibilità dei liquidi alle diverse temperature può avere una grande importanza anche per la verificazione di alcune formole di termodinamica. Si vuole qui accennare specialmente ad una formola stabilita dal Duprè nella sua teoria delle azioni molecolari (*Théorie mécanique de la chaleur*, p. 147), e che in qualche trattato, anche autorevole,

viene considerata senz' altro come verificata dall' esperienza. Senza esporre qui la serie delle considerazioni per le quali il Duprè giunse a stabilire la sua formola, verremo tosto alla formola stessa, e più precisamente a considerarla sotto la forma che ad essa diede l' Amagat (*Ann. chim. phis.* 1877, t. II p. 520). Detta A la forza di attrazione totale che si deve vincere quando si vogliano separare secondo una sezione piana due parti di un corpo, forza che il Duprè chiama *attrazione al contatto*, detta t la temperatura di un corpo solido o liquido, detto α il suo coefficiente di dilatazione a pressione costante, detto β il suo coefficiente di compressibilità, Duprè stabilisce la formola seguente:

$$A = 10333\,(274 + t)\,\frac{\alpha}{\beta}\,.$$

Egli dimostra poi che $A = a\Delta^2$, essendo Δ la densità del corpo e a una costante specifica per ciascun corpo, che non dipende che dalla sua molecola, cioè dalla sua natura chimica.

Partendo da queste due espressioni di A, l' Amagat giunge ad una equazione che permette di calcolare il coefficiente di compressibilità di un corpo sotto una pressione e ad una temperatura qualunque, se si conosce il coefficiente dello stesso corpo sotto un' altra pressione e ad un' altra temperatura, il coefficiente di dilatazione e la sua densità nei due casi.

Diffatti, rappresentando la temperatura assoluta $274 + t$ con T ed indicando con k una costante, si potrà scrivere:

$$\frac{T\alpha}{a\beta\Delta^2} = k\,.$$

Se poi si indicano con α', β', a', Δ' le quantità analoghe ad α, β, a, Δ per quel medesimo corpo alla temperatura T', allora:

$$\frac{T\alpha}{a\beta\Delta^2} = \frac{T'\alpha'}{a'\beta'\Delta'^2}\,, \qquad (1)$$

ed ammettendo per uno stesso corpo $a = a'$, si ha:

$$\frac{T\alpha}{\beta\Delta^2} = \frac{T'\alpha'}{\beta'\Delta'^2}\,,$$

donde:

$$\beta' = \frac{T'}{T} \times \frac{\alpha'}{\alpha} \times \left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)^2 \times \beta\,. \qquad (2)$$

Amagat ha verificato, nel caso che varii la sola temperatura, quest' ultima relazione per l'etere ed il cloruro d'etile, ed ha ottenuto risultati abbastanza soddisfacenti. L'Amagat però si servì ne' suoi calcoli di dati sperimentali relativi alla compressibilità ed alla dilatazione non determinati sopra lo stesso liquido. Vale a dire, per i coefficienti di compressibilità si servì dei suoi valori tanto per il cloruro di etile quanto per l'ossido di etile, ma per i coefficienti di dilatazione e per la densità dedusse i valori relativi dalle determinazioni di Drion e di Isidoro Pierre per il primo liquido, e da quelle di Pierre per il secondo. La verificazione per l'ossido di etile poi non potè essere fatta che fino a 38°. La verificazione della formola fatta con dati sperimentali determinati su campioni diversi anche di uno stesso composto,

non ci pare così rigorosa come quella che si faccia con valori ottenuti per uno stesso campione. Egli è perciò che per le nostre esperienze abbiamo scelto tre dei liquidi, la cui dilatazione termica era stata determinata nello studio sperimentale già accennato del prof. Naccari con uno di noi, ed abbiamo adoperato gli stessi campioni pei quali quelle determinazioni erano state fatte. Tali sono il toluene, l'alcool propilico primario e l'alcool isobutilico. Ed ecco i risultati a cui siam giunti applicando la formola dell'Amagat.

Toluene. — Le esperienze più volte accennate hanno condotto alla formola:

$$\delta' = a - bt - ct^2,$$

in cui:

$$a = 0{,}88218 \qquad \log b = 6{,}9584796 \qquad \log c = 3{,}6912505.$$

Ammettendo per approssimazione:

$$v_t = 1 + \frac{b}{a}t + \frac{c}{a}t^2,$$

si è calcolato:

$$v_t = 1 + 0{,}0010302t + 0{,}0000005568t^2,$$

e quindi:

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}0010302 + 0{,}0000005568 \times 2t.$$

Quindi se nella equazione (2) si fa $T = 273$, si avrà $\alpha = 0{,}0010302$, $\Delta = 0{,}88218$, e dalle nostre determinazioni $\beta = 0{,}0000770$.

Applichiamo la formola alla determinazione di β' alle tre temperature a cui fu determinata la compressibilità del toluene.

Si otterrà:

$$t = 15{,}4 \quad T' = 288{,}4 \quad \alpha' = 0{,}0010473 \quad \Delta' = 0{,}86806$$
$$\beta' = 0{,}0000854$$
$$t = 47{,}65 \quad T' = 320{,}65 \quad \alpha' = 0{,}0010833 \quad \Delta' = 0{,}83775$$
$$\beta' = 0{,}0001055$$
$$t = 99{,}0 \quad T' = 372{,}0 \quad \alpha' = 0{,}0011404 \quad \Delta' = 0{,}78740$$
$$\beta' = 0{,}0001455$$

Confrontando i valori sperimentali coi calcolati abbiamo:

t	μ	β'	$\delta\, 10^7$
15°4	0,0000852	0,0000854	+ 2
47,65	0,0001003	0,0001055	+ 52
99,0	0,0001440	0,0001455	+ 15

Se si tien conto che le grandezze a misurarsi sono molto piccole, per il toluene la formola sarebbe verificata in modo abbastanza soddisfacente.

Alcool propilico primario. — Per questo liquido si è ottenuto:

$$\delta' = 0{,}8203 - at + bt^2 - ct^3,$$

in cui:

$$\log a = 6{,}90228 \qquad \log b = 3{,}66482 \qquad \log c = 2{,}10469,$$

donde si calcola la formola approssimata:

$$v_t = 1 + 0,0009734t - 0,0000005634t + 0,00000001551t^3,$$

e $$\frac{dv}{dt} = 0,0009734 - 0,0000005634\ 2t + 0,00000001551 \times 3t^2.$$

Se nell'equazione (2) si fa $T = 273$, allora $\alpha = 0,0009734$, $\Delta = 0,8203$, e le esperienze hanno dato $\beta = 0,0000858$.

Sopra quei valori si calcola:

per $t = 15,0$ $T = 288,0$ $\alpha' = 0,0009680$ $\Delta' = 0,8084$
$\beta' = 0,0000927$
per $t = 49,5$ $T' = 322,5$ $\alpha' = 0,0010316$ $\Delta' = 0,7804$
$\beta' = 0,0001187$
per $t = 99,3$ $T = 372,3$ $\alpha' = 0,0013133$ $\Delta' = 0,7331$
$\beta' = 0,0001975$

Ponendo a confronto i dati sperimentali coi calcolati si ha:

t	μ	β'	$\delta\, 10^7$
15°0	0,0000910	0,0000927	+ 17
49.5	0,0001098	0,0001187	+ 89
99,3	0,0001583	0,0001975	+ 392

Le differenze tra i valori calcolati ed i trovati sono già molto grandi.

Alcool isobutilico. — Per questo liquido abbiamo:

$$\delta' = 0,81624 - At - Bt^2 - Ct^3,$$

in cui:

$$\log A = 6,87551 \qquad \log B = 3,43912 \qquad \log C = 1,86857,$$

da cui si calcola la formola approssimata:

$$v_t = 1 + 0,000920t + 0,000000337t^2 + 0,00000000905t^3,$$

e $$\frac{dv}{dt} = 0,000920t + 0,000000 \times 337 \times 2t + 0,00000000905 \times 3t^2$$

Se nell'equazione (2) si fa $T = 273$, allora $\alpha = 0,000920$, $\Delta = 0,8162$, e le esperienze hanno dato $\beta = 0,0000882$.

Da quelle espressioni si calcola:

per $t = 14,8$ $T' = 287,8$ $\alpha' = 0,000936$ $\Delta' = 0,80504$
$\beta' = 0,0000972$
per $t = 50,6$ $T' = 323,6$ $\alpha' = 0,001023$ $\Delta' = 0,7766$
$\beta' = 0,0001284$
per $t = 98,9$ $T' = 371,9$ $\alpha' = 0,001253$ $\Delta' = 0,7321$
$\beta' = 0,0002034$

Nella tabella seguente si confrontano i valori osservati coi calcolati:

t	μ	β'	$\delta\, 10^7$
14°8	0,0000932	0,0000972	+ 40
50,6	0,0001151	0,0001284	+ 133
98,9	0,0001636	0,0002034	+ 398

Le differenze fra i valori trovati e i calcolati per questo alcool sono più grandi ancora che per l'altro.

Vediamo adunque come la formola dell'Amagat dia dei risultati quantunque soltanto approssimati, tuttavia abbastanza soddisfacenti per il toluene, non per gli alcoli propilico ed isobutilico.

Proseguimmo nella verificazione di quella formola anche per gli altri liquidi da noi studiati, servendoci nei calcoli di formole per la dilatazione termica date da altri sperimentatori. Per gli idrocarburi ottenemmo ancora dei risultati abbastanza soddisfacenti come col toluene; per gli alcoli invece i valori che si calcolano sono sempre molto differenti da quelli trovati, specialmente alle temperature superiori.

La formola dell'Amagat per quei liquidi pei quali dà risultati soddisfacenti, possiamo mettere sotto un' altra forma, la quale permette di calcolare una espressione della forma:

$$\mu_t = \mu_0 (1 + at + bt^2)$$

oppure:

$$\mu_t = \mu_0 (1 + at + bt^2 + ct^3),$$

in cui μ_0 è il coefficiente di compressibilità a 0°, μ_t quello ad una temperatura qualunque t, ed a, b, c sono costanti, che sono funzioni di quelle delle formole della dilatazione termica dello stesso liquido. Diffatti noi possiamo mettere la equazione (2) sotto quest'altra forma:

$$\beta' = \frac{T' \alpha' V'^2}{T \alpha V^2} \beta,$$

essendo V e V' i volumi del corpo alle due temperature T e T'. Se ora facciamo $T = 273$, $T' = 273 + t$, e indichiamo d'ora innanzi con α_0, α_t, V_0, V_t, μ_0, μ_t rispettivamente le quantità α, α', V, V', β, β', avremo:

$$\frac{\mu_t}{\mu_0} = \frac{(273 + t) \alpha_t V_t^2}{273 \alpha_0 V_0}.$$

Ora in generale noi possiamo avere delle espressioni della forma seguente per V_t e α_t:

$$V_t = 1 + at + bt^2,$$

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} = a + 2bt,$$

oppure:

$$V_t = 1 + at + bt^2 + ct^3$$

e

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} = a + 2bt + 3ct^2.$$

Se poi $V_0 = 1$, $\alpha_0 = a$, $\frac{T'}{T} = 1 + \frac{1}{273} t$, potremo arrivare, trascurando i termini molto piccoli, alla espressione:

$$\frac{\mu_t}{\mu_0} = \left(1 + \frac{1}{273} t\right) \left[1 + 2t \left(a + \frac{b}{a}\right)\right],$$

oppure a quest' altra:

$$\frac{\mu_t}{\mu_0} = 1 + \left[2\left(\frac{b}{a} + a\right) + \frac{1}{273}\right] t + \left[2\left(\frac{b}{a} + a\right)\frac{1}{273} + 3\frac{c}{a}\right] t^2 + 3\frac{c}{a}\frac{1}{273} t^3.$$

Se si esprime ora il prodotto $2\left(\frac{b}{a}+a\right)$ con una sola lettera k, e in luogo di $\frac{1}{273}$ si scrive 0,003667, allora avremo finalmente le due espressioni di μ_t:

$$\mu_t=\mu_0\left[1+(k+0{,}003667)t+0{,}003667kt^2\right] \qquad \text{I}$$

$$\mu_t=\mu_0\left[1+(k+0{,}003667)t+\left(0{,}003667k+3\frac{c}{a}\right)t^2+3\frac{c}{a}0{,}003667t^3\right]. \qquad \text{II}$$

L'applicazione di queste formole ha condotto ai seguenti risultati.

Benzina. — Per la benzina ci hanno servito le due formole per la dilatazione termica del Kopp e del Louguinine.

Quella del Kopp serve per le temperature comprese fra 11°,4 e 81°,4:

$$v_t=1+0{,}00117626t+0{,}00000127775t^2+0{,}0000000080648t^3.$$

Da essa si calcola $k=0{,}004525$ e $3\frac{c}{a}=0{,}00002057$, quindi:

$$\mu_t=\mu_0(1+0{,}00819t+0{,}0000372t^2+0{,}0000000755t^3).$$

Siccome però non abbiamo potuto determinare il coefficiente di compressibilità a 0°, essendo la nostra benzina solidificata a questa temperatura, abbiamo eliminato μ_0 fra due equazioni, la generale che esprime μ_t, ed una in cui a μ_t abbiamo sostituito il suo valore a 15°,4 determinato direttamente: 0,0000871, ed a t il valore 15,4. Abbiamo così ottenuto la seguente formola per la benzina:

$$\mu'_t=\frac{0{,}0000871}{1{,}1352}(1+0{,}00819t+0{,}0000372t^2+0{,}0000000755t^3),$$

colla quale abbiamo calcolato i valori di μ alle due altre temperature.

La formola del Louguinine per la dilatazione della benzina è a due termini in t:

$$v_t=1+0{,}00116t+0{,}000002226t^2,$$

da cui si calcola $k=0{,}00616$, e

$$\mu_t=\mu_0(1+0{,}00983t+0{,}0000361t^2),$$

dalla quale si passa nel modo suddetto a

$$\mu'_t=\frac{0{,}0000871}{1{,}1601}(1+0{,}00983t+0{,}0000361t^2).$$

Nella tabella seguente si pongono a confronto i valori sperimentali ed i calcolati colle due formole distintamente, chiamando μ_1 quello calcolato colla prima, μ_2 quello calcolato colla seconda:

t	μ	μ_1	$\delta 10^6$	μ_2	$\delta 10^6$
15°4	0,000087	—	—	—	—
50,1	0,000111	116	+5	119	+8
78,8	0,000126	147	+21	150	+24

Alla temperatura di 78°,8 la differenza è molto grande.

Toluene. — Aggiungiamo ai valori calcolati sopra accennati, altri calcolati con una formola data dal Louguinine per la dilatazione termica del toluene. Dalla formola dalle densità data da questo autore:

$$d=0{,}8841-0{,}0009101t-0{,}0000004226t^2$$

si calcola:

$$v_t = 1 + 0{,}001029t + 0{,}000000478t^2,$$

da cui $k = 0{,}002987$, e deducendosi dalle nostre esperienze $\mu_0 = 0{,}0000770$, si avrà:

$$\mu_t = 0{,}0000770\,(1 + 0{,}00666t + 0{,}0000110t^2).$$

Nella tabella seguente si mettono a confronto i valori sperimentali di μ coi valori μ_1 calcolati colla prima formola della compressibilità sopra accennata, e μ_2 calcolati con quest' ultima.

t	μ	μ_1	$\delta\,10^6$	μ_2	$\delta\,10^6$
0°	0,000077	—	—	—	—
15,4	0,000085	0,000085	0	0,000085	0
47,65	0,000100	0,000105	+ 5	0,000103	+ 3
99,0	0,000144	0,000145	+ 1	0,000136	— 8

Xilene. — Formola del Louguinine:

$$d = 0{,}8770 - 0{,}0008415t - 0{,}000000367t^2,$$

da cui si calcola la formola approssimata:

$$v_t = 1 + 0{,}0009595t + 0{,}0000004185t^2,$$

da cui $k = 0{,}002791$, ed essendo $\mu_0 = 0{,}0000734$,

$$\mu_t = 0{,}0000734\,(1 + 0{,}00646t + 0{,}0000102t^2).$$

Nella tabella si mettono a confronto i valori dati dall' esperienza ed i calcolati:

t	μ	μ_1	$\delta\,10^6$
0°	0,000073	—	—
15,5	0,000077	0,000081	+ 4
48,1	0,000094	0,000098	+ 4
99,2	0,000134	0,000128	— 6

Cimene. — Per il cimene abbiamo due formole per la dilatazione del Louguinine, l'una per il cimene dall' essenza di cumino, l'altra per il cimene dalla canfora. Siccome i due cimeni hanno la stessa costituzione chimica, così abbiamo calcolato due formole della compressibilità corrispondenti alle due per la dilatazione del Louguinine.

Per il cimene dall'essenza di cumino abbiamo:

$$d = 0{,}8705 - 0{,}000799t - 0{,}000000118t^2,$$

da cui si calcola la formola approssimata:

$$v_t = 1 + 0{,}000918t + 0{,}000000136t^2,$$

donde $k = 0{,}002132$, ed essendo $\mu_0 = 0{,}0000725$,

$$\mu_t = 0{,}0000725\,(1 + 0{,}00580t + 0{,}00000782t^2). \qquad (1)$$

Per il cimene dalla canfora Louguinine dà la formola:

$$d = 0{,}8732 - 0{,}000785t - 0{,}000000275t^2,$$

da cui si calcola:

$$v_t = 1 + 0{,}000899t + 0{,}000000315t^2,$$

donde $k = 0{,}002498$, ed ammettendo anche per il cimene dalla canfora $\mu_0 = 0{,}0000725$,

$$\mu_t = 0{,}0000725\,(1 + 0{,}00617t + 0{,}00000917t^2). \qquad (2)$$

Abbiamo finalmente per il cimene (non ci risulta se dall'essenza di cumino o dalla canfora) una formola a tre termini del Kopp:

$$v_t = 1 + 0{,}0009406t + 0{,}00000038035t^2 + 0{,}0000000048667t^3,$$

da cui si calcola $k = 0{,}002691$ e $3\frac{c}{a} = 0{,}00001552$; ed essendo $\mu_0 = 0{,}0000725$,

$$\mu_t = 0{,}0000725\,(1 + 0{,}006358t + 0{,}00002539t^2 + 0{,}0000000878t^3). \qquad (3)$$

Nella tabella seguente si confrontano i valori di μ sperimentali coi calcolati μ_1 colla formola (1), μ_2 colla (2), μ_3 colla (3).

t	μ	μ_1	$\delta\,10^6$	μ_2	$\delta\,10^6$	μ_3	$\delta\,10^6$
0°	0,0000725	—	—	—	—	—	—
16,6	0,000077	0,000080	+ 3	0,000081	+ 4	0,000084	+ 7
50,6	0,000093	0,000095	+ 2	0,000097	+ 4	0,000101	+ 8
99,2	0,000128	0,000120	— 8	0,000123	— 5	0,000140	+ 12

Per il toluene, lo xilene ed il cimene le differenze fra i valori trovati ed i calcolati non sono molto grandi, se si ha riguardo alle quantità da misurarsi ed alle difficoltà delle esperienze.

Si vede dunque come le formole del Duprè e dell' Amagat non si possono applicare con rigore ad alcuno dei liquidi studiati, e tutt' al più si verificano per alcuni di essi soltanto approssimativamente. La ragione di questo sta probabilmente nei principî stessi sui quali sono fondate le considerazioni dalle quali il Duprè fu condotto alla sua formola. Difatti egli nello stabilire quella relazione suppone che nel cambiamento di stato di un corpo il lavòro interno dipenda soltanto dal volume e che quindi si possa ammettere che le variazioni di forza elastica siano proporzionali alle variazioni di temperatura, e che la derivata parziale del lavoro meccanico interno per rapporto al volume sia numericamente uguale a quella forza che egli chiama *attrazione al contatto.*

Ora nel cambiamento di stato di un corpo, specialmente se la sua molecola è di costituzione alquanto complicata, può compiersi in ciascuna delle molecole un lavoro considerevole, per cui essa possa cambiare di struttura secondo lo stato d' aggregazione, lavoro che non sarebbe trascurabile, come vorrebbe il Duprè, in confronto di quello relativo al cambiamento di stato fisico propriamente detto. Questo sarebbe anche comprovato da ciò che se si cerca, come fece l'Amagat, di paragonare per mezzo della relazione:

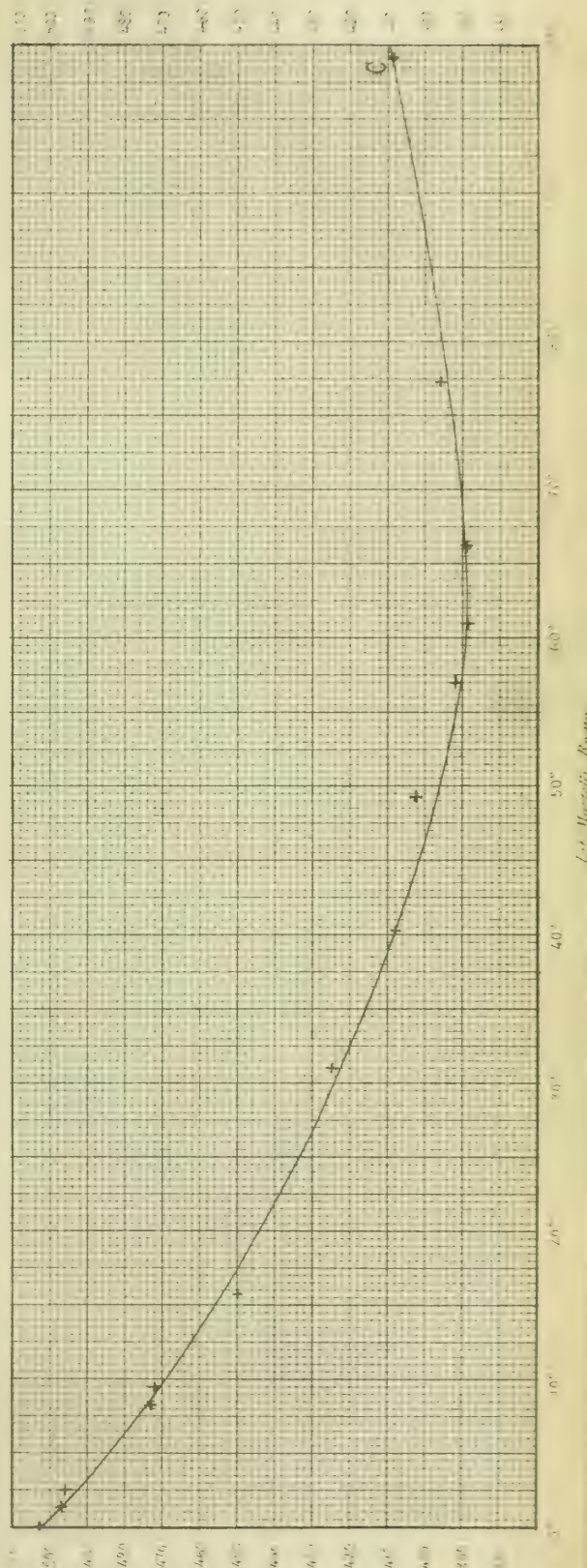
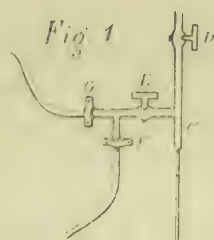
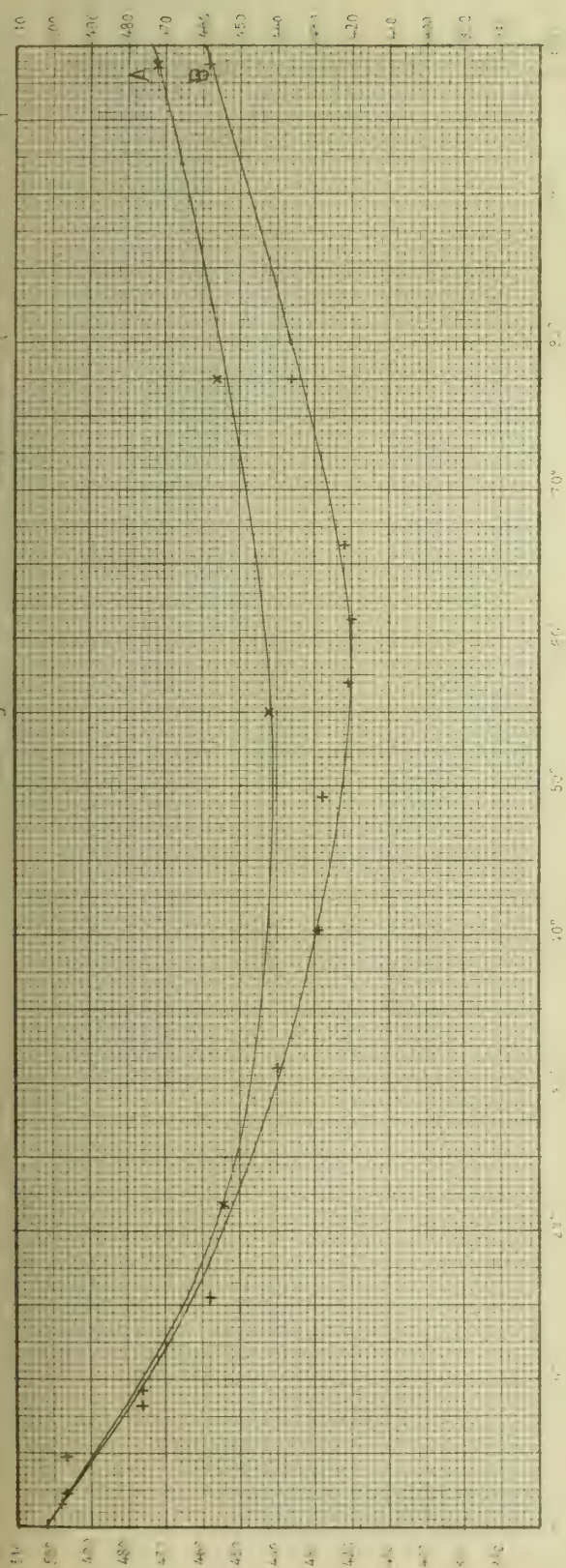
$$\frac{T\alpha}{a\beta\Delta^2} = \frac{T'\alpha'}{a'\beta'\Delta'^2}$$

i coefficienti di corpi differenti, servendosi dei valori di a calcolati dal Duprè (per mezzo dei calori di vaporizzazione, o sostituendo a questi nella formola a cui si arriva, la loro espressione in funzione delle tensioni di vapore per mezzo della formola di Clapeyron) si ottiene per alcuni corpi un valore del rapporto dei due coefficienti di compressibilità $\frac{\beta'}{\beta}$ abbastanza prossimo a quello misurato direttamente, per altri invece si arriva a risultati inammissibili. Ora l'Amagat attribuisce, e forse

con ragione, questo disaccordo a ciò che il calcolo di a e a' si fonda su principî non rigorosi.

Quello che si può dedurre in generale dai risultati conosciuti relativi alla compressibilità dei liquidi, si è che essa sta in relazione colla dilatabilità degli stessi corpi; che in generale i liquidi che hanno maggior densità, sono meno compressibili; e che non esiste relazione semplice tra la compressibilità dei liquidi e la loro volatilità.

Se si confrontano i coefficienti di compressibilità dei diversi termini di una data serie di composti, ad ugual temperatura, si osserva che per gli idrocarburi studiati, il valore di quel coefficiente diminuisce col crescere del peso molecolare del composto; per gli alcoli seguono la stessa regola il metilico, l'etilico, il propilico e l'amilico, non l'isobutilico.

A
B
C
Fig. 1
Fig. 2
10°
20°
40°
50°
60°
70°
80°
470
480
420
440
30°
Lit. Martelli, Roma

Sopra le involuzioni nel piano.
Memoria di Geometria pura, dell'ing. F. CHIZZONI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 giugno 1883.

Le involuzioni nel piano.

Chiamerò col nome di *involuzione piana di grado* N una serie doppiamente infinita di gruppi di N punti situati in un piano e tali che ciascun gruppo risulti univocamente determinato da un suo punto qualunque.

Un gruppo potrà in allora riguardarsi come elemento nel piano e due gruppi coincideranno insieme se avranno un punto comune. I punti che compongono un medesimo gruppo si diranno *coniugati.*

La ricerca di tutti i modi possibili coi quali i punti di un piano possono venire raggruppati in involuzione, costituisce un problema dei più importanti che fin qui non venne considerato in tutta la sua generalità. Le involuzioni piane più studiate sono quelle del secondo grado, che il Bertini ([1]) ha classificato in quattro tipi dai quali tutte le altre involuzioni dello stesso grado si possono dedurre coll' applicazione di trasformazioni razionali.

Il Caporali ([2]) ha pure contribuito alla teoria delle involuzioni di secondo grado proponendo di classificarle a seconda del numero di gruppi situati in una retta arbitraria.

Le involuzioni di secondo grado si presentano anche in un problema trattato da Clebsch ([3]) ed in un lavoro del De-Paolis ([4]).

A proposito delle involuzioni di grado superiore al secondo ben poco è stato fatto. Come si vede, il campo di ricerca è vastissimo. Citerò i lavori di Battaglini ([5]) e di Luroth ([6]), sulle *omografie cicliche*, ed un più recente lavoro del Kantor, che risponde ad una quistione posta dall'Accademia di Napoli, nella quale si tratta di *trasformazioni razionali cicliche* ([7]). Farò ancora menzione di una particolare

([1]) Annali di Mat. vol. VII pag. 11 e 244. Rendiconti dell'Ist. lomb. gennaio 1883.

([2]) *Sulle trasformazioni univoche piane involutorie.* Rendiconti della r. Acc. di Napoli, fasc. 9, settembre 1879.

([3]) *Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen.....* Mat. Ann. tom. 3.

([4]) *Le trasformazioni piane doppie.* Atti della r. Acc. dei Lincei, vol. I, ser. 3.ª

([5]) Vol. I, II e III degli Atti dell'Acc. di Napoli.

([6]) Mat. Annalen, vol. XIII.

([7]) La quistione venne (gennaio 1882) così formulata; *Considerando la trasformazione birazionale, in due piani fra loro coincidenti, trovare le condizioni affinchè applicando più volte di seguito la stessa trasformazione si ritorni alla figura da cui si parte.*

involuzione del terzo grado, studiata dal Caporali ([1]), i gruppi della quale si possono anche costruire come punti comuni ad un piano e alle cubiche gobbe passanti per cinque punti dati fuori del piano stesso.

Non è a mia notizia che qualche ricerca d'indole generale sia stata intrapresa nemmeno per le involuzioni del terzo grado.

Infinite involuzioni di grado qualsivoglia si costruiscono facilmente ponendo per condizione che ogni gruppo debba dipendere univocamente dalle coppie di valori assoluti di due parametri arbitrarî. Ciò equivale a supporre che un'involuzione [I], esistente in un piano Π, sia *razionale* vale a dire rappresentabile su di un altro piano Π' in modo che ad ogni gruppo della [I] corrisponda un sol punto di Π' e viceversa.

In questo caso, ad un luogo arbitrario φ', dato in Π', corrisponde, nel piano Π, un luogo φ contenente infiniti gruppi della [I]. Alle curve φ' appartenenti ad un sistema lineare $(\varphi')_m$, ∞^m, corrisponderanno, in Π, le curve φ di un sistema $(\varphi)_m$, pure ∞^m. Ora, presi, in Π, m punti qualunque, per i loro corrispondenti del piano Π' passa una curva di $(\varphi')_m$, alla quale corrisponde una sola curva di $(\varphi)_m$ passante per gli m punti considerati. Perciò:

Ad ogni sistema lineare di curve, dato nel piano Π', *corrisponde un sistema lineare di curve del piano* Π.

Se $(\varphi')_m$ è una rete omaloidica, $(\varphi)_m$ è una rete dotata della proprietà che i punti base (variabili) di un fascio qualunque in essa contenuto, sono punti di un gruppo dell'involuzione [I]. A questo gruppo corrisponde, nel piano Π', il punto (non fisso) comune a tutte le curve φ' formanti un fascio.

Invece di una rete si possono considerare due fasci, nel piano Π', tali che ciascuna curva dell'uno non abbia che un punto (variabile) comune con una curva qualunque dell'altro. I due fasci corrispondenti, nel piano Π, determinano l'involuzione [I] ogni gruppo della quale nasce dalle intersezioni (variabili) di una curva dell'uno con una curva dell'altro fascio.

È del resto evidente che una rete, o una coppia di fasci, dati in un piano vi determinano sempre una involuzione razionale.

Dirò *rete generatrice*, o *coppia di fasci generatori*, di una involuzione razionale, quella rete di curve, o quella coppia di fasci di curve, che servono a costruirne i gruppi ad uno ad uno.

Dalle cose precedenti segue che:

Un' involuzione razionale ammette infinite reti generatrici e infinite coppie di fasci generatori.

Ritorniamo un istante ai sistemi di curve corrispondenti $(\varphi)_m$ e $(\varphi')_m$, dei piani Π e Π', per notare la proprietà eccezionale di cui gode $(\varphi)_m$ quando suppongasi $m > 2$. Essa consiste in ciò che le *curve di* $(\varphi)_m$, *passanti per un punto arbitrario, passano di nuovo per tutti gli altri punti coniugati di quello nell'involuzione* [I]. Il sistema $(\varphi)_m$ può dunque esso pure, in grazia di tale proprietà, fornire ad uno ad

([1]) *Teoremi sulle curve di terz'ordine e sui fasci di curve di terz'ordine.* Atti della r. Acc. dei Lincei, vol. I, serie 3.ª

uno i gruppi dell' involuzione. Ora si può domandare se tutti i sistemi $(\varphi)_m$ dotati dell' anzidetta proprietà determinano involuzioni razionali. Ciò fornisce argomento ad una ricerca ancòra da farsi e pertanto viene il dubbio che non tutte le involuzioni piane siano razionali ([1]).

Il medesimo dubbio, per altro, esiste anche circa le trasformazioni razionali cicliche più sopra ricordate. Queste trasformazioni, effettivamente, hanno per risultato di ordinare i punti di un piano in una serie doppiamente infinita di gruppi, i quali godono della proprietà caratteristica enunciata nella definizione di involuzione piana. Ma è provato soltanto, dopo i lavori citati del Bertini, che le trasformazioni piane univoche involutorie sono involuzioni razionali (del secondo grado).

È ancora probabile che, studiando a fondo la quistione, nuove difficoltà si presentino a stabilire una teoria generale dell' involuzione nel piano ([2]).

Nel presente lavoro si tratta particolarmente di involuzioni razionali. Solamente alcuni risultati del § 4, essendosi ottenuti indipendentemente dal modo di generazione dell' involuzione, sono di indole generale.

Al § 1 l' involuzione piana si considera costruita con due fasci generatori. Non è già che tale costruzione abbia un carattere più generale di quella che si ottiene per mezzo di una rete generatrice, ma essa mi ha presentato notevoli vantaggi nella trattazione di alcune quistioni ([3]). Da questa costruzione, del resto, si fa discendere immediatamente l' altra (§ 3); ed è utile tenerle di mira entrambe poichè mentre certe involuzioni si definiscono facilmente con la prima, non è tanto agevole, *a priori*, definirle con la seconda costruzione, e viceversa. Non bisogna dimenticare però che l' involuzione una volta determinata, ne sono anche determinate tutte le infinite coppie di fasci generatori e le infinite reti generatrici ([4]).

Ai §§ 2 e 3, le involuzioni ottenute con una coppia di fasci generatori, o con una rete generatrice, sono rappresentate rispettivamente sui punti di un iperboloide o di un piano.

Nel § 4 sono considerati certi luoghi contenenti infiniti sistemi di punti coniugati. Il § 5 tratta delle relazioni fra due o più involuzioni ed il § 6, infine, delle trasformazioni di una involuzione.

([1]) Poichè ogni sistema lineare ∞^3 contenuto in $(\varphi)_m$ ha esso pure la proprietà di determinare ad uno ad uno i gruppi dell'involuzione [I], così nella ricerca sopra accennata si può sempre supporre $m=3$. I gruppi della [I] si fanno allora dipendere dai valori assoluti di tre parametri λ, μ, ν fra i quali deve aver luogo una relazione necessaria. Se questa relazione è tale che λ, μ, ν si possano esprimere mediante funzioni razionali di due soli parametri indipendenti, l'involuzione [I] è razionale.

([2]) Difficoltà della stessa natura sono da rimovere anche rispetto alla teoria delle involuzioni nella linea retta. Non è infatti dimostrato che tutte queste involuzioni siano razionali.

([3]) Veggasi ad es. al § 6.

([4]) È opportuno notare che due reti proiettive di curve, date in un piano, vi determinano una involuzione razionale i cui gruppi nascono dalle intersezioni (variabili) delle curve corrispondenti. — Le coppie di fasci corrispondenti, nelle due reti, danno origine alle infinite curve di una rete generatrice dell'involuzione. — In qualche caso può essere utile di considerare una involuzione costruita mediante due reti proiettive di curve. Così, ad es., quando ogni gruppo dell' involuzione debba comporsi di N punti situati in una stessa retta.

§ 1. *Involuzione generata da due fasci di curve.*

1. In un piano Π siano dati due fasci (φ) e (ψ), l'uno di curve φ dell'ordine n, l'altro di curve ψ dell'ordine n' ed indichiamo con R_k uno qualunque dei loro punti base (¹), con r_k, r'_k le sue moltiplicità per le φ e le ψ rispettivamente.

I punti R_k non possono tutti appartenere alle basi dei due fasci, se questi sono distinti. Chiamerò *punto fondamentale della prima specie* un punto base comune e *punto fondamentale della seconda specie* un punto base soltanto dell'uno o dell'altro dei fasci anzidetti. Pertanto hanno luogo le relazioni:

$$n^2 - \Sigma r_k^2 = 0 \qquad n'^2 - \Sigma r'^2_k = 0$$

I due fasci (φ) e (ψ) generano un'involuzione [I], il grado N della quale è dato dalla:

$$N = nn' - \Sigma r_k r'_k$$

2. Sia A_1 un punto qualunque del piano Π ed A_2, A_3, ... gli altri N—1 punti che con quello completano un gruppo dell'involuzione [I]. Tracciata per A_1 una retta arbitraria t_1, il punto B_1 di essa, che trovasi infinitamente vicino ad A_1, ammette N—1 punti coniugati B_2, B_3, ... i quali sono rispettivamente infinitamente vicini ad A_2, A_3, ... e determinano le rette $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, ... che dinoto con t_2, t_3, ...

Se la t_1 ruota intorno ad A_1, descrivendo un fascio, le t_2, t_3, ... ruotano intorno ad A_2, A_3, ... descrivendo tanti fasci proiettivi a quello e si dirà che i raggi corrispondenti di questi fasci segnano *direzioni coniugate* intorno ai punti del gruppo considerato.

Data una figura ad arbitrio, nel piano Π, se questa s'imagina percorsa da un punto A_1, gli altri punti A_2, A_3, ..., coniugati di A_1, descrivono una seconda figura, in generale differente dalla data, che diro *coniugata* di quest'ultima, perchè se uno dei punti A_2, A_3, ... descrive la seconda figura, gli altri percorrono la medesima, mentre il punto A_1 percorre la data. In un istante qualsivoglia le direzioni del movimento dei punti A_1, A_2, A_3, ... sono coniugate.

Chiamerò *sottogruppo* un certo numero di punti appartenenti ad un medesimo gruppo d'involuzione [I]. In allora tutti i punti rimanenti del gruppo formano un altro sottogruppo che dirò *complementare* del primo. Se nel piano Π vi è una figura contenente infiniti sottogruppi, la sua figura coniugata è il luogo di tutti i sottogruppi complementari di quelli.

3. Nel piano Π si possono costruire quanti si vogliano luoghi ciascuno contenente infiniti gruppi di punti coniugati. Fra essi sono anzitutto notevoli le curve sì dell'uno che dell'altro dei fasci generatori (φ) e (ψ). Ogni altro luogo dotato dell'anzidetta proprietà si può ottenere mettendo fra loro in corrispondenza le curve dei fasci

(¹) Nelle seguenti ricerche, questi punti base si suppongono collocati a distanza finita tra di loro.

medesimi, mediante una legge ad arbitrio, e considerando i gruppi che nascono dalle intersezioni delle curve corrispondenti ([1]). Si trova poi facilmente che:

Se un luogo (algebrico) *d' infiniti gruppi dell' involuzione, ha in comune* λ *gruppi con ogni curva del fascio* φ e λ' *gruppi con ogni curva del fascio* (ψ), *esso è dell' ordine:*

$$\lambda n' + \lambda' n$$

e passa con:

$$\lambda r'_k + \lambda' r_k$$

rami per il punto fondamentale R_k.

Nel caso particolare in cui i fasci (φ) e (ψ) siano riferiti tra di loro proiettivamente, la curva ξ, luogo delle intersezioni di una φ con la ψ corrispondente, è dell'ordine $n + n'$ ed ha un punto multiplo secondo il numero $r_k + r'_k$ nel punto fondamentale R_k. Tutte le curve ξ analoghe alla precedente formano un sistema lineare $(\xi)_3$, ∞^3 ([2]). La curva del sistema, passante per tre punti arbitrarî è generata dai fasci proiettivi (φ) e (ψ) che si ottengono assumendo come corrispondenti le curve φ e ψ determinate da ciascuno dei punti anzidetti. Il sistema $(\xi)_3$, che ha una certa importanza in queste ricerche, è dotato della proprietà che le curve di esso passanti per un punto, e quindi formanti una rete, passano necessariamente anche per gli $N-1$ punti coniugati di quello nell' involuzione [I]. Le direzioni che una qualunque di tali curve segna intorno a questi punti coniugati sono coniugate (n. 2).

Due curve ξ, fuori dai punti fondamentali, si tagliano in:

$$(n+n')^2 - \Sigma (r_k + r'_k)^2 = 2N$$

punti (n. 1) distinti in due gruppi dell' involuzione.

4. Se nel piano Π esiste un luogo non avente punti variabili comuni con le curve dei fasci generatori, ciò vuol dire che la φ e la ψ, passanti per un punto qualunque di tale luogo, si spezzano nel luogo medesimo e in altre due curve che con esso completano una φ ed una ψ. Segue da ciò che *ad ogni punto del luogo in discorso è coniugato tutto il luogo stesso.*

Ammetterò che vi sia un sistema di luoghi dotati della suddetta proprietà; indicherò con ζ_i uno qualunque di essi, con z_i il suo ordine e con ρ_{ik} la sua moltiplicità nel punto fondamentale R_k. La proprietà che definisce una curva ζ_i si traduce mediante le equazioni:

$$n z_i - \Sigma_k r_k \rho_{ik} = 0 \qquad n' z_i - \Sigma_k r'_k \rho_{ik} = 0$$

Le curve del sistema $(\xi)_3$ (n. 3), non tagliano esse pure le ζ_i fuori dai punti fondamentali.

5. Un punto, supposto comune a due curve ζ_i, appartiene a due φ non che a due ψ epperò deve necessariamente cadere in un punto fondamentale della prima specie (n. 1). Dunque:

([1]) Siano $\varphi_1 - h\varphi_2 = 0$, $\psi_1 - h'\psi_2 = 0$ le equazioni dei fasci generatori ed $L(h,h') = 0$ una relazione qualunque fra i parametri h, h'. In allora l'equazione $L\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \frac{\psi_1}{\psi_2}\right) = 0$ rappresenta una curva contenente infiniti gruppi dell'involuzione [I].

([2]) Esso è rappresentato dall'equazione:

$$a\varphi_1\psi_1 + b\varphi_1\psi_2 + c\varphi_2\psi_1 + d\varphi_2\psi_2 = 0.$$

Due curve ζ_i non si tagliano fuori dai punti fondamentali R_k.

Di qui seguono le relazioni:

$$z_1 z_2 - \Sigma_k \rho_{1k} \rho_{2k} = 0\,, \qquad z_1 z_3 - \Sigma_k \rho_{1k} \rho_{3k} = 0\,, \ldots\ldots\,,$$

in numero di $\frac{1}{2} i\,(i-1)$, essendo i il numero delle curve ζ_i.

Una curva ζ_i può essere dotata di punti multipli, fuori dai fondamentali, ed anche essere spezzata in parti. L'insieme di queste parti può appartenere ad una sola φ o ad una sola ψ; oppure, mentre l'insieme appartiene per es. ad una sola φ, le parti anzidette possono appartenere a più curve ψ. In quest'ultimo caso però, le parti della ζ_i non hanno punti comuni fuori dai fondamentali.

Per ogni punto fondamentale della seconda specie (n. 1) passa una sola φ od una sola ψ. Ora, se i fasci generatori non hanno posizioni e relazioni particolari, nessuna delle curve ζ_i appartiene alla φ, od alla ψ, di cui si parla. Perciò, in generale, le curve ζ_i non passano per punti fondamentali della seconda specie (¹).

6. Indichiamo con φ_i e ψ_i le curve che con una determinata ζ_i completano rispettivamente una φ ed una ψ. I loro punti d'intersezione, fuori dai fondamentali, sono in numero di

$$(n - z_i)(n' - z_i) - \Sigma_k (r_k - \rho_{ik})(r'_k - \rho_{ik})\,,$$

ossia, fatto:

$$\Sigma_k \rho_{ik}^2 - z_i^2 = \theta_i\,,$$

in numero di $N - \theta_i$. Li chiamerò punti Z_{ij}, od anche *punti fondamentali della terza specie.* Essi appartengono a un gruppo di punti coniugati eccezionale, perchè tutti i punti della curva ζ_i sono punti del gruppo medesimo. Più propriamente: un punto infinitamente vicino a Z_{i1} ha per coniugati $N-1$ punti, dei quali ve n'ha uno infinitamente vicino a ciascuno dei rimanenti $N - \theta_i - 1$ punti Z_{i2}, Z_{i3}, ... e gli altri θ_i giacciono nella curva ζ_i, la quale contiene infiniti sottogruppi di θ_i punti coniugati.

Riferendo proiettivamente i fasci generatori (φ), (ψ) per modo che siano corrispondenti le curve φ_i, ψ_i, si ottengono infinite curve del sistema $(\xi)_3$, formanti una rete, ciascuna delle quali sega la ζ_i in θ_i punti di un sottogruppo, il cui sottogruppo complementare consta delle direzioni segnate, dalla ξ che si considera, intorno ai punti Z_{ij}.

Da ciò che precede risulta che ogni curva ζ_i determina un sistema di punti fondamentali della terza specie (coniugati fra di loro) epperò si dirà *curva fondamentale della terza specie.*

7. Sia Γ una curva qualunque dell'ordine ν, avente punti multipli secondo i numeri s_k ed s_{ij} nei punti fondamentali R_k e Z_{ij}. Essa è tagliata, fuori dai punti fondamentali, in $n\nu - \Sigma r_k s_k$ punti da una curva del fascio (φ) e in $n'\nu - \Sigma r'_k s_k$ punti da una curva del fascio (ψ). Perciò la curva Γ e la sua coniugata Γ_1 (n. 2) formano insieme un luogo che ha $n\nu - \Sigma r_k s_k$ gruppi comuni con ogni φ ed $n'\nu - \Sigma r'_k s_k$ gruppi comuni con ogni ψ. Questo luogo è dell'ordine (n. 3):

$$n'(n\nu - \Sigma r_k s_k) + n(n'\nu - \Sigma r'_k s_k)$$

(¹) Veggasi al n. 21 e segg. dove è considerato a parte il caso in cui vi sieno curve ζ_i che contengono punti fondamentali della seconda specie.

e passa con:

$$r'_k(n\nu-\Sigma r_k s_k)+r_k(n'\nu-\Sigma r'_k s_k)$$

rami per il punto fondamentale R_k. Si osservi però che dalla curva Γ, si stacca tante volte ogni curva ζ_i quanti sono i punti (non fondamentali) nei quali è segata dalla curva Γ (n. 4) e quanti sono i rami della stessa Γ passanti per tutti i punti fondamentali coniugati di ζ_i; cioe in tutto $\nu z_i - \Sigma_k s_k \rho_{ik} + \Sigma_j s_{ij}$ volte.

I rami della curva Γ, passanti per un determinato punto Z_{ij}, che dinoto con Z_{il}, hanno origine dalle $\nu z_i - \Sigma_k s_k \rho_{ik}$ intersezioni (fuori dai punti fondamentali) delle curve Γ e ζ_i, non che dai $\Sigma_j s_{ij} - s_{il}$ rami di Γ passanti per tutti i punti fondamentali coniugati di ζ_i escluso Z_{il}.

Da tuttociò si conclude che:

Una curva, data ad arbitrio, dell' ordine ν, con punti multipli secondo i numeri r_k ed s_{ij} rispettivamente nei punti fondamentali R_k e Z_{ij}, ha per coniugata un' altra curva dell' ordine:

$$\nu(2nn'-\Sigma z_i^2-1)-\Sigma_k s_k(n'r_k+nr'_k-\Sigma_i z_i\rho_{ik})-\Sigma_i\Sigma_j z_i s_{ij},$$

passante con:

$$\nu(n'r_h+nr'_h-\Sigma_i z_i\rho_{ih})-\Sigma_k s_k(r'_k r_h+r_k r'_h-\Sigma_i\rho_{ik}\rho_{ih})-\Sigma_i\Sigma_j\rho_{ih}s_{ij}-s_h$$

rami per il punto fondamentale R_h e con:

$$\nu z_i-\Sigma_k s_k\rho_{ik}+\Sigma_j s_{ij}-s_{il}$$

rami per il punto fondamentale Z_{il}.

8. Da ciò discende che:

La curva t', coniugata d' una retta arbitraria t, è dell' ordine:

$$2nn'-\Sigma z_i^2-1; \qquad (1)$$

passa con:

$$nr'_h+n'r_h-\Sigma_i z_i\rho_{ih} \qquad (2)$$

rami per il punto fondamentale R_h e con:

$$z_i \qquad (3)$$

rami per il punto fondamentale Z_{ij}.

Se la retta t passa per il punto R_h, invece dei numeri (1), (2), (3), si hanno rispettivamente i seguenti:

$$2nn'-\Sigma z_i^2-1-(n'r_h+nr'_h-\Sigma_i z_i\rho_{ih}) \qquad (1)'$$

$$nr'_h+n'r_h-\Sigma_i z_i\rho_{ih}-(2r_h r'_h-\Sigma_i\rho_{ih}^2+1) \qquad (2)'$$

$$z_i-\rho_{ih} \qquad (3)'$$

La moltiplicità poi della curva coniugata di t in un punto fondamentale R_k, è eguale a:

$$nr'_k+n'r_k-\Sigma_i z_i\rho_{ik}-(r_k r'_h+r_h r'_k-\Sigma_i\rho_{ik}\rho_{ih}) \qquad (4)$$

9. Poichè in una retta arbitraria t vi sono $nr'_h+n'r_h-\Sigma_i z_i\rho_{ih}$ punti ciascuno dei quali ha uno de' suoi coniugati infinitamente vicino al punto fondamentale R_h, così ne segue che:

Al punto fondamentale R_h *è coniugata una curva (fondamentale)* α_h *dell' ordine:*

$$n r'_h + n' r_h - \Sigma_i z_i \rho_{ih} .$$

Se la retta t contiene il punto R_h, la curva ad essa coniugata si spezza in due, una delle quali è la curva α_h, come si vede anche dal confronto delle espressioni (1), (1)′ del n.° precedente. Si ricava ancora confrontando le (2), (2)′ e le (3), (3)′ che:

La curva coniugata del punto fondamentale R_h *passa con*

$$2 r_h r'_h - \Sigma_i \rho_{ih} + 1$$

rami per il punto stesso e con ρ_{ih} *rami per il punto fondamentale* Z_{ij}.

Dalle (2) e (4) si vede infine che:

La curva coniugata del punto fondamentale R_h *passa con*

$$r_k r'_h + r_h r'_k - \Sigma_i \rho_{ik} \rho_{ih}$$

rami per il punto fondamentale R_k (differente da R_h).

10. Sia R_k un punto fondamentale della prima specie (n. 1). La sua curva coniugata α_k si dirà *curva fondamentale della prima specie* ed essa è da considerarsi come generata dalle intersezioni variabili d'una φ e d'una ψ che passano per un medesimo punto infinitamente vicino a R_k. Perciò se in R_k due rami d' una φ sono toccati da due rami d' una ψ, i punti di contatto appartengono ad α_k. In altri termini, *questa curva tocca le coppie di direzioni coniugate* (in generale distinte) *esistenti intorno ad* R_k. Ora, i gruppi di tangenti ai rami delle curve φ in tal punto formano un' involuzione di grado r_k; ed un' altra involuzione di grado r'_k è formata dai gruppi di tangenti ai rami delle ψ nello stesso punto. Le coppie di raggi comuni a queste involuzioni definiscono le coppie di direzioni coniugate, nell' involuzione [I], delle quali si tratta. Escludendo dal numero delle coppie medesime quelle che si ottengono prendendo la direzione di un ramo d' ogni curva ζ_i, uscente da R_k, insieme a ciascuno degli altri rami della stessa ζ_i si trova che:

Intorno ad ogni punto fondamentale R_h, *della prima specie, esistono*

$$(r_k - 1)(r'_k - 1) - \frac{1}{2} \Sigma_i \rho_{ik} (\rho_{ik} - 1)$$

coppie di direzioni coniugate.

La curva α_k tocca in R_k ogni ramo di una φ che abbia ivi un contatto tripunto con un ramo d' una ψ. Le coppie di curve φ e ψ dotate di tale proprietà sono perciò in numero di (n. 9):

$$2 (r_k + r'_k) - \Sigma_i \rho_{ik} - 1 .$$

Si può altrimenti dire che:

Intorno ad ogni punto fondamentale R_k *della prima specie esistono*

$$2 (r_k + r'_k) - \Sigma_i \rho_{ik} - 1$$

coppie di punti coniugati infinitamente vicini tra di loro.

11. Consideriamo ora un altro punto fondamentale R_h della prima specie insieme alla sua curva coniugata α_h. Da quanto è detto al n. 9 rilevasi che:

La moltiplicità della curva α_k *nel punto* R_h *è eguale alla moltiplicità della curva* α_h *nel punto* R_k.

Queste curve α_k e α_h, entrambe luoghi contenenti infiniti sottogruppi di $N-1$ punti, fuori dai punti fondamentali, hanno in comune un certo numero di sottogruppi

composti di N — 2 punti. Ciascuno di tali sottogruppi ha per sottogruppo complementare una coppia di punti l'uno infinitamente vicino ad R_k e l'altro ad R_h, sulle curve fondamentali α_h e α_k rispettivamente. Perciò il teorema sopra enunciato si completa dicendo che:

Vi sono:

$$r_k r'_h + r_h r'_k - \Sigma_i \rho_{ik} \rho_{ih}$$

direzioni, intorno ad R_k, *le quali ammettono altrettante direzioni coniugate intorno ad* R_h.

12. Supponiamo che un punto fondamentale R_k sia della seconda specie e appartenga, per es., alla base del fascio (φ). Per tal punto passa una sola curva ψ, che dinoto con ψ_k, in generale con un solo ramo e non contiene altri punti base del fascio (φ) (1). La ψ_k interseca ogni curva φ in un gruppo di N punti coniugati dei quali r_k sono costantemente riuniti in R_k. Da cui segue che:

Intorno ad ogni punto fondamentale R_k *della seconda specie esistono infiniti sottogruppi di direzioni coniugate nella involuzione* [I] *formanti i gruppi di una involuzione del grado* r_k.

Se un punto si muove intorno ad R_k, vi sono $N - r_k$ de' suoi coniugati che percorrono r_k volte la curva ψ_k la quale, contata r_k volte, è la curva coniugata di R_k. Essa si distinguerà col nome di *curva fondamentale della seconda specie.*

13. Sopra una retta arbitraria t consideriamo le due involuzioni indipendenti generate dai fasci (φ) e (ψ). Queste involuzioni sono rispettivamente dei gradi n, n' epperò ammettono $(n-1)(n'-1)$ coppie di punti comuni fra le quali sono da contarsi quelle che si ottengono prendendo a due a due i punti comuni a t e ad una curva ζ_i. Da ciò si vede che:

Ogni retta del piano contiene:

$$(n-1)(n'-1) - \frac{1}{2} \Sigma z_i (z_i - 1)$$

coppie di punti coniugati nell'involuzione [I].

I punti del piano, ciascuno dei quali trovasi infinitamente vicino ad uno dei proprî coniugati, formano un luogo che chiamerò *curva unita dell'involuzione* (2). Ora è manifesto che la retta t e la sua curva coniugata si tagliano nelle coppie di punti coniugati situate in t e nei punti comuni a questa retta e alla curva unita. Perciò (n. 8):

La curva unita dell'involuzione è dell'ordine:

$$2(n + n') - \Sigma z_i - 3 .$$

E per quanto è detto al n. 9:

La curva unita passa con:

$$2(r_k + r'_k) - \Sigma_i \rho_{ik} - 1$$

rami per ogni punto fondamentale R_k *della prima specie.*

Se invece R_k è un punto fondamentale della seconda specie, e appartiene per es.

(1) Veggasi al n. 21.

(2) È il luogo dei contatti fra le curve dei fasci generatori (φ) e (ψ).

alla base del fascio (φ), la sua moltiplicità per la curva unita è $2r_k - 1$. Le tangenti di tale curva, in R_k, sono i $2(r_k - 1)$ raggi doppî dell'involuzione di direzioni coniugate esistenti intorno al punto stesso e la retta che ivi tocca la curva fondamentale ψ_k della seconda specie [1] (n. 12).

14. La curva unita si può generare con una costruzione che presenta qualche interesse per lo studio della curva medesima.

Consideriamo le prime polari di un punto arbitrario P rispetto alle curve del fascio (φ). Com'è noto, queste polari formano un secondo fascio proiettivo a (φ) e le curve corrispondenti, dei due fasci, s'intersecano nei punti d'una curva Φ, dell'ordine $2n - 1$, luogo dei punti nei quali le curve φ sono toccate dalle rette uscenti da P. La Φ passa per questo punto con un solo ramo e passa con $2r_k - 1$ rami per ogni punto fondamentale R_k, dell'involuzione [I] [2].

Variando il punto P, nel piano Π, si ottiene una doppia infinità di curve Φ le quali formano una rete. Infatti, dati due punti qualunque A e B, le tangenti in A e B alle due φ, passanti per i punti medesimi, si tagliano in un punto P che serve a costruire l'unica Φ determinata da A e B.

In simil modo, ogni punto P fornisce una curva Ψ, luogo dei contatti fra le curve del fascio (ψ) e le rette uscenti da P. Tutte le Ψ appartengono ad una rete proiettiva alla rete delle Φ e sono corrispondenti una Φ ed una Ψ che hanno origine da un medesimo punto P.

Due curve corrispondenti, Φ e Ψ, si tagliano in P, nei punti fondamentali di prima specie, dell'involuzione [I], e in un certo numero di punti variabili. Ciascuno di questi ultimi, congiunto con P, dà una retta in esso tangente a una φ e ad una ψ, epperò è un punto della curva unita dell'involuzione.

In virtù di tale proprietà, delle reti proiettive considerate, assunto un luogo arbitrario, le intersezioni delle curve Φ e Ψ relative ad ogni punto di esso, generano la curva unita e una volta il luogo medesimo. Segue da ciò che *la curva unita si può costruire per mezzo dei due fasci proiettivi di curve Φ e Ψ aventi origine da una retta qualunque del piano.*

15. La precedente conclusione è utile per ben definire le singolarità che può presentare in qualche caso la curva unita fuori dai punti fondamentali dell'involuzione.

Siano φ_a e ψ_a le curve dei fasci generatori passanti per un punto A (non fondamentale) che suppongo h-plo per la φ_a e h'-plo per la ψ_a. Si ritenga inoltre la curva unita generata dai fasci proiettivi (Φ) e (Ψ), di curve Φ e Ψ, che hanno origine da una medesima retta t. La prima polare di un punto qualunque P di t, rispetto a φ_a, è dotata di un punto $(h-1)$-plo in A, epperò la Φ relativa a P passa per A con $h - 1$ rami ivi tangenti a quelli della polare ora detta. Analogamente, la Ψ relativa P passa per A con $h' - 1$ rami ivi tangenti a quelli della prima polare di P rispetto a ψ_a. Da ciò segue che:

Se un punto (non fondamentale) *è rispettivamente* h-plo *e* h'-plo *per una φ ed una ψ, la curva unita passa per esso con $(h + h' - 2)$ rami.*

[1] La curva unita non contiene punti fondamentali della terza specie se ciascun sottogruppo di essi consta di punti tutti fra loro distinti.

[2] È opportuno di notare che un ramo della Φ tocca in R_k la retta PR_k.

Le direzioni di questi rami sono determinate dai raggi comuni alle due involuzioni proiettive formate dai gruppi di tangenti alle curve dei fasci (Φ) e (Ψ) nel punto di cui si tratta.

Supponiamo ancora che il punto A sia semplice per le curve φ_a, ψ_a, ma esse abbiano ivi un contatto l-punto fra di loro, cioè si taglino in altri $l-1$ punti A_1, A_2,...... successivi ad A. In allora le rette AA_1, A_1A_2,...... segano la t negli $l-1$ punti successivi P_1, P_2,......, le coppie di curve Φ e Ψ relative ai quali passano per A_1, A_2,...... rispettivamente.

Dunque:

Se in un punto dato (non fondamentale) *una* φ *ed una* ψ *hanno fra loro un contatto* l*-punto, la curva unita ha un contatto* $(l-1)$*-punto con ciascuna di quelle curve.*

16. Nella definizione della curva unita, data al n. 13, si suppone che le curve dei fasci (φ) e (ψ) abbiano fra di loro un contatto semplice. È questo il caso più ordinario ed il solo di cui si tiene conto nelle presenti ricerche, limitandomi semplicemente ad osservare che vi possono essere involuzioni nelle quali la curva unita sia il luogo di terne, o di quaderne, ecc. di punti coniugati fra di loro infinitamente vicini. Per altro il modo di generazione della curva anzidetta, esposto al n. 14, vale per tutti i casi.

Ciò posto, se ogni punto della curva unita si congiunge col proprio coniugato successivo, si ottengono infinite rette formanti un inviluppo. Per determinarne la classe consideriamo le curve Φ e Ψ aventi origine da un punto arbitrario P (n. 14). Esse, oltrechè in P e nei punti fondamentali della prima specie, si tagliano in un certo numero di punti; fra questi alcuni cadono nei punti di contatto delle curve ζ_i con le loro tangenti passanti per P ed i rimanenti, congiunti con P, danno le tangenti dell'inviluppo uscenti da questo punto. Dunque, se q_i dinota la classe di una ζ_i si trova che:

L'inviluppo formato dalle rette ciascuna delle quali contiene una coppia di punti coniugati successivi è della classe:

$$(2n-1)(2n'-1)-\Sigma\{(2r_k-1)(2r'_k-1)+1\}-\Sigma q_i-1\,. \quad (^1)$$

17. Sia M un punto qualunque della curva unita e t la tangente comune alle curve dei fasci generatori che passano per tal punto. Il gruppo di punti coniugati, cui M appartiene, è formato da un punto M_1, infinitamente vicino ad M, sulla t, e da altri $N-2$ punti M_2, M_3,......, situati nella *curva coniugata della curva unita* [2].

Le curve del sistema $(\xi)_3$, obbligate a contenere un punto infinitamente vicino ad M, non situato in t, formano un fascio $(\xi)_1$, hanno tutte un punto doppio in M ed i rami di ciascuna di esse, intorno al punto medesimo, segnano due direzioni

[1] Questa classe diminuisce di $(h-1)(h'-1)$ unità per ogni punto, non fondamentale, h-plo per una φ e h'-plo per una ψ (n. 15).

[2] L'ordine di essa, e le sue moltiplicità nei punti fondamentali, si ottengono mediante le espressioni trovate al n. 7, osservando però che in questo caso dal luogo dei punti coniugati di quelli situati nella curva unita si stacca una volta questa curva medesima.

coniugate. Tutte le curve di $(\xi)_1$ sono tangenti in M_2, M_3, ... alla coniugata della curva unita.

Fra le curve del fascio $(\xi)_1$, una ha un contatto tripunto con la coniugata della curva unita in M_2, M_3, ... ed è cuspidata in M, essendo t la tangente cuspidale. Un'altra di quelle curve è formata dall'insieme della φ e della ψ passanti per M.

Da tutto ciò risulta che:

Intorno ad un punto qualunque della curva unita esistono infinite coppie di direzioni coniugate, formanti un'involuzione di secondo grado i raggi doppi della quale sono la tangente della curva unita e la retta t che congiunge il punto M *col suo coniugato successivo. A ciascuna di quelle coppie sono coniugate le direzioni fisse segnate dalle tangenti, alla coniugata della curva unita, nei punti coniugati di* M. *Viceversa, a direzioni coniugate, date in questi ultimi punti, corrisponde in* M *la direzione fissa della retta t.*

18. Conseguenze dell'enunciato teorema sono le seguenti.

Se un luogo (semplice o decomposto in parti), non contenenti infiniti gruppi dell'involuzione [I], incontra la curva unita in un punto M, in generale questo punto è semplice oppure è doppio per quel luogo. Nel primo caso, esso tocca in M la retta t che unisce tale punto col suo coniugato successivo e attraversa la coniugata della curva unita (nei punti coniugati di M) sotto direzioni che non dipendono dal primo elemento del luogo in M. Nel secondo caso, le due tangenti del luogo in M, dividono armonicamente la retta t e la tangente della curva unita. La curva coniugata di questa, poi, tocca il luogo medesimo nei punti coniugati di M.

Il luogo di cui si tratta precedentemente può comporsi di una curva arbitraria e della sua curva coniugata (n. 7). In allora si ha:

Una curva Γ, *data ad arbitrio, interseca la curva unita* (fuori dai punti fondamentali) *in punti che appartengono alla curva* Γ_1 *coniugata di* Γ. *A ciascuno di tali punti sono coniugati* $N-2$ *punti nei quali si toccano fra di loro la* Γ_1 *e la coniugata della curva unita.*

Le rimanenti intersezioni di Γ e Γ_1 sono divise in tante coppie di punti coniugati.

Indichiamo con ω e ω' l'ordine della curva unita e quello della sua coniugata; con u, u' le moltiplicità di queste curve in un medesimo punto fondamentale (qualunque ne sia la specie). Siano parimenti: ν e ν' gli ordini delle curve Γ e Γ'_1; s, s' le loro moltiplicità in uno stesso punto fondamentale. Da quanto si disse segue che:

Sopra la curva Γ *esistono*:

$$\frac{1}{2}\nu(\nu'-\omega)-\frac{1}{2}\Sigma s(s'-u)$$

coppie di punti coniugati e ciascuna di tali coppie fa parte di un gruppo che contiene $N-2$ *punti doppî per le curve* Γ_1.

Ogni punto, non fondamentale nè situato in Γ, comune a Γ_1 e alla curva unita, appartiene a un sottogruppo di $N-1$ punti, di Γ_1, nel quale vi sono due punti tra loro infinitamente vicini. Tale sottogruppo, insieme ad uno determinato dei punti comuni a Γ e alla coniugata della curva unita, forma un gruppo completo dell'involuzione. Dunque:

Sopra la curva Γ_1 *esistono:*

$$\omega(\nu'-\nu)-\Sigma u(s-s')\,,\quad \text{oppure}\quad \nu\omega'-\Sigma s u'$$

coppie di punti coniugati tra loro infinitamente vicini.

19. *La curva unita e la sua coniugata, fuori dai punti fondamentati, si tagliano in:*

$$\frac{1}{2}(\omega\omega'-\Sigma u u')$$

punti divisi in coppie di punti coniugati.

Di queste coppie ve n'ha di due punti distinti e di due punti successivi. Ciascuna delle prime ha origine da due curve, dei fasci generatori (φ) e (ψ), aventi fra loro un doppio contatto esternamente ai punti base e gli $N-4$ punti distinti, ad essa coniugati, sono doppî per la coniugata della curva unita. Ciascuna delle seconde ha origine da una φ e da una ψ le quali si osculano epperò determinano un sottogruppo di tre punti riuniti. Il sottogruppo complementare consta di $N-3$ punti che sono altrettante cuspidi per la coniugata della curva unita.

Per ulteriori determinazioni, circa le predette coppie di punti si vegga ai numeri 29 e 61, e intanto si noti che la curva unita è toccata (contatto bipunto), da una φ e da una ψ che si osculano, nel loro punto di osculazione (n. 15).

20. Tenendo presente quanto è detto ai numeri 17 e 18, si possono aggiungere i seguenti particolari riguardanti le curve fondamentali dell'involuzione:

I. *Nella curva* α_k, *coniugata del punto fondamentale* R_k *di prima specie, vi sono:*

$$(r_k-1)(r'_k-1)-\frac{1}{2}\Sigma_i\rho_{ik}(\rho_{ik}-1)$$

sottogruppi, ciascuno composto di $N-2$ *punti doppî per la curva medesima* (n. 10).

II. *Ogni ramo della curva unita tocca in* R_k *un ramo della curva* α_k (n. 9) *e alla direzione della tangente comune sono coniugati* $N-2$ *punti nei quali si toccano fra loro la curva* α_k *e la coniugata della curva unita.*

III. *La curva* ψ_k, *coniugata del punto fondamentale* R_k *della seconda specie* (n. 13), *e la curva unita si toccano in* R_k, *e alla direzione della tangente comune sono coniugati* $N-r_k-1$ *punti* (fuori dai fondamentali) *di contatto fra* ψ_k *e la coniugata della curva unita.*

IV. *Una curva fondamentale qualunque dell'involuzione* (fuori dai punti fondamentali) *incontra la curva unita in punti ciascuno dei quali è coniugato al proprio successivo in quella curva fondamentale.*

21. Più sopra (n. 5) venne supposto che curve fondamentali ζ_i, della terza specie, non contenessero punti fondamentali della seconda specie; ora sarà utile di prendere in esame il caso in cui non si verifica una tale ipotesi per appianare le difficoltà che si presentano nello studio di involuzioni, parecchie delle quali si costruiscono assai facilmente [1].

Fra i punti fondamentali della seconda specie ne considero alcuni che suppongo essere punti base soltanto del fascio (φ). Indico con R_p uno generico tra essi

[1] Fra queste, per es., l'omologia armonica che è la più semplice di tutte. Essa è definita da un fascio (φ) di coniche e da un fascio (ψ) di rette col centro nel punto doppio d'una φ (V. al n. 24).

e ammetto che esista una curva ψ_p, del fascio (ψ), avente un punto multiplo secondo h_p in R_p; che di più la ψ_p sia decomposta in una curva ψ_0, incontrata in punti variabili dalle φ, e in altre curve ciascuna delle quali non abbia punti comuni, con le φ, fuori dai fondamentali. Per distinguere queste ultime curve dalle altre dotate dell'istessa proprietà, chiamerò con ζ_u una qualunque di esse, con z_u il suo ordine e con ρ_{up}, ρ_{uk} le sue moltiplicità in un punto R_p od R_k rispettivamente. L'ordine di ψ_0 sarà dunque $n' - \Sigma z_u$ e la sua moltiplicità, in un punto R_p od R_k, sarà espressa da $h_p - \Sigma_u \rho_{up}$, o da $r'_k - \Sigma_u \rho_{uk}$.

Dalle ipotesi fatte segue che in ogni punto R_p sono assorbite $h_p r_p$ intersezioni della ψ_p con una φ qualunque. Di queste intersezioni ve n'ha h_p sopra ciascun ramo di tale curva, cosicchè i rami di essa, in prossimità dei punti R_p, contengono $\Sigma h_p r_p$ punti di un gruppo dell'involuzione [I]. I punti rimanenti del gruppo giacciono nelle intersezioni (non fondamentali) della φ con ψ_0, le quali sono in numero di $N - \Sigma h_p r_p$. *Si conclude pertanto che* ψ_0 *è la curva coniugata* (fondamentale) *dei punti* R_p *presi insieme.*

Ogni curva del sistema $(\xi)_3$ passa per R_p con r_p rami tangenti ai rami di quella φ che corrisponde a ψ_p nella relazione proiettiva che conviene stabilire tra i fasci (φ) e (ψ) per generare la ξ di cui si tratta. Il contatto di un ramo di questa ξ con un ramo della φ anzidetta, in R_p, è $(h_p + 1)$-punto. Infatti, un ramo della ξ contiene le intersezioni riunite in R_p di un ramo della φ con tutti gli h_p rami di ψ_p uscenti da R_p; inoltre, quello stesso ramo della ξ passa per il punto comune al ramo considerato della φ ed a quella curva del fascio (ψ) che è infinitamente vicina a ψ_p.

Una curva ξ non ha punti variabili con le ζ_u ed interseca la ψ_0 in $N - \Sigma h_p r_p$ punti coniugati.

22. Sia ζ_1 una qualsivoglia delle curve ζ_u. La curva che con ζ_1 completa una φ potrà comporsi di parti, delle quali una, che dirò φ_0, incontrata in punti variabili dalle ψ, e le altre non aventi punti comuni con le ψ fuori dai fondamentali. In modo generico indicherò con ζ_v una di queste ultime curve; tra esse vi è la ζ_1.

Una ζ_v, che non sia la ζ_1, appartiene a una ψ differente dalla ψ_p, da cui segue che *eccettuata la* ζ_1 *tutte le altre* ζ_v *non passano per i punti* R_p e quindi in uno di questi punti la moltiplicità delle φ_0 e ζ_1, prese insieme, è eguale a r_p, ossia la moltiplicità delle φ_0 è eguale a $r_p - \rho_{1p}$. *Delle* ζ_v *la sola* ζ_1 *interseca* ψ_0 *fuori dai punti fondamentali*, giacchè un punto, non fondamentale, comune a ψ_p e ad ogni altra ζ_v, apparterrebbe a due ψ differenti, il che è assurdo. La moltiplicità di una ζ_v, in un punto fondamentale R_k s'indicherà con ρ_{vk}.

Per considerare un caso più comprensivo si può ancora supporre che la φ, composta della φ_0 e delle ζ_v, contenga un certo numero di punti base soltanto per il fascio (ψ). Chiamo con R_q uno qualunque di questi punti e osservo anzitutto che fra le ζ_u e le ζ_v solamente la ζ_1 può passare per essi. In un punto R_q siano: r'_q la moltiplicità per ogni ψ; h_q la moltiplicità delle φ_0 e ζ_1 prese insieme e ρ_{1q} la moltiplicità di ζ_1. In allora, i numeri $h_q - \rho_{1q}$ ed $r'_q - \rho_{1q}$ esprimono le moltiplicità di φ_0 e ψ_0, rispettivamente, nel punto anzidetto.

La curva φ_0 (fondamentale) *è la coniugata di tutti i punti* R_q, ai quali competono proprietà affatto analoghe a quelle dei punti R_p.

23. Riferiamo proiettivamente i due fasci (φ) e (ψ) colla condizione che siano corrispondenti le due curve aventi la parte comune ζ_1. Con ciò si generano infinite curve del sistema $(\xi)_3$ formanti una rete. Una qualsivoglia di esse è decomposta nella parte fissa ζ_1 e in una curva ξ_1 dell'ordine $n+n'-z_1$ passante con $r_p-\rho_{1p}$ ed $r'_q-\rho_{1q}$ rami per un punto R_p ed R_q rispettivamente. Ogni ramo della ξ_1 tocca in R_p un ramo della φ_0 ed il contatto è (h_p+1)-punto; similmente ogni ramo della ξ_1 tocca in R_q un ramo della ψ_0 ed il contatto è (h_q+1)-punto (n. 21). I punti, non fondamentali, comuni a ξ_1 e ζ_1 sono in numero di:

$$\Sigma_k \rho_{1k}^2 + \Sigma_p \rho_{1p}^2 + \Sigma_q \rho_{1q}^2 - z_1^2 = \theta_1 ,$$

cioè *sulla* ζ_1 *esistono infiniti sottogruppi di* θ_1 *punti coniugati.*

I punti fondamentali di terza specie coniugati della ζ_1 (n. 6) *distinguonsi:*

I. *Nei punti comuni a* φ_0 *e* ψ_0 *in numero di*:

$$N - \theta_1 - \Sigma h_p (r_p - \rho_{1p}) - \Sigma h_q (r'_q - \rho_{1q}) = \nu .$$

II. *Nelle* $\Sigma h_p (r_p - \rho_1)$ *intersezioni, della* ψ_p *con la* φ_o, *riunite intorno ai punti* R_p *sui rami della* φ_0.

III. *Nelle* $\Sigma h_q (r'_q - \rho_{1p})$ *intersezioni, della* ψ_0 *con l'insieme delle* φ_0 *e* ζ_1, *riunite intorno ai punti* R_q *sui rami della* ψ_0.

In quanto alla curva unita dell'involuzione [I], essa tocca in un punto R_p tutti i $2(r_p-1)$ raggi doppî dell'involuzione determinata dalle tangenti ai rami delle curve φ uscenti dal punto anzidetto (n. 13) ed è ancora ivi tangente a tutti i rami della curva ψ_0. Dunque:

La curva unita dell'involuzione passa con:

$$2(r_p-1)+h_p - \Sigma_u \rho_{up}$$

rami per ogni punto fondamentale R_p.

24. Un caso particolare, di quello precedentemente considerato, e degno di nota, si ottiene nel supposto che la curva ψ_0 non esista, cosicchè l'insieme delle curve ζ_u forma una ψ, ossia $\Sigma z_u = n'$. In allora si ha $\nu = 0$ (n. 23) e le intersezioni delle ζ_u con una φ qualunque, riunite nei punti R_p, formano un gruppo completo dell'involuzione. Cioè, essendo $h_p = \Sigma_u \rho_{up}$,

$$\Sigma_p r_p \Sigma_u \rho_{up} = N .$$

Se poi anche la φ_0 non esiste, la ζ_1 è necessariamente una curva del fascio (φ).

§ 2. *Rappresentazione dei gruppi dell'involuzione* [I] *sui punti di un iperboloide.*

25. Si può mettere in corrispondenza il piano Π, dell'involuzione [I], con un iperboloide Π', riferendo tra di loro proiettivamente le curve del fascio (φ) al sistema (φ') delle generatrici, non che le curve del fascio (ψ) al sistema (ψ') delle direttrici di Π' (¹). In allora al gruppo dell'involuzione, determinato da una φ e da una ψ, corrisponde il punto, di Π', determinato dalle rette φ' e ψ' corrispondenti alle φ e ψ anzidette. E viceversa.

(¹) Qui, per comodo, i due sistemi di rette dell'iperboloide vengono designati coi nomi di generatrici e direttrici.

Un luogo algebrico L', dato ad arbitrio in Π', verrà incontrato rispettivamente in λ o λ' punti, da una generatrice o da una direttrice, e sarà perciò dell'ordine $\lambda+\lambda'$. Nel piano Π, il luogo L, corrispondente di L', avrà in comune rispettivamente λ o λ' gruppi dell'involuzione [I], con una φ od una ψ, e sarà dell'ordine $\lambda n'+\lambda' n$ (n. 3). Si vede poi facilmente che ad ogni sistema lineare di curve dato in Π', corrisponde un sistema lineare di curve nel piano Π. In particolare alle sezioni piane di Π' corrispondono, in Π, le curve del sistema $(\xi)_3$ (1).

26. Essendo R_k un punto fondamentale di prima specie, dell'involuzione, poichè una φ ed una ψ quali si vogliano vi passano rispettivamente con r_k ed r'_k rami, così:

Ad ogni punto fondamentale di prima specie, dell'involuzione [I], *ed alla sua curva coniugata* α_k (n. 9), *corrisponde, sull'iperboloide* Π', *una curva* (fondamentale) α'_k *dell'ordine* $r_k+r'_k$, *la quale incontra rispettivamente in* r_k *ed in* r'_k *punti una generatrice ed una direttrice.*

Invece è chiaro (n. 12) che:

Ad un punto fondamentale della seconda specie, ed alla sua curva coniugata, corrisponde, sull'iperboloide Π', *una generatrice ed una direttrice* (fondamentale).

Ad un sottogruppo di punti fondamentali Z_{ij} *ed alla loro curva coniugata* ζ_i (n. 4 e 6) *corrisponde, sull'iperboloide* Π' *un punto fondamentale* Z'_i.

E ancora (n. 4):

La curva fondamentale α'_k, *dell'iperboloide* Π', *passa con* ρ_{ik} *rami per il punto fondamentale* Z'_i.

Una curva α'_k è razionale perchè i suoi punti corrispondono univocamente alle direzioni intorno al punto fondamentale R_k dell'involuzione [I]. Per un punto arbitrario dello spazio passano $\frac{1}{2}r_k(r_k-1)+\frac{1}{2}r'_k(r'_k-1)$ corde della curva, percui essa, oltre ai punti multipli sopraccennati è dotata di altri:

$$(r_k-1)(r'_k-1)-\frac{1}{2}\Sigma_i\rho_{ik}(\rho_{ik}-1)$$

punti doppî, ciascuno dei quali è rappresentato, intorno al punto R_k, da una coppia di direzioni coniugate (n. 10).

Infine, le generatrici e le direttrici fondamentali, di Π', non contengono punti fondamentali Z'_i, se si suppone che le curve ζ_i non contengano punti fondamentali della seconda specie.

27. Sia M un punto qualunque della curva unita ed M' il punto che gli corrisponde sull'iperboloide Π' ed è perciò situato nella corrispondente di quella curva.

(1) Si rammenti che il sistema $(\xi)_3$ (n. 3) è rappresentato dalla:

$$a.\varphi_1\psi_1+b.\varphi_1\psi_2+c.\varphi_2\psi_1+d\varphi_2\psi_2=0.$$

Ora essendo X, Y, Z, W, le coordinate omogenee di un punto dello spazio, consideriamo la superficie determinata dalle equazioni:

$$X:Y:Z:W=\varphi_1\psi_1:\varphi_1\psi_2:\varphi_2\psi_1:\varphi_2\psi_2.$$

Le sezioni piane di essa, passanti per un suo punto qualunque, corrispondono alle curve del sistema $(\xi)_3$ formanti una rete ed aventi in comune un gruppo di punti dell'involuzione [I]. Da ciò segue una corrispondenza univoca fra i gruppi dell'involuzione ed i punti della superficie, l'equazione della quale, in coordinate di punti, si trova essere della forma: $XW-YZ=0$.

Si vede adunque che la rappresentazione dell'involuzione [I] sui punti di un iperboloide viene per sè affatto spontanea.

Alle sezioni piane di Π', passanti per M', corrispondono in Π le curve del sistema $(\xi)_3$, formanti una rete, e tutte tangenti in M alla retta t che unisce questo punto col suo coniugato successivo (n. 17). In particolare, al fascio di quelle sezioni piane, avente per asse la tangente alla corrispondente della curva unita, corrisponde quel fascio di curve ξ che in M sono dotate di un punto doppio (n. 17). Ciò mette in evidenza che *ad una direzione qualunque, intorno al punto M' dell'iperboloide Π', corrisponde, nel piano Π la direzione fissa segnata in M dalla retta t. A ciò fa eccezione la direzione della tangente in M' alla corrispondente della curva unita, alla quale corrispondono due direzioni coniugate distinte intorno al punto M.*

Si vede poi facilmente che:

La corrispondente della curva unita, sull'iperboloidè Π', è toccata da tutte generatrici e direttrici che corrispondono a curve dei fasci (φ) e (ψ) ciascuna delle quali è dotata d'un punto doppio.

E per quanto è detto al n. 13:

Le generatrici e le direttrici fondamentali, dell'iperboloide Π' (n. 26), *sono tangenti alla corrispondente della curva unita.*

Infine è utile di notare che una coppia di punti coniugati distinti o successivi, situati nella curva unita (n. 19), dà origine ad un punto doppio o ad una cuspide della curva corrispondente.

28. Per quanto concerne il passaggio da un luogo arbitrario del piano Π, o dell'iperboloide Π', al luogo corrispondente dell'iperboloide Π', o del piano Π, si hanno i teoremi seguenti:

I. *Ad una curva arbitraria Γ, del piano Π, dell'ordine ν e passante rispettivamente con s_k ed s_{ij} rami per i punti fondamentali R_k e Z_{ij}, corrisponde, nell'iperboloide Π', una curva Γ' dell'ordine* (n. 25 e 26):

$$\nu(n+n')-\Sigma s_k(r_k+r'_k),$$

passante con

$$\nu z_i-\Sigma_k s_k \rho_{ik}+\Sigma_j s_{ij}$$

rami per il punto fondamentale Z'_i (¹).

II. *La curva Γ' tocca la corrispondente della curva unita in tutti i punti corrispondenti di quelli nei quali la curva Γ e la sua coniugata si tagliano sulla curva unita medesima* (n. 18 e 27).

III. *Ad una curva L', data ad arbitrio sull'iperboloide Π', incontrata rispettivamente in λ e λ' punti da una generatrice e da una direttrice, e passante con μ_i rami per il punto fondamentale Z'_i, corrisponde, nel piano Π, una curva dell'ordine* (n. 25 e 26):

$$\lambda n'+\lambda' n-\Sigma \mu_i z_i,$$

per la quale i punti fondamentali R_k e Z_{ij} sono multipli secondo i numeri:

$$\lambda' r_k+\lambda r'_k-\Sigma_i \mu_i \rho_{ik}, \quad \text{e} \quad \mu_i.$$

29. Siano: P il genere delle curve φ; D il numero di queste curve dotate d'un punto doppio esternamente ai punti base; E il numero dei punti fondamentali di seconda

(¹) Si può notare che le curve Γ e Γ' sono dello stesso genere giacchè i loro punti si corrispondono univocamente. Ad ogni coppia di punti coniugati nella prima (n. 18) corrisponde un punto doppio nella seconda.

specie comuni alle sole φ; p_i il genere di una curva fondamentale ζ_i dell' involuzione; D', P', E', i numeri analoghi a D, P, E, riferentesi alle curve ψ. Da ciò che precede (n. 13 e 28) si trae che:

La curva corrispondente alla curva unita, sull' iperboloide Π', *è dell'ordine*

$$4(N-1)+2(P+P'),$$

e passa (n. 6) *con*

$$2(\theta_i+p_i-1)$$

rami per il punto fondamentale Z'_i.

Calcolando il numero delle tangenti, della curva in discorso, che incontrano una data generatrice o direttrice dell'iperboloide, si trova:

La corrispondente della curva unita è del rango

$$4(N+P-1)+D'+E'=4(N+P'-1)+D+E.$$

Di tale curva ora si conoscono l'ordine, il rango, il genere (che eguaglia quello della curva unita (n. 28)), le moltiplicità nei punti fondamentali Z'_i e il numero delle corde passanti per un punto arbitrario dello spazio. Perciò, in ogni caso particolare, si potrà dedurre il numero dei punti doppî e delle cuspidi della curva (fuori dai punti fondamentali) vale a dire il numero delle coppie di punti coniugati distinti e quello di punti coniugati successivi situati nella curva unita (n. 19).

§ 3. *Involuzione generata da una rete di curve.*

30. Il caso di una involuzione [I] generata da una rete $(\varphi)_2$, di curve φ, si può far discendere da quello di una involuzione generata da due fasci composti di curve del medesimo ordine e aventi una curva comune. Questa, in allora, non essendo incontrata in punti variabili dalle curve dei due fasci, non è altro che una curva fondamentale di terza specie dell' involuzione (n. 6). Si vede nondimeno che l' involuzione medesima può ritenersi generata da una coppia qualunque di fasci presi nella rete $(\varphi)_2$, e che perciò ogni curva di questa rete può assumere il carattere di curva fondamentale di terza specie.

Se le curve φ sono dell' ordine n ed hanno tutte in comune un certo numero di punti (fondamentali), indicando con R_k uno qualunque di essi e con r_k la sua moltiplicità per ogni φ, il grado N dell' involuzione è dato dalla

$$N=n^2-\Sigma r_k^2.$$

31. Una curva (fondamentale) ζ_i, dell'ordine z_i, non incontrata in punti variabili dalle φ, ha la proprietà che le curve della rete $(\varphi)_2$, passanti per un suo punto qualunque, sono tutte spezzate nella stessa ζ_i e nelle curve, d' ordine $n-z_i$, formanti un fascio. I punti base di esso, che cadono fuori dai punti R_k, sono i *punti fondamentali* Z_{ij}, *della terza specie*, ai quali è coniugata tutta la curva ζ_i. Le direzioni segnate intorno a quei punti da una curva del fascio in discorso, e le intersezioni (non fisse) della curva medesima con la ζ_i, formano un gruppo completo dell' involuzione [I]. Essendo ρ_{ik} la moltiplicità della ζ_i nel punto R_k, si trova che nella stessa ζ_i vi sono sottogruppi composti ciascuno di

$$\theta_i=\Sigma_k\rho_{ik}^2-z_i^2$$

punti. Perciò, il numero dei punti Z_{ij}, coniugati della ζ_i è

$$N-\theta_i.$$

32. Dalle espressioni date al n. 7, tenendo presenti le osservazioni precedenti (n. 30 e 31) si rileva che:

La curva coniugata di un' altra data ad arbitrio, dell' ordine ν, *con punti multipli rispettivamente secondo i numeri* s_k *ed* s_{ij} *nei punti fondamentali* R_k *e* Z_{ij} *è dell' ordine*

$$\nu\left(n^2-\Sigma z_i^2-1\right)-\Sigma_k s_k(nr_k-\Sigma_i \rho_{ik} z_i)-\Sigma_i \Sigma_j s_{ij} z_i;$$

passa con

$$\nu(nr_h-\Sigma_i \rho_{ih} z_i)-\Sigma_k s_k(r_k r_h-\Sigma_i \rho_{ik}\rho_{ih})-\Sigma_i\Sigma_j \rho_{ih} s_{ij}-s_h$$

rami per il punto fondamentale R_h *e con*

$$\nu z_i-\Sigma_k s_k \rho_{ih}+\Sigma_j s_{ij}-s_{il}$$

rami per il punto fondamantale Z_{il}.

In particolare:

La curva coniugata d' una retta qualunque è dell' ordine

$$n^2-\Sigma z_i^2-1$$

con punti multipli rispettivamente secondo i numeri

$$nr_h-\Sigma_i \rho_{ih} z_i \quad \text{e} \quad z_i$$

nei punti fondamentali R_h *e* Z_{ii}.

33. È manifesto che nel caso attuale i punti fondamentali R_k sono tutti d'una medesima specie e propriamente il loro carattere è quello dei punti fondamentali della prima specie di una involuzione costruita con due fasci di curve (n. 1).

Ad ogni punto fondamentale R_k *è coniugata una curva (fondamentale)* α_k *dell' ordine*

$$nr_k-\Sigma_i \rho_{ik} z_i,$$

la quale passa con

$$r_k^2-\Sigma_i \rho_{ik}^2+1$$

rami per R_k; *con*

$$r_k r_h-\Sigma_i \rho_{ik}\rho_{ih}$$

rami per il punto fondamentale R_h (differente da R_k) *e con* ρ_{ik} *rami per il punto fondamentale* Z_{ij} (n. 9).

Si ha poi (n. 10):

Intorno al punto R_k *esistono*

$$\frac{1}{2}(r_k-1)(r_k-2)-\frac{1}{2}\Sigma_i \rho_{ik}(\rho_{ik}-1)$$

coppie di direzioni coniugate.

34. *In una retta qualunque t vi sono*

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\Sigma z_i(z_i-1)$$

coppie di punti coniugati (n. 13).

La curva coniugata di t contiene queste coppie di punti e interseca di nuovo la t in punti della curva unita dell'involuzione, la qual curva non è altro che la *Jacobiana* della rete $(\varphi)_2$. Perciò (n. 32):

La curva unita dell'involuzione è dell'ordine

$$3(n-1)-\Sigma z_i\,;$$

essa ha un punto multiplo secondo il numero

$$3r_k-\Sigma_i\rho_{ik}-1$$

(n. 13) *nel punto fondamentale* R_k.

I rami della curva unita toccano in R_k altrettanti rami della curva fondamentale α_k (n. 20).

35. I gruppi di una involuzione [I], generata da una rete $(\varphi)_2$ di curve si possono riferire assai semplicemente ai punti di un piano Π', e basta a tal uopo stabilire una relazione proiettiva fra le curve della rete anzidetta e le rette di Π'. In allora, alle rette di questo piano, passanti per un punto arbitrario M', corrispondono, nel piano Π, le curve della rete $(\varphi)_2$ formanti un fascio i cui punti base (non fissi) costituiscono il gruppo della [I] corrispondente al punto M'. Viceversa, in modo analogo, da un gruppo della involuzione si passa al suo punto corrispondente nel piano Π' (').

Ogni curva ζ_i, *insieme ai punti fondamentali* Z_{ij} *ad essa coniugati* (n. 31), *corrisponde ad un punto fondamentale* Z'_i *del piano* Π'_1. *Più particolarmente, ad ogni direzione intorno a* Z'_i *corrispondono in* Π *un sottogruppo di* $N-\theta_i$ *direzioni intorno ai suddetti punti* Z_{ij} *e un sottogruppo di* θ_i *punti situati nella* ζ_i.

Ad un punto fondamentale R_k, *corrisponde, nel piano* Π', *una curva fondamentale* α'_k, *dell'ordine* r_k, *la quale è razionale e passa con* ρ_{ik} *rami per il punto* Z'_i. *Ciascuna delle*

$$\frac{1}{2}(r_k-1)(r_k-2)-\frac{1}{2}\Sigma_i\rho_{ik}(\rho_{ik}-1)$$

coppie di punti coniugati distinti situati intorno ad R_k (n. 33), *dà origine ad un punto doppio della curva* α'_k.

Se si prendono a considerare un punto della curva unita ed il suo corrispondente nel piano Π', si trova che le relazioni di corrispondenza fra le direzioni intorno ai punti stessi, sono affatto analoghe a quelle già vedute a proposito della rappresentazione dei gruppi di una involuzione, generata da due fasci di curve, sui punti di un iperboloide (n. 27).

Qui si può aggiungere che

Alle curve della rete $(\varphi)_2$, *dotate di un punto doppio corrispondono in* Π' *le tangenti della corrispondente alla curva unita.*

36. *Ad una curva* Γ, *data ad arbitrio nel piano* Π, *dell'ordine* ν *e passante con* s_k *ed* s_{ij} *rami rispettivamente per i punti fondamentali* R_k *e* Z_{ij} *corrisponde, nel piano* Π, *una curva* Γ' *dell'ordine*:

$$n\nu-\Sigma r_k s_k\,,$$

(') Essendo, nel piano Π, $\varphi_1=0$ $\varphi_2=0$ $\varphi_3=0$ tre curve qualunque della rete $(\varphi)_2$, ed $y_1=0$ $y_2=0$ $y_3=0$ le rette che loro corrispondono in Π', le equazioni:

$$y_1:y_2:y_3=\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3$$

determinano la corrispondenza univoca fra i gruppi dell'involuzione [I] ed i punti del piano Π'.

per la quale il punto fondamentale Z'_i è multiplo secondo il numero

$$\nu z_i - \Sigma_k \rho_{ik} s_k + \Sigma_j s_{ij}\ .$$

Le curve Γ e Γ' sono dello stesso genere.

Della curva corrispondente alla curva unita ora si potranno calcolare l'ordine, il genere e la classe (n. 35) dopo di che sarà conosciuto il numero de' suoi punti doppî e quello delle sue cuspidi (fuori dai punti Z'_i). A questi punti doppî ed a queste cuspidi corrispondono rispettivamente, nel piano Π, coppie di punti coniugati distinti o successivi esistenti nella curva unita (n. 29).

Infine si trova ancora facilmente che:

Ad una curva, datà ad arbitrio nel piano Π', dell'ordine l e passante con μ_i rami per il punto Z'_i, corrisponde, nel piano Π, una curva dell'ordine

$$n l - \Sigma \mu_i z_i$$

con punti multipli secondo i numeri

$$r_k l - \Sigma_i \rho_{ik} \mu_i \quad \text{e} \quad \mu_i$$

nei punti fondamentali R_k e Z_i rispettivamente.

§ 4. *Luoghi contenenti infiniti sottogruppi di una involuzione* [I].

37. Partiamo dal supposto che esista una curva Δ_m contenente infiniti sottogruppi ciascuno composto di m punti coniugati in una involuzione [I], del grado N, situata in un piano Π. In allora, tale curva si potrà imaginare descritta dal movimento continuo di un sottogruppo riguardato come *elemento generatore* di essa. Vi sarà pertanto una seconda curva Δ'_m, luogo dei sottogruppi complementari di quelli contenuti in Δ_m, ciascuno dei quali si comporrà di $N - m = m'$ punti.

Le due curve Δ_m e Δ'_m, considerate insieme, formano un luogo di infiniti gruppi completi dell'involuzione ed in esse due sottogruppi complementari si corrispondono univocamente. Perciò:

Se un punto P è multiplo secondo i numeri p e p', rispettivamente, per le curve Δ_m e Δ'_m ogni altro punto coniugato di P è multiplo secondo il numero $p + p'$ per l'insieme delle curve medesime.

38. Indichiamo con δ_m e δ'_m gli ordini delle Δ_m, Δ'_m e sia t' la curva coniugata d'una retta arbitraria t (n. 8 e 32). A ciascun punto di Δ_m, situato in t, è coniugato un sottogruppo di $m-1$ punti, nella stessa Δ_m, i quali giacciono in t'; ed a ciascun punto di Δ'_m, situato in t, è coniugato un sottogruppo di m punti, nella Δ_m, i quali giacciono in t'. Da ciò segue che le C_m intersezioni (fuori dai punti fondamentali) delle curve t' e Δ_m, sono distribuite in δ_m sottogruppi di $m-1$ punti ed in δ'_m sottogruppi di m punti. Onde l'eguaglianza:

$$(m-1)\delta_m + m\delta'_m = C_m\ .$$

In modo analogo si trova l'altra

$$(m'-1)\delta'_m + m'\delta_m = C'_m\ ,$$

dove C'_m è il numero dei punti (non fondamentali) comuni alle curve t' e Δ'_m.

39. Consideriamo un punto fondamentale R_k, della prima specie (n. 9 e 33), e diciamo $\varepsilon_{k,m}$, $\varepsilon'_{k,m}$ le sue moltiplicità per le curve Δ_m, Δ'_m. La curva coniugata di R_k interseca la Δ_m (fuori dai punti fondamentali) in D_m punti i quali distinguonsi in $\varepsilon_{k,m}$ sottogruppi di $m-1$ punti ed in $\varepsilon'_{k,m}$ sottogruppi di m punti. Questi sottogruppi

sono coniugati rispettivamente alle direzioni dei rami, delle curve Δ_m, Δ'_m, uscenti da R_k. Perciò si ha:

$$(m-1)\varepsilon_{k,m}+m\varepsilon'_{k,m}=D_m .$$

E dinotando con D'_m il numero dei punti (non fondamentali) comuni a Δ'_m e alla curva coniugata di R_k si trova analogamente

$$(m'-1)\varepsilon'_{k,m}+m'\varepsilon_{k,m}=D'_m .$$

40. Essendo R_k un punto fondamentale della seconda specie (n. 12) dicasi r_k il grado dell'involuzione di direzioni coniugate esistenti intorno ad esso, permodochè la sua curva coniugata conterrà infiniti sottogruppi di $N-r_k$ punti. Indicando con E_m il numero delle intersezioni (non fondamentali) della curva ora detta con l'insieme delle curve Δ_m e Δ'_m, è evidente che queste intersezioni distinguonsi in $\frac{E_m}{N-r_k}$ sottogruppi a ciascuno dei quali sono coniugate r_k direzioni tangenti in R_k a rami di Δ_m o di Δ'_m. In questo caso si ha dunque:

$$\frac{E_m}{N-r_k}=\frac{1}{r_k}(\varepsilon_{k,m}+\varepsilon'_{k,m}) .$$

Siano infine $\eta_{ij,m}$, $\eta'_{ij,m}$ le moltiplicità delle curve Δ_m, Δ'_m in un determinato punto fondamentale Z_{ij} (n. 6 e 31) ed osserviamo che le $F_{i,m}$ intersezioni (non fondamentali) della curva ζ_i, coniugata dei punti Z_{ij}, con l'insieme delle Δ_m, Δ'_m distinguonsi in tanti sottogruppi di θ_i punti a ciascuno dei quali sottogruppi è coniugato un punto di Δ_m o di Δ'_m infinitamente vicino al punto Z_{ij} che si considera. Perciò:

$$\eta_{ij,m}+\eta'_{ij,m}=\frac{1}{\theta_i}F_{i,m} .$$

41. Se un punto P (non fondamentale) è h-plo per la curva Δ_m, è anzitutto evidente che esso appartiene a più sottogruppi elementari (n. 37) della curva stessa. Questi sottogruppi possono tutti coincidere in un sottogruppo unico (sottogruppo elementare multiplo) oppure essere differenti fra di loro. Nel primo caso tutti i punti del sottogruppo anzidetto sono h-pli per la Δ_m e parimenti ogni punto del sottogruppo complementare è h-plo per la Δ'_m. Nel secondo caso il punto P deve necessariamente far parte di un sottogruppo S composto di un numero μ, di punti, maggiore di m. E qui ancora può darsi:

a) Che di quei μ punti se ne possano prendere m soltanto *in un numero determinato l di modi* per avere dei sottogruppi elementari della curva Δ_m. In allora la moltiplicità h, di tale curva in uno P, dei punti stessi, eguaglia il numero delle volte che quel punto appartiene ad un sottogruppo elementare, e la moltiplicità di P per la Δ'_m è $l-h$. I punti del sottogruppo complementare di S appartengano soltanto alla curva Δ'_m e sono l-pli per essa.

b) Che dei μ punti del sottogruppo S ve ne siano $\mu'<m$ fissi, i quali insieme altri $m-\mu'$, *presi in modo qualsivoglia* nel sottogruppo stesso, formino un sottogruppo elementare della curva Δ_m. Da tale ipotesi segue immediatamente che ciascuno di quei punti fissi fa parte di $\begin{bmatrix}\mu-\mu'\\ m-\mu'\end{bmatrix}$ (¹) sottogruppi elementari di Δ_m e

(¹) Qui, e nel seguito, il simbolo $\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}$ dinota il numero delle combinazioni di p cose a q a q.

ciascuno degli altri $\mu - \mu'$ punti di S appartiene a $\left[\begin{matrix}\mu - \mu' - 1 \\ m - \mu - 1\end{matrix}\right]$ di tali sottogruppi. I punti del sottogruppo complementare di S, giacciono soltanto nella curva Δ'_m e sono in numero di $N - \mu$. Ma poichè $N - \mu < m'$, così la curva Δ'_m deve contenere punti del sottogruppo S; e infatti è evidente che se dei punti di S ne prendiamo m, in qualunque modo, i rimanenti $\mu - m$ sono punti della curva Δ'_m. Questa, perciò, contiene tutti i $\mu - \mu'$ punti non fissi di S, ciascuno dei quali appartiene a $\left[\begin{matrix}\mu - \mu' - 1 \\ m - \mu\end{matrix}\right]$ sottogruppi elementari. Segue ancora che *nella curva* Δ'_m *vi è un sottogruppo* S', *composto di* $(N - \mu) + (\mu - \mu') = N - \mu' > m'$ *punti, dei quali* $N - \mu$ *appartengono a tutti i sottogruppi elementari in esso contenuti e gli altri* $\mu - \mu'$ *sono i punti non fissi del sottogruppo* S.

Partendo da questo fatto, rispetto al sottogruppo S', considerato nella Δ'_m, si deducono conseguenze analoghe a quelle ottenute considerando il sottogruppo S nella Δ_m; e perciò basta, nel discorso precedente, sostituire ai numeri m, μ, μ' gli altri m', $N - \mu'$, $N - \mu$ rispettivamente. Ma poichè le curve Δ_m, Δ'_m, nella quistione attuale si comportano nello stesso modo, per concludere rimane soltanto da osservare che ciascuno degli $N - \mu$ punti fissi di S' appartiene a

$$\left[\begin{matrix}N - \mu' - (N - \mu) \\ m' - (N - \mu)\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\mu - \mu' \\ m - \mu'\end{matrix}\right]$$

sottogruppi elementari della curva Δ'_m. Avendo presente il principio della corrispondenza univoca fra i sottogruppi elementari nelle Δ_m, Δ'_m (n. 37), la conclusione ora fatta era da prevedersi, giacchè $\left[\begin{matrix}\mu - \mu' \\ m - \mu'\end{matrix}\right]$ è appunto il numero totale dei sottogruppi elementari contenuti in S.

42. Per riunire insieme tutti i casi possibili, relativi all'ipotesi *b*) del n.° precedente, ammetterò che ciascuno dei sottogruppi elementari contenuti in S (e quindi anche ciascuno di quelli contenuti in S') sia multiplo secondo il numero k. In allora si trova che *la moltiplicità della curva* Δ_m *nei punti di* S, *non comuni con* S', *è eguale a* $k\left[\begin{matrix}\mu - \mu' \\ m - \mu'\end{matrix}\right]$ *e questa è anche la moltiplicità di* Δ'_m *nei punti di* S' *non comuni con* S. *In un punto poi comune ad* S *ed* S' *le moltiplicità di* Δ_m *e* Δ'_m *sono rispettivamente* $k\left[\begin{matrix}\mu - \mu' - 1 \\ \mu - m\end{matrix}\right]$ e $k\left[\begin{matrix}\mu - \mu' - 1 \\ m - \mu'\end{matrix}\right]$.

La somma di queste due ultime moltiplicità deve (n. 37) essere eguale a $k\left[\begin{matrix}\mu - \mu' \\ m - \mu'\end{matrix}\right]$, come infatti si verifica.

La curva Δ_m essendo un luogo contenente infiniti sottogruppi di m punti, più ordinariamente avverrà che vi sia un numero finito di sottogruppi eccezionali, composti di $m + 1$ punti, m dei quali, presi in qualsivoglia modo, formino un sottogruppo elementare (non multiplo) della curva stessa. Per questo caso basta porre $k = 1$, $\mu = m + 1$, $\mu' = 0$, per cui le curve Δ_m e Δ'_m passano rispettivamente con m rami e con un solo ramo per ogni punto del sottogruppo eccezionale che si considera. I punti di tale sottogruppo, situati soltanto nella curva Δ'_m, sono $(m + 1)$-pli per essa.

Conclusioni analoghe alle precedenti si ottengono supponendo la Δ'_m dotata di

un punto multiplo (non fondamentale) o di un sottogruppo di punti il numero dei quali sia maggiore di m'.

43. Sia P un punto comune alla curva Δ_m e alla curva unita dell'involuzione [I]. Se il punto di Δ_m successivo a P non è coniugato di P, è evidente che per tal punto passa anche la curva Δ'_m (n. 18). In allora la coniugata della curva unita contiene due sottogruppi, l'uno di $m-1$ e l'altro di $m'-1$ punti (coniugati di P); in ogni punto del primo essa tocca la curva Δ_m e in ogni punto del secondo essa tocca la curva Δ'_m.

Nel caso invece, che il punto P, della Δ_m, sia coniugato al proprio successivo nella curva stessa, la coniugata della curva unita contiene un sottogruppo di $N-2$ punti (coniugati di P) per $m-2$ dei quali passa la Δ_m e pei rimanenti la Δ'_m.

Conseguenze analoghe alle precedenti si ottengono considerando un punto comune alla curva Δ'_m e alla curva unita.

Ciò posto, indichiamo con χ_m il numero di quelle intersezioni delle curve Δ_m, Δ'_m che cadono nella curva unita. Questa verrà segata in altri $\varkappa_m$ punti dalla Δ_m ed in altri $\varkappa'_m$ punti dalla Δ'_m.

Siano ancora rispettivamente: H_m e H'_m i punti (fuori dai fondamentali) comuni alla curva unita e alle Δ_m, Δ'_m; L_m e L'_m i punti (fuori dai fondamentali) comuni alla coniugata della curva unita e alle stesse Δ_m. Δ'_m. Da quanto è detto sopra si deducono le eguaglianze:

$$\chi_m+\varkappa_m=H_m\ ,\quad \chi_m+\varkappa'_m=H'_m$$

$$(m-2)\varkappa_m+2(m-1)\chi_m+m\varkappa'_m=L_m\ ,\quad m'\varkappa_m+2(m'-1)\chi_m+(m'-2)\varkappa'_m=L'_m\ ,$$

delle quali però due soltanto sono fra loro indipendenti ([1]).

44. Un punto M, non fondamentale e fuori dalla curva unita, sia comune alle curve Δ_m, Δ'_m. Riguardando ad es. M come appartenente alla Δ'_m, sono possibili i due casi seguenti:

a) Gli m punti coniugati di M, sulla Δ_m, sono distinti da M.

b) Di questi m punti uno coincide con M.

Nel caso *a*), M fa parte di un sottogruppo di punti, della curva Δ_m, il numero dei quali è maggiore di m (n. 41); nel caso *b*), M fa parte di un sottogruppo di punti, della curva Δ'_m, il numero dei quali è maggiore di m'.

Da ciò segue che

Le intersezioni delle curve Δ_m e Δ'_m, *fuori dai punti fondamentali e dalla curva unita cadono in quei sottogruppi, della* Δ_m *o della* Δ'_m, *composti di un numero di punti maggiore di* m *o di* m'.

45. Mi propongo ora di mostrare uno dei modi coi quali si costruiscono due curve analoghe a Δ_m, Δ'_m e di risolvere le quistioni di geometria numerativa che loro si riferiscono.

Sia $(\Gamma)_{m-1}$ un sistema ∞^{m-1} di curve Γ dell'ordine ν, tale che per $m-1$ punti arbitrarî passino α di quelle curve. In generale una curva Γ non contiene che coppie

([1]) Infatti, combinando in qualunque modo una coppia di esse, e poscia l'altra coppia, si ottengono due equazioni che conducono ad una relazione fra i numeri H_m, L_m, H'_m, L'_m, la quale non può essere che una identità.

di punti coniugati e queste coppie sono in numero determinato (n. 18). Vi sarà però un numero ∞^{m-2} di curve Γ contenenti ciascuna una terna di punti coniugati; ve ne sarà un numero ∞^{m-3} contenenti ciascuna una quaderna, ecc.; ve ne sarà un numero $\infty^{m-\mu+1}$ contenenti ciascuna un sottogruppo di μ punti coniugati.

Di qui segue che le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ contenenti un sottogruppo di m punti sono in numero semplicemente infinito e tra esse ve ne saranno alcune contenenti un sottogruppo di $m+1$ punti.

I sottogruppi di m punti situati in curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ formano un luogo Δ_m, nel quale giacciono i sottogruppi di $m+1$ punti dianzi accennati.

46. Consideriamo una retta arbitraria t e la sua curva coniugata t' (n. 8 e 32). Preso un punto qualunque P, in t, cogli N—1 punti ad esso coniugati (i quali trovansi in t') si possono formare $\begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ sottogruppi di $m-1$ punti, per ciascuno dei quali sottogruppi passano α curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$. Queste curve segano t in $\alpha\nu\begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ punti Q che assumo come corrispondenti di P. Il numero dei punti P, corrispondenti ad un punto Q, è evidentemente eguale a quello delle curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ che passano per Q e contengono, ciascuna, un sottogruppo di $m-1$ punti situati nella curva t'. Ora, le curve di $(\Gamma)_{m-1}$, passanti per Q, formano un sistema ∞^{m-2} che dinoterò con $(\Gamma)_{m-2}$, e i sottogruppi di $m-1$ punti, in esse contenuti, determinano un luogo Δ_{m-1} dell'ordine δ_{m-1}. Sia Δ'_{m-1} la curva coniugata di Δ_{m-1}, la quale conterrà infiniti sottogruppi di $m'+1$ punti e sarà dell'ordine δ'_{m-1}. È manifesto che δ'_{m-1} è l'indice della serie [1] formata dalle curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ ciascuna delle quali contiene un sottogruppo di $m-1$ punti situati nella curva t'.

Se una curva del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ passa per $m-1$ punti coniugati della t', è chiaro che al sottogruppo da essi formato è coniugato un punto comune alla retta t e alla curva Δ'_{m-1}. Viceversa, se un punto di Δ'_{m-1} giace in t, ad esso è coniugato un sottogruppo di $m-1$ punti situati sia in t' che in Δ_{m-1} epperò anche in una curva del sistema $(\Gamma)_{m-1}$. *Dunque, per il punto* Q *passano* δ'_{m-1} *curve del sistema* $(\Gamma)_{m-1}$, *contenenti ciascuna un sottogruppo di* $m-1$ *punti situati nella curva* t'.

Segue da ciò che le due serie di punti corrispondenti P e Q ammettono:

$$\alpha\nu\begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \delta'_{m-1} \qquad (1)$$

punti uniti. Osservisi però che ad un punto O della curva unita, situato in t, sono coniugati N—1 punti di t', uno dei quali O_1, è infinitamente vicino ad O. Escludendo O_1, cogli altri N—2 possiamo formare $\begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix}$ sottogruppi di $m-2$ punti, per ciascuno dei quali sottogruppi e per O_1 passano α curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$. Perciò, ogni punto analogo ad O conta $\alpha\begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix}$ volte nei punti uniti (1). Ora, detto ω l'ordine della curva unita è evidente che vi sono:

$$\alpha\left\{\begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix}\nu - \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix}\omega\right\} + \delta'_{m-1}$$

[1] *Indice* di una serie ∞^1 di curve è il numero di quelle fra esse che passano per un punto arbitrario (Jonquières, nel giornale di Liouville, aprile 1861).

punti di t per ciascuno dei quali e per $m-1$ de' suoi coniugati passa una curva del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ e quindi posto:

$$\alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix} \nu - \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix} \omega \right\} = A_m ,$$

si ha:

$$\delta_m = A_m + \delta'_{m-1} . \qquad (2)$$

47. Nella formula precedente si fa dipendere il numero δ_m da m e dal numero δ'_{m-1}, il quale alla sua volta dipende da δ_{m-1}. Ora, la espressione di δ_{m-1} si trova applicando al sistema $(\Gamma)_{m-2}$ le stesse considerazioni fatte sul sistema $(\Gamma)_{m-1}$ per iscoprire il valore di δ_m. Ma si rifletta che il sistema $(\Gamma)_{m-2}$ non ha altra particolarità all'infuori di quella che le sue curve passano tutte per un punto fisso arbitrario, ciò che non influisce sul valore di δ_{m-1} nè su quello di δ'_{m-1}. Onde segue che il valore di δ_{m-1} si deduce dalla (2) del numero precedente, ponendovi $m-1$ al posto di m e ritenendo che il simbolo δ'_{m-2} esprima l'ordine di una curva Δ'_{m-2} coniugata di un'altra, Δ_{m-2}, luogo degli infiniti sottogruppi di $m-2$ punti situati sopra curve del sistema ∞^{m-3}, che si otterrebbe prendendo tutte le curve di $(\Gamma)_{m-1}$ passanti per due punti fissi arbitrarî. E così proseguendo nello stesso modo, si perviene a dimostrare che la equazione

$$\delta_m = A_m + \delta'_{m-1}$$

coesiste con tutte le altre della serie:

$$\begin{aligned} \delta_{m-1} &= A_{m-1} + \delta'_{m-2} \\ \delta_{m-2} &= A_{m-2} + \delta'_{m-3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_2 &= A_2 + \delta'_1 \\ \delta_1 &= A_1 , \end{aligned}$$

che si ottiene scambiando, nell'equazione medesima, $m-\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots (m-1))$ con m e dove tutti i simboli, per quanto s'è detto, hanno significati ben noti.

Sopra questa proprietà di cui godono tutte le formule relative alle attuali ricerche sulle curve Δ_m. Δ'_m, si fonda principalmente la soluzione del problema proposto al n. 45. In seguito se ne farà uso ommettendo di ripetere le considerazioni che vi hanno condotto.

48. Sia t' la curva, dell'ordine τ, coniugata della retta arbitraria t. Preso un punto qualunque P in t', cogli $N-2$ coniugati di esso, situati nella stessa t', si possono formare $\begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix}$ sottogruppi di $m-1$ punti, per ciascuno dei quali sottogruppi passano α curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$. In tal modo si vengono a determinare $\alpha \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix}$ curve Γ che assumerò quali corrispondenti del punto P. È poi manifesto che ogni curva Γ, costruita come precedentemente, può avere origine da $N-1-(m-1) = m'$ punti P e che inoltre essa appartiene ad una serie $(\Gamma)_1$, ∞', dell'indice δ'_{m-1} (n. 46).

Se una curva di tal serie passa per uno de' suoi punti corrispondenti, essa contiene un sottogruppo di m punti, della t', al quale è coniugato un punto della retta t situato in Δ'_m. Ma si osservi che le curve della serie, dotate di tale proprietà, sono

corrispondenti di ciascuno degli m punti del sottogruppo ch'esse contengono, epperò coincidono m ad m in δ'_m curve della serie medesima.

Ciò posto, prendiamo due punti arbitrarî O ed O' fuori dal piano dell'involuzione. Da O proiettiamo i punti di t' e avremo le generatrici di un cono $O.t'$ dell'ordine τ; da O' proiettiamo le curve della serie $(\Gamma)_1$ e avremo una serie $O'.(\Gamma)_1$ di coni dell'ordine ν. Fra le generatrici del cono $O.t'$ ed i coni della serie $O'.(\Gamma)_1$ hanno luogo le stesse relazioni di corrispondenza che esistono fra i punti di t' e le curve della serie $(\Gamma)_1$.

Ora, un piano qualunque, passante per O, contiene τ generatrici del cono $O.t'$, le quali segano i loro coni corrispondenti in $\alpha\nu\tau \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix}$ punti. Variando quel piano intorno ad O, i punti anzidetti generano una curva Θ che passa per O con $m'\delta'_{m-1}$ rami, giacchè per O passano δ'_{m-1} coni della serie, ciascuno dei quali incontra ivi le m' generatrici corrispondenti. Perciò la curva Θ è dell'ordine

$$\alpha\tau\nu \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} + m'\delta'_{m-1}.$$

49. Indicando con x ed s, in generale, le moltiplicità della curva t' e di una curva del sistema $(\Gamma)_{m-1}$, rispettivamente, in uno qualunque dei punti fondamentali dell'involuzione, si vede subito che la moltiplicità, in detto punto, per la curva Θ è espressa da

$$\alpha x s \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix}.$$

Di più è ancora manifesto che ogni punto della curva t', infinitamente vicino ad uno dei proprî coniugati sulla curva medesima, è multiplo secondo il numero $\alpha \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix}$ per la curva Θ. I punti che godono della proprietà ora detta giacciono nella curva unita e il loro numero è eguale all'ordine ω' della coniugata alla curva unita (n. 18).

Dopo ciò segue che il numero dei punti comuni al piano dell'involuzione e alla curva Θ, che cadono fuori dai punti fondamentali e dalla curva unita, è espresso da

$$\alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} (\tau\nu - \Sigma x.s) - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} \omega' \right\} + m'\delta'_{m-1}, \tag{1}$$

dove la sommatoria s'intende estesa a tutti i punti fondamentali. Per ciascuno dei punti (1), che è situato necessariamente nella curva t', passa la curva che gli corrisponde nella serie $(\Gamma)_1$, onde per quanto è detto sopra (n. 48) si ha:

$$m\delta'_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} (\tau\nu - \Sigma xs) - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} \right\} + m'\delta'_{m-1}.$$

L'espressione $\tau\nu - \Sigma xs$, in virtù della prima equazione del n. 38 (postovi $m=1$) è eguale all'ordine ν' della curva coniugata ad una qualunque delle Γ, per cui fatto

$$\alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} \nu' - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} \omega' \right\} = A'_m,$$

risulta

$$m\delta'_m = A'_m + m'\delta'_{m-1}.$$

50. Mediante la serie di equazioni

$$m\,\delta'_m = A'_m + m'\delta'_{m-1}$$

$$(m-1)\,\delta'_{m-1} = A'_{m-1} + (m'+1)\,\delta'_{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\,\delta'_2 = A'_2 + (N-2)\,\delta'_1$$

$$\delta'_1 = A'_1\,,$$

le quali si deducono tutte dalla prima, per una proprietà nota (n. 47), si ottiene:

$$m\,\delta'_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \frac{m'(m'+1)\ldots\ldots(m'+\lambda-1)}{(m-1)(m-2)\ldots.(m-\lambda)}\,A'_{m-\lambda}\,,$$

dove:

$$A'_{m-\lambda} = \alpha\left\{\begin{bmatrix}N-2\\ m-\lambda-1\end{bmatrix}\nu' - \begin{bmatrix}N-3\\ m-\lambda-2\end{bmatrix}\omega'\right\}.$$

Perciò, sostituendo e ricordando la (2) del n. 46, si ha:

$$\delta'_m = \alpha\left\{\begin{bmatrix}N-2\\ m-1\end{bmatrix}\nu' - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}N-3\\ m-2\end{bmatrix}\omega'\right\} \qquad (1)$$

$$\delta_m = \alpha\left\{\begin{bmatrix}N-1\\ m-1\end{bmatrix}\nu + \begin{bmatrix}N-2\\ m-2\end{bmatrix}(\nu'-\omega) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}N-3\\ m-3\end{bmatrix}\omega'\right\}. \qquad (2)$$

Così, i valori di δ_m e δ'_m sono espressi con elementi tutti conosciuti.

51. Se per un punto fondamentale dell'involuzione si traccia una retta arbitraria, coi metodi precedenti si può calcolare il numero di quelle intersezioni, della retta con le curve Δ_m, Δ'_m, che cadono fuori dal punto fondamentale. La moltiplicità in esso, per le curve anzidette, si ottengono allora facilmente. Eseguendo simili calcoli, per la Δ'_m si trova la moltiplicità

$$\alpha\left\{\begin{bmatrix}N-2\\ m-1\end{bmatrix}s' - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}N-3\\ m-2\end{bmatrix}u'\right\} \qquad (1)$$

e per la Δ_m l'altra:

$$\alpha\left\{\begin{bmatrix}N-1\\ m-1\end{bmatrix}s + \begin{bmatrix}N-2\\ m-2\end{bmatrix}(s'-u) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}N-3\\ m-3\end{bmatrix}u'\right\}, \qquad (2)$$

dove: s, u dinotano rispettivamente le moltiplicità di una curva qualunque del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ e della curva unita, nel punto fondamentale di cui si tratta; s', u' sono i numeri analoghi ad s, u, riferentesi alle curve coniugate di quelle ora nominate.

52. Sulla curva unita, che per comodo indicherò con Ω, prendo un punto qualunque P. Cogli N—2 punti coniugati di P, situati nella curva coniugata di Ω, si possono formare $\begin{bmatrix}N-2\\ m-1\end{bmatrix}$ sottogruppi di $m-1$ punti, per ciascuno dei quali sottogruppi passano α curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$. Si hanno così $\alpha\begin{bmatrix}N-2\\ m-1\end{bmatrix}$ curve Γ che si assumono come corrispondenti del punto P. Tutte le curve Γ, costruite in tal modo, formano una serie semplicemente infinita $(\Gamma)_1$ ed è manifesto che ognuna di esse ha origine da un solo punto P. Conviene ora calcolare l'indice di $(\Gamma)_1$.

A tal uopo considero un punto arbitrario e le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ passanti per esso, le quali danno origine ad una curva Δ_{m-1} ed alla sua coniugata Δ'_{m-1} (n. 46). Quest'ultima sega la curva Ω in H'_{m-1} punti (n. 43 e 47) dei quali χ_{m-1} giacciono anche sulla Δ_{m-1} ed a ciascuno degli altri $\varkappa'_{m-1}$ è coniugato un sottogruppo

di $m-1$ punti comuni a Δ_{m-1} ed alla curva coniugata di Ω. L'indice della serie $(\Gamma)_1$ è dunque eguale a $\varkappa'_{m-1}$ e si ha:

$$\chi_{m-1} + \varkappa'_{m-1} = \mathrm{H}'_{m-1}. \qquad (1)$$

Ciò posto, da un punto O, dello spazio, proiettando la curva Ω si ottiene un cono $O.\Omega$ dell'ordine ω. Da un altro punto O', proiettando le curve della serie $(\Gamma)_1$ si ottengono infiniti coni dell' ordine ν, formanti una serie $O'.(\Gamma)_1$. Fra le generatrici del cono $O.\Omega$ e i coni della serie $O'.(\Gamma)_1$ hanno luogo le medesime relazioni di corrispondenza che legano fra di loro i punti della curva unita e le curve della serie $(\Gamma)_1$. Ora, con procedimento analogo a quello seguìto ai n. 48 e 49 si trova qui che il luogo dei punti comuni alle generatrici del cono $O.\Omega$ ed ai loro coni corrispondenti è una curva Θ dell'ordine

$$\begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} \alpha.\omega.\nu + \varkappa'_{m-1},$$

passante con:

$$\begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} \alpha.u.s$$

rami (n. 51) per un punto fondamentale dell'involuzione. Perciò essa taglia il piano dell'involuzione medesima, fuori dai punti fondamentali, in

$$\alpha \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} (\omega\nu - \Sigma u s) + \varkappa'_{m-1}$$

punti. Dinotando con h il numero delle intersezioni, non fisse, di una curva del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ con la curva unita ([1]), l'espressione precedente diviene

$$\alpha \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} h + \varkappa'_{m-1}. \qquad (2)$$

Consideriamo un punto Q nel quale si toccano la curva unita e la sua coniugata (n. 19). I due punti comuni a tali curve, riuniti in Q, sono coniugati fra di loro ed al punto Q_1, infinitamente vicino a Q, situato nella seconda delle curve stesse. Ora, i coni della serie $O'.(\Gamma)_1$, passanti per Q_1, sono in numero di $\alpha \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix}$, da cui segue che la curva Θ ha un punto multiplo secondo il numero $\alpha \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix}$ nel punto Q_1 (o Q) e negli analoghi.

Indicando con c il numero dei contatti fra la curva unita e la sua coniugata, e sottraendo dall' espressione (2) il termine $\alpha \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} c$, si ottiene il numero

$$\alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} h - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} c \right\} + \varkappa'_{m-1}$$

di punti, del piano dell'involuzione, in ciascuno dei quali si tagliano una generatrice del cono $O.\Omega$ ed un cono corrispondente della serie $O'.(\Gamma)_1$. Tali punti, necessariamente situati nella curva unita, sono anche quelli per ognuno dei quali passa la curva corrispondente della serie $(\Gamma)_1$, epperò sono i χ_m punti comuni alle curve Δ_m

([1]) Osservisi che $h = \mathrm{H}_1$ (n. 43).

e Δ'_m (n. 43) che cadono sulla curva unita anzidetta. Si ha dunque:

$$\chi_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} h - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} c \right\} + \varkappa'_{m-1} . \qquad (3)$$

53. Le (1) e (3) del numero precedente danno:

$$\chi_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} h - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} c \right\} + H'_{m-1} - \chi_{m-1} .$$

Calcolando H'_{m-1} si trova

$$H'_{m-1} = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix} h' - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-3 \end{bmatrix} (d+c) \right\} ,$$

dove h' è il numero dei punti (non fissi) comuni alla curva unita e alla coniugata d'una curva qualunque del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ [1], e d è il numero dalle coppie di punti coniugati distinti che trovansi nella curva unita (n. 29 e 36), cosicchè

$$2(d+c) = \omega\omega' - \Sigma u u' .$$

Sostituendo si ha:

$$\chi_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix} (h'-c) - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-3 \end{bmatrix} d \right\} - \chi_{m-1} ;$$

ossia, posto:

$$\alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix} (h'-c) - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-3 \end{bmatrix} d \right\} = B_m ,$$

$$\chi_m = B_m - \chi_{m-1} .$$

Di qui si trae (n. 47):

$$\begin{aligned} \chi_{m-1} &= B_{m-1} - \chi_{m-2} \\ \chi_{m-2} &= B_{m-2} - \chi_{m-3} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \chi_2 &= B_2 - \chi_1 \\ \chi_1 &= B_1 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\chi_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^\lambda B_{m-\lambda} ,$$

eguaglianza che si riduce alla seguente [2]:

$$\chi_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-3 \\ m-1 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} (h'-c) - \begin{bmatrix} N-4 \\ m-3 \end{bmatrix} d \right\} . \qquad (1)$$

54. Ricordiamo le equazioni del n. 43:

$$\chi_m + \varkappa_m = H_m \quad , \quad \chi_m + \varkappa'_m = H'_m$$

e osserviamo che posto $e = \omega^2 - \Sigma u^2$, si trova:

$$H_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix} (h'-e) - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-3 \end{bmatrix} (d+c) \right\} ,$$

$$H'_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} h' - \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} (d+c) \right\} .$$

[1] Anche qui notisi che $h' = H'_1$ (n. 43).

[2] Poichè si ha:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} (-1)^\lambda \begin{bmatrix} \mu \\ l-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu-1 \\ l \end{bmatrix} .$$

Dopo ciò, per la (1) del numero precedente risulta:

$$\varkappa'_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-3 \\ m-1 \end{bmatrix} (h'-h) - \begin{bmatrix} N-4 \\ m-2 \end{bmatrix} d \right\} \tag{1}$$

$$\varkappa_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix} (h-e) + \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} (h+c) + \begin{bmatrix} N-3 \\ m-3 \end{bmatrix} (h'-c) - \begin{bmatrix} N-4 \\ m-4 \end{bmatrix} d \right\}. \tag{2}$$

55. Le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$, contenenti ciascuna m punti coniugati, formano una serie ∞^1. Preso un punto qualunque P, nella Δ_m, ad esso facciasi corrispondere quella curva della serie che contiene gli m punti del gruppo cui P appartiene. In allora, viceversa, ad ogni curva della serie corrispondono m' punti coniugati situati nella Δ'_m. Se una curva passa per uno de' suoi punti corrispondenti, essa contiene $m+1$ punti coniugati, epperò le curve dotate di tale proprietà coincidono $m+1$ ad $m+1$ in π_m curve Γ. Ciascuna di esse dà dunque origine ad un sottogruppo di $m+1$ punti che sono m-pli per la curva Δ_m e sono semplici per la Δ'_m. Gli $m'-1$ punti del sottogruppo complementare appartengono soltanto alla curva Δ'_m e sono $(m+1)$-pli per essa (n. 42).

Le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ passanti per un punto arbitrario formano un sistema $(\Gamma)_{m-2}$, ∞^{m-2}, il quale determina una curva Δ_{m-1} contenente infiniti sottogruppi di $m-1$ punti (n. 46). Se una curva di $(\Gamma)_{m-2}$ contiene m punti coniugati, questi giacciono nella Δ_m. da cui si vede che l'indice π_{m-1} della serie sopra considerata si deduce dal valore di π_m, ponendovi $m-1$ al posto di m.

Dopo ciò, con metodo analogo a quello seguìto ai n. 48 e 52 si trova qui facilmente

$$(m+1)\,\pi_m = (\rho'_m - \chi_m) + m'\pi_{m-1}\,,$$

dove ρ'_m è il numero dei punti (non fissi) comuni alla Δ'_m e ad una curva qualunque del sistema $(\Gamma)_{m-1}$. Di qui si trae (n. 47)

$$(m+1)\,\pi_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \frac{m'(m'+1)\,\ldots.\,(m'+\lambda-1)}{m\,(m-1)\,\ldots.\,(m-\lambda+1)}\,(\rho'_{m-\lambda} - \chi_{m-\lambda})\,.$$

Ora, essendo q il numero delle coppie di punti coniugati situati in una curva del sistema $(\Gamma)_{m-1}$, si ha (n. 50 e 54):

$$\rho'_{m-\lambda} - \chi_{m-\lambda} = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-\lambda-1 \end{bmatrix} 2q - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N-3 \\ m-\lambda-2 \end{bmatrix} (3h'-3h-2c) + \begin{bmatrix} N-4 \\ m-\lambda-3 \end{bmatrix} d \right\},$$

per cui sostituendo risulta:

$$\pi_m = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} q - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} N-3 \\ m-2 \end{bmatrix} (3h'-3h-2c) + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} N-4 \\ m-3 \end{bmatrix} d \right\}. \tag{1}$$

Tale è il numero delle curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ *contenenti ciascuna un sottogruppo di* $m+1$ *punti.*

E per quanto è detto sopra:

Le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ *contenenti ciascuna un sottogruppo di* m *punti formano una serie* ∞^1 *dell'indice*

$$\pi_{m-1} = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix} q - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} N-3 \\ m-3 \end{bmatrix} (3h'-3h-2c) + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} N-4 \\ m-4 \end{bmatrix} d \right\}. \tag{2}$$

56. Supponiamo che tutte le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ abbiano un punto comune P, non fondamentale. In allora cogli N — 1 punti coniugati di P si possono

formare $\begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ sottogruppi di $m-1$ punti, per ciascuno dei quali sottogruppi passano α curve del sistema. Segue da ciò che la moltiplicità di P, per la curva Δ_m è eguale ad $\alpha \begin{bmatrix} N-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$.

Il numero dei passaggi di Δ_m, per ogni punto coniugato di P è eguale a quello delle curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ che contengono quel punto ed altri $m-2$ de' suoi coniugati escludendo P. Tale numero è dunque $\alpha \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix}$.

La moltiplicità della curva Δ'_m in uno dei punti coniugati di P è data dal numero delle curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ che passano per $m-1$ dei punti anzidetti, escluso quello che si considera, epperò è espressa da $\alpha \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix}$ (¹).

Il numero dei punti comuni alle curve Δ_m e Δ'_m, riuniti nei punti coniugati di P è eguale a

$$\alpha^2 (N-1) \begin{bmatrix} N-2 \\ m-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N-2 \\ m-2 \end{bmatrix}.$$

57. Dal caso considerato al numero precedente si vede come nelle curve Δ_m e Δ'_m possano nascere singolarità dipendenti dall'esservi più curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ contenenti sottogruppi di m punti appartenenti ad un medesimo gruppo dell'involuzione. Si può però dimostrare che, anche prescindendo dal caso menzionato, *in generale esistono coppie di curve* Γ *composte di due curve contenenti ciascuna* m *punti di uno stesso gruppo dell' involuzione.*

Infatti, indichiamo con S ed S' due sottogruppi complementari situati nelle curve Δ_m, Δ'_m rispettivamente. Prendiamo in S' un punto P e ad esso facciamo corrispondere le $\alpha \begin{bmatrix} m \\ m-y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'-1 \\ y-1 \end{bmatrix}$ curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ passanti per $m-y$ punti di S e per altri $y-1$ punti di S', escludendo P. Tutte le curve Γ che in tal modo si possono costruire, variando S ed S', formano una serie ∞^1 il cui indice si dinoterà con $K_{y-1}^{(m-y)}$. È chiaro che ad una curve di tal serie corrispondono $m'-y+1$ punti coniugati della Δ'_m.

Se una curva Γ_1, della serie, passa per uno de' suoi punti corrispondenti, essa contiene m punti coniugati per y dei quali passano entrambe le curve Δ_m, Δ'_m. Nella Γ_1, poi coincidono y curve dotate dell'istessa proprietà.

Pertanto, siccome gli y punti sopradetti sono doppî per l'insieme delle Δ_m, Δ'_m, così gli $m-y$ punti coniugati di quelli, situati nella Γ_1, non appartenendo alla Δ'_m, sono doppî per la Δ_m (n. 37). Onde segue che per gli stessi $m-y$ punti passa una seconda curva Γ_2 contenente altri y punti coniugati dei primi. Questi y punti sono comuni alle Δ_m, Δ'_m; i rimanenti punti del gruppo appartengono soltanto alla curva Δ'_m e sono doppî per essa.

(¹) Queste deduzioni sono in pieno accordo coi risultati ottenuti ai n. 41 e 42, ove si faccia $\mu = N$, $\mu' = 1$, $k = \alpha$.

Si può ancora notare che le intersezioni delle curve Δ_m e Δ'_m assorbite per l'esistenza della coppia di curve Γ_1 e Γ_2 sono in numero di $2y$.

Quanto al numero $\sigma_y^{(m-y)}$ delle coppie di curve analoghe alla precedente esso trovasi facilmente adoperando un procedimento noto (n. 48 e 52) il quale conduce alla eguaglianza (¹):

$$2\,y.\sigma_y^{(m-y)}=\alpha\left\{\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-1\end{bmatrix}\rho'_m-\begin{bmatrix}m-1\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-1\end{bmatrix}\chi_m-\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-2\\y-2\end{bmatrix}\varkappa'_m\right\}-$$
$$-(m+1)(m-y+1)\begin{bmatrix}m\\y-1\end{bmatrix}\pi_m+(m'-y+1)K_{y-1}^{(m-y)}.$$

58. Calcoliamo $K_{y-1}^{(m-y)}$. A tal uopo, essendo M un punto arbitrario si costruiscono tutte le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ passanti per esso e per $m-2$ punti coniugati, dei quali $m-y$ situati nella curva Δ_m e $y-2$ nella Δ'_m. Si ottiene così una serie ∞^1 di curve dell'indice $K_{y-2}^{(m-y)}$. Assumendo come corrispondenti un punto P della Δ'_m e le $\alpha\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-2\end{bmatrix}$ curve della serie contenenti sottogruppi di $m-2$ punti coniugati di P, è chiaro che viceversa a ciascuna curva corrispondono $m'-y+2$ punti P. Se una delle curve medesime passa per un suo punto corrispondente, essa ne rappresenta $y-1$ dotate dell'istessa proprietà e coincidenti insieme in una delle $K_{y-1}^{(m-y)}$ curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ passanti per il punto M e contenente $m-1$ punti coniugati, dei quali $m-y$ situati in Δ_m e gli altri $y-1$ nella Δ'_m.

Dopo ciò, col noto procedimento si trova:

$$(y-1)K_{y-1}^{(m-y)}=\alpha\left\{\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-2\end{bmatrix}\rho'_m-\begin{bmatrix}m-1\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-2\end{bmatrix}\chi_m-\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-2\\y-3\end{bmatrix}\varkappa'_m\right\}+(m'-y+2)K_{y-2}^{(m-y)}.$$

Nello stesso modo si ottiene la serie di eguaglianze:

$$(y-2)K_{y-2}^{(m-y)}=\alpha\left\{\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-3\end{bmatrix}\rho'_m-\begin{bmatrix}m-1\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-3\end{bmatrix}\chi_m-\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-2\\y-4\end{bmatrix}\varkappa'_m\right\}+(m'-y+3)K_{y-3}^{(m-y)}$$

$$(y-3)K_{y-3}^{(m-y)}=\alpha\left\{\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-4\end{bmatrix}\rho'_m-\begin{bmatrix}m-1\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\y-4\end{bmatrix}\chi_m-\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-2\\y-5\end{bmatrix}\varkappa'_m\right\}+(m'-y+4)K_{y-4}^{(m-y)}$$

. . . .

$$2.K_2^{(m-y)}=\alpha\left\{\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\1\end{bmatrix}\rho'_m-\begin{bmatrix}m-1\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m'-1\\1\end{bmatrix}\chi_m-\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\varkappa'_m\right\}+(m'-1)K_1^{(m-y)}$$

$$K_1^{(m-y)}=\alpha\left\{\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}\rho'_m-\begin{bmatrix}m-1\\y\end{bmatrix}\chi_m\right\}+m'K_0^{(m-y)},$$

(¹) In questa formula, ed in quelle dei n. 58 e 59, non si tien conto del caso in cui le curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ abbiano punti fissi comuni non fondamentali (n. 56), sia perchè il tenerne conto nel problema generale, è cosa di non lieve difficoltà ed ancora perchè ciò complicherebbe soverchiamente le espressioni numeriche delle quali si tratta.

nelle quali $K_{y-\lambda}^{(m-y)}$, in generale, rappresenta il numero delle curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ passanti per λ punti arbitrarî e contenenti $m-\lambda$ punti coniugati, dei quali $m-y$ situati in Δ_m e $y-\lambda$ in Δ'_m.

59. Il calcolo di $K_0^{(m-y)}$, fondato sempre sui metodi fin qui usati, conduce all'espressione:

$$K_0^{(m-y)} = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} m-1 \\ y \end{bmatrix} \rho_m - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m-2 \\ y \end{bmatrix} \varkappa_m \right\},$$

dove ρ_m è il numero dei punti (non fissi) comuni alla curva Δ_m e ad una curva qualunque del sistema $(\Gamma)_{m-1}$.

Dopo ciò le equazioni del numero precedente forniscono:

$$K_{y-1}^{(m-y)} = \alpha \left\{ \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'-1 \\ y-2 \end{bmatrix} \rho'_m + \begin{bmatrix} m-1 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m' \\ y-1 \end{bmatrix} \rho_m - \begin{bmatrix} m-1 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'-1 \\ y-2 \end{bmatrix} \chi_m - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'-2 \\ y-3 \end{bmatrix} \varkappa'_m - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m-2 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m' \\ y-1 \end{bmatrix} \varkappa_m \right\}$$

e sostituendo questo valore nell'espressione del n. 57 si ha

$$\sigma_y^{(m-y)} = \frac{\alpha}{2} \left\{ \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \rho'_m + \begin{bmatrix} m-1 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m' \\ y \end{bmatrix} \rho_m - \begin{bmatrix} m-1 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \chi_m - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'-2 \\ y-2 \end{bmatrix} \varkappa'_m - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m-2 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m' \\ y \end{bmatrix} \varkappa_m \right\} - \frac{1}{2} (m+1) \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix} \pi_m .$$

Tale è il numero delle coppie formate da due curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$ *contenenti ciascuna m punti coniugati di uno stesso gruppo ed aventi in comune* $m-y$ *di tali punti.*

I valori minimo e massimo di y si stabiliscono osservando che $m-y$ non può superare il numero β di punti variabili comuni a due curve del sistema $(\Gamma)_{m-1}$, e che in oltre deve essere $m-y \geq 0$.

Di qui risulta

$$m - \beta \leq y \leq m .$$

In ogni caso, però, è $y \geq 1$, e ciò per la natura stessa delle operazioni geometriche eseguite al n. 57.

Devesi notare infine che le formule stabilite valgono per tutti i possibili valori di y eccetto che per $y=1$. Ma per questo caso, dinotando con T_m il numero dei punti (non fondamentali) comuni alle curve Δ_m, Δ'_m e con λ il massimo valore di y, si ha evidentemente:

$$\sigma_1^{(m-1)} = \frac{1}{2} \left\{ T_m - \chi_m - m(m+1) \pi_m \right\} - \sum_{y=2}^{y=\lambda} y \sigma_y^{(m-y)} .$$

60. Colle precedenti ricerche è stato risoluto il problema proposto al n. 45 considerandolo nella sua generalità. Pertanto i risultati ottenuti subiscono alcune modificazioni facendo ipotesi particolari sul sistema $(\Gamma)_{m-1}$. Fra le ipotesi possibili interessa, per le applicazioni successive, quella in cui si ammette che un luogo C di infiniti sottogruppi di μ punti coniugati ($\mu > m$) sia una curva o parte di curva del sistema $(\Gamma)_{m-1}$. In tal caso si arriva facilmente alle seguenti conclusioni:

I. Il luogo C si stacca $\begin{bmatrix}\mu-1\\ m-1\end{bmatrix}$ volte dalla curva Δ_m. Il luogo medesimo e la sua curva coniugata si staccano $\begin{bmatrix}\mu-1\\ m\end{bmatrix}$ volte dalla curva Δ'_m.

II. Ogni sottogruppo del luogo C, contenente due punti successivi, conta per $\begin{bmatrix}\mu-2\\ m-2\end{bmatrix}$ unità nel numero $\varkappa_m$ e per $\begin{bmatrix}\mu-2\\ m\end{bmatrix}$ unità nel numero $\varkappa'_m$ (n. 54). Ogni sottogruppo, dotato della proprietà anzidetta e situato nella curva coniugata di C, conta per $\begin{bmatrix}\mu\\ m\end{bmatrix}$ unità nel numero $\varkappa'_m$.

III. Ogni punto della curva unita, comune al luogo C e alla sua curva coniugata, conta per $\begin{bmatrix}\mu-1\\ m-1\end{bmatrix}$ unità nel numero χ_m (n. 53). Ciascuno degli altri punti (non fondamentali) comuni C ed alla curva unita, conta $\begin{bmatrix}\mu-2\\ m-1\end{bmatrix}$ volte nel numero χ_m.

IV. Per l'esistenza del luogo C, i valori di π_m, π_{m-1} e $\sigma_y^{(m-y)}$ sono differenti da quelli dati ai n. 55 e 59. Non sembrami qui opportuno il ritornare sui calcoli fatti considerando la quistione in generale. Più oltre (n. 68) è trattato un caso particolare nel quale sono risolute le difficoltà che si presentano a tale riguardo.

V. Osservo da ultimo che se C è una curva fondamentale di terza specie dell'involuzione (n. 6), le formule del n. 51 non valgono per calcolare le moltiplicità delle curve Δ_m e Δ'_m nei punti fondamentali coniugati della C.

61. Accennerò ora a qualche applicazione delle formule trovate per le curve Δ_m e Δ'_m.

a) Se si suppone $m=2$ il sistema $(\Gamma)_{m-1}$ diviene una serie ∞^1 di curve dell'indice α. In tal caso la curva Δ_2 è il luogo delle coppie di punti coniugati situati nelle curve della serie e si può anche definire come il luogo dei punti comuni (fuori dalla curva unita) alle curve Γ ed alle loro coniugate le quali formano una seconda serie dell'indice $\alpha(N-1)$.

Per $\alpha=1$ la serie $(\Gamma)_1$ diviene un fascio. In seguito (n. 65) avrò occasione di ritornare sopra questo caso senza fare ipotesi sull'ordine delle curve Γ, ma per ora mi limito a supporre che si tratti di un fascio di rette. In allora (n. 55) poichè $h=\omega$, il numero delle coppie di punti coniugati successivi situati in Δ_2 è:

$$2\omega+e\,c—.$$

Ma questo numero eguaglia la classe γ dell'inviluppo formato dalle rette contenenti ciascuna una coppia di punti coniugati successivi (n. 16), onde si trae:

$$c=\gamma+e-2\omega\,. \qquad (1)$$

Dopodichè mediante la

$$2\,(d+c)=\omega\,\omega'-\Sigma\,u.u' \qquad (2)$$

(n. 53) si ottiene anche il valore di d. Tuttociò indipendentemente dalle considerazioni dei n. 29 e 36.

La curva Δ_2 del caso attuale propriamente parlando non esiste se l'ordine della curva coniugata d'una retta qualunque è eguale a quello della curva unita. In allora il luogo Δ_2 consta delle $N-1$ linee rette congiungenti il centro del fascio con i punti

ad esso coniugati. Cioè, *una retta arbitraria non contiene coppie di punti coniugati, ma vi hanno rette che ne contengono infinite coppie e queste rette formano un inviluppo della classe* N—1.

b) Poichè tutte le curve d'ordine ν, del piano, formano un sistema lineare $\frac{1}{2}\nu(\nu+3)$ volte infinito, esiste una semplice infinità di queste curve dotate della proprietà di contenere ciascuna un sottogruppo di $\frac{1}{2}\nu(\nu+3)+1$ punti coniugati di una data involuzione [I]. Tutti i sottogruppi analoghi formano un luogo il cui ordine e le cui singolarità si possono immediatamente conoscere mediante le formule relative alla curva Δ_m, ponendovi $\alpha=1$ ed $m=\frac{1}{2}\nu(\nu+3)+1$. In particolare, *per* $\nu=2$, *nella curva* Δ_6 *si ottiene il luogo dei vertici, di tutti gli esagoni di Pascal, che sono punti coniugati nell'involuzione* [I]. *La formula* (1) *del* n. 55 *dà il numero degli ettagoni inscritti ciascuno in una conica i vertici dei quali sono punti fra loro coniugati.* Ecc. ecc.

Infine, *per* $\nu=1$, *nella curva* Δ_3 *si ottiene il luogo delle terne di punti coniugati situati nelle rette del piano. La formula* (2) *del n.* 55 *dà la classe dell'inviluppo formato da queste rette; la formula* (1) (n. 55) *dà il numero delle rette del piano contenente ciascuna una quaderna di punti coniugati; la formula* (1) *del* n. 59, *per* $y=2$ *e per* $y=3$, *dà il numero di quelle coppie formate da due rette ciascuna contenenti una terna di punti d'uno stesso gruppo, nei due casi in cui le due terne hanno e non hanno un punto comune.* Ecc. ecc.

§ 5. *Relazioni fra due o più involuzioni.*

62. *Due involuzioni razionali qualunque* [I] ed [I_1] *possono sempre venire riferite l'una all'altra per modo che i loro gruppi si corrispondano ad uno ad uno.* Infatti, basta a tal uopo stabilire una relazione proiettiva fra una rete di curve generatrice della prima [1] e una rete di curve generatrice della seconda involuzione. In allora gruppi corrispondenti, delle [I], [I_1], sono i punti base (non fissi) di due fasci corrispondenti delle reti anzidette.

Se le [I], [I_1], supposte dei gradi N. N_1, si trovano nell'accennata relazione e inoltre giacciono in un medesimo piano, essendo K il numero delle coppie di punti corrispondenti situati in una retta arbitraria, per un noto teorema di Clebsch, *esistono* $N+N_1+K$ *gruppi corrispondenti aventi un punto comune* [2].

Se le [I], [I_1] sono in un medesimo piano, ma affatto indipendenti, esse hanno un certo numero di *coppie di punti coniugati comuni.* Per trovare questo numero si proceda nel seguente modo. Preso un punto A si costruiscano i suoi N — 1 coniugati nell'involuzione [I] e di ciascuno di essi gli N_1-1 coniugati nell'involuzione [I_1]. Dal punto A si ricavano così $(N-1)(N_1-1)$ punti A_1 che si assumono come corrispondenti di A. Viceversa è chiaro che ad ogni punto A_1 corrispondono $(N-1)(N_1-1)$

(1) V. la prefaz. pag. 302.

(2) Il numero K è anche l'ordine della curva corrispondente ad una retta, riguardata come appartenente all'una o all'altra delle due figure corrispondenti.

punti A. In cosiffatta corrispondenza risulta che il numero K delle coppie di punti corrispondenti situati in una retta arbitraria è eguale a quello dei punti comuni (fuori dai fondamentali) alle curve coniugate della retta nelle $[I]$, $[I_1]$. Ora i due sistemi di punti corrispondenti hanno $2(N-1)(N_1-1)+K$ punti uniti. Fra questi è da contarsi ciascuno degli L punti (non fondamentali) comuni alle due curve unite, non che ogni punto, fondamentale per entrambe le $[I]$, $[I_1]$, tante volte quant'è il numero a delle intersezioni (non fondamentali) delle curve ad esso coniugate nelle due involuzioni. I punti uniti rimanenti distinguonsi in

$$(N-1)(N_1-1)+\frac{1}{2}\left\{K-L-\Sigma a\right\}$$

coppie che sono le richieste.

63. Siano (φ), (ψ), (γ) tre fasci di curve disposti comunque in un medesimo piano e consideriamo le involuzioni $[I_1]$, $[I_2]$, $[I_3]$, rispettivamente determinate dalle tre coppie di fasci generatori (φ), (ψ); (φ), (γ); (ψ), (γ).

Si vede subito che il luogo delle coppie di punti coniugati nella $[I_1]$, situate nelle curve del fascio (γ) è il medesimo di quello formato dalle coppie di punti coniugati nella $[I_2]$, o nella $[I_3]$, situate nelle curve del fascio (ψ), o del fascio (γ). Onde segue che

Le tre involuzioni determinate da tre fasci di curve, presi a due a due come generatori, hanno infinite coppie di punti comuni le quali formano un luogo.

L'ordine di questo luogo e le sue differenti singolarità si possono immediatamente conoscere dopo quanto è detto al n. 50 e segg. dove si supponga $\alpha=1$, $m=2$.

64. Sia dato un sistema lineare ∞^3, $(\varphi)_3$, composto di curve φ dell'ordine n [1], aventi in comune un certo numero di punti fissi (*fondamentali*), $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ Indicherò con R_k la moltiplicità di una φ qualunque nel punto R_k.

Se nel piano del sistema vi è un luogo in generale non incontrato dalle φ, esternamente ai punti fondamentali, tutte le φ passanti per un punto arbitrario di esso si spezzano nel luogo medesimo e nelle curve di una rete. Si ammetterà che esista un sistema di luoghi dotati dell'anzidetta proprietà; con ζ_i verrà designato uno qualunque di essi e z_i, ρ_{ik} indicheranno rispettivamente il suo ordine e la sua moltiplicità nel punto fondamentale R_k. In ogni fascio, del sistema $(\varphi)_3$, vi sono curve ciascuna delle quali è spezzata in una ζ_i e in una curva dell'ordine $n-z_i$, che sega la ζ_i in

$$\theta_i=\Sigma_k\rho_{ik}^2-z_i^2$$

punti variabili.

Due curve ζ_i non possono avere punti comuni fuori dai punti fondamentali.

Le reti contenute nel sistema $(\varphi)_3$ sono in numero ∞^3 e ognuna di esse determina una involuzione il cui grado N eguaglia il numero N di punti variabili comuni a due curve φ. In ciascuna di queste involuzioni le ζ_i sono curve fondamentali

[1] Qui supporrò che $(\varphi)_3$ sia un sistema lineare ordinario, tale cioè che le curve di esso passanti per un punto arbitrario, e formanti una rete, non passino di nuovo per altri punti non fissi.

di terza specie (n. 31), ma devesi notare che i relativi punti fondamentali Z_{ij} non sono fissi.

Le curve unite delle predette involuzioni sono tutte del medesimo ordine ω e passano con u_k rami per il punto fondamentale R_k. Com'è noto, esse formano un nuovo sistema lineare ∞^3.

65. Nel sistema $(\varphi)_3$ consideriamo una rete qualunque $(\varphi)_2$ ed un fascio $(\varphi)_1$, non contenuto in $(\varphi)_2$. Questa rete determina un'involuzione [I] e vi è un luogo Δ ([1]) formato dalle coppie di punti in essa coniugati e situati nelle curve del fascio $(\varphi)_1$. Per due punti coniugati presi in Δ passano le curve del sistema $(\varphi)_3$ appartenenti ad una rete e quindi la curva Δ non cambia comunque si variino la rete $(\varphi)_2$ ed il fascio $(\varphi)_1$ nel sistema anzidetto. Da ciò segue che:

Le infinite involuzioni determinate dalle reti contenute in un sistema lineare ∞^3 di curve, hanno in comune infinite coppie di punti coniugati.

L'ordine δ, della curva Δ, e la sua moltiplicità ε_k, nel punto fondamentale R_k, si ottengono dalle formule (2) dei n. 50 e 51, ponendovi $\alpha=1$, $m=2$, $\nu=n$, $s=r_k$, $\nu'=n(N-1)$, $s'=r_k(N-1)$, (n. 32),

$$\omega=3(n-1)-\Sigma z_i,\quad u=u_k=3r_k-\Sigma_i \rho_{ik}-1,$$

(n. 34) ed osservando che dal luogo delle coppie di punti coniugati nella involuzione [I], situate nelle curve del fascio $(\varphi)_1$, si stacca $N-1$ volte la curva comune a $(\varphi)_1$, e $(\varphi)_2$, non che θ_i-1 volte ogni curva ζ_i (n. 60). Perciò

$$\delta=3+(N-4)n-\Sigma(\theta_i-2)z_i$$

$$\varepsilon_k=1+(N-4)r_k-\Sigma_i(\theta_i-2)\rho_{ik}.$$

L'ordine δ' della curva Δ', coniugata di Δ, e la sua moltiplicità ε'_k nel punto fondamentale R_k, si deducono dalle (1) dei n. 50 e 51, osservando che dal luogo coniugato di quello formato dalle coppie di punti coniugati situate nelle curve del fascio $(\varphi)_1$, si stacca $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ volte la curva comune a $(\varphi)_1$ e $(\varphi)_2$, non che $\frac{1}{2}(\theta_i-1)(\theta_i-2)$ volte ogni curva ζ_i. Indicando con P e p_i, rispettivamente, i generi di una curva del sistema $(\varphi)_3$ e di una curva ζ_i, poichè la coniugata della curva unita dell'involuzione [I] è dell'ordine

$$\omega'=6+2n(N+P-4)-2\Sigma(\theta_i+p_i-1)z_i,$$

(n. 17) e passa con

$$u'=u'_k=2+2r_k(N+P-4)-2\Sigma_i(\theta_i+p_i-2)\rho_{ik}$$

rami per il punto fondamentale R_k, così si ha ([2]):

$$\delta'=\frac{1}{2}\{(N^2-5N-2P+10)n-\Sigma(\theta_i^2-5\theta_i-2p_i+4)r_k\}-3$$

$$\varepsilon'_k=\frac{1}{2}\{(N^2-5N-2P+10)r_k-\Sigma_i(\theta_i^2-5\theta_i-2p_i+6)\rho_{ik}\}-1$$

([1]) Per maggiore semplicità ammetterò l'indice $m=2$ alle lettere Δ_m, Δ'_m non che a tutti i simboli relativi alle curve già designate con quelle lettere (n. 37 e segg.).

([2]) Se vi è una curva ζ_i dotata della proprietà che i sottogruppi di θ_i punti in essa contenuti siano coniugati in tutte le involuzioni determinate dal sistema $(\varphi)_3$, essa si stacca θ_i-1 volte dal luogo Δ e $\frac{1}{2}(\theta_i-1)(\theta_i-2)$ volte dal luogo Δ'.

66. *Sopra ogni curva del fascio* $(\varphi)_1$, *esistono* $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)-P$ *coppie di punti coniugati nell'involuzione* [I] (n. 18) le quali constano delle intersezioni (non fisse) di quella φ con la curva Δ. La stessa cosa vale anche per la curva comune al fascio $(\varphi)_1$, e alla rete $(\varphi)_2$, da cui segue che tal curva (e ogni altra del fascio anzidetto) interseca la curva Δ' in

$$\left\{\frac{1}{2}(N-1)(N-2)-P\right\}(N-2)$$

punti non fissi. Si trova ancora facilmente che *sopra ogni curva* ζ_i *esistono*

$$\frac{1}{2}(\theta_i-1)(\theta_i-2)-p_i$$

coppie di punti coniugati in tutte le involuzioni determinate dal sistema $(\varphi)_3$ e che perciò la stessa ζ_i ha in comune

$$\left\{\frac{1}{2}(\theta_i-1)(\theta_i-2)-p_i\right\}(\theta_i-2)$$

punti con la curva Δ'.

Non sarà inutile di notare ancora che la curva unita della [I] è segata, fuori dai punti fondamentali, rispettivamente in

$$2(N+P-1) \quad \text{e} \quad 2(\theta_i+p_i-1)$$

punti dalla curva comune al fascio $(\varphi)_1$ e alla rete $(\varphi)_2$, e da una curva ζ_i. Ciascuno di essi trovasi infinitamente vicino ad uno dei proprî coniugati nella stessa [I].

67. La formula (1) del n. 53, tenendo presente quanto è detto al n. 60, diviene nel caso attuale:

$$\chi=2(N-3)(N+P-1)+h'-c-2(N-2)(N+P-1)-2\Sigma(\theta_i-2)(\theta_i+p_i-1)$$

(n. 66). Ora, $h'=(N-1)h=2(N-1)(N+P-1)$; calcolando c mediante la (1) del n. 61 si ha:

$$c=3\{N+6P-\Sigma(\theta_i+2p_i-2)-k-1\},$$

dove k dinota il numero dei punti fondamentali R_k. Detto ancora i il numero delle curve fondamentali ζ_i, sostituendo si trova

$$\chi=7+3k-10i+N(2N-9)+2(N-11)P-\Sigma\theta_i(2\theta_i-9)-2\Sigma(\theta_i-5)p_i.$$

Tale è il numero di quei punti della curva unita dell'involuzione [I], *nei quali s'incontrano le curve* Δ *e* Δ'.

Mediante la (2) del n. 54, applicando le osservazioni del n. 60, si trae che *il numero* $\varkappa$ *delle coppie di punti coniugati successivi, situati nella curva* Δ, *è dato dall'espressione* (¹):

$$\varkappa=2(N+4P-k-1)-2\Sigma(\theta_i+2p_i-2).$$

Questi punti sono evidentemente comuni a tutte le curve unite delle involuzioni determinate dal sistema $(\varphi)_3$.

68. *Il numero* π *delle terne di punti coniugati, situati nella curva* Δ, si calcola col metodo seguìto al n. 55, stabilendo cioè un' opportuna corrispondenza fra

(¹) Poichè (n. 16 e 54)

$$\gamma=6(P+n-1)-2\Sigma(z_i+p_i-1)-2k$$
$$e=3(N-1)+12P-4\Sigma(p_i-1)-3\Sigma\theta_i-k.$$

i punti della curva Δ' e le curve del fascio $(\varphi)_1$. Qui però bisogna notare che ciascuna delle intersezioni (non fondamentali) della curva Δ' con la curva comune al fascio $(\varphi)_1$ e alla rete $(\varphi)_2$ e con una curva ζ_i (n. 66), deve riguardarsi come un punto pel quale passa la curva corrispondente. Dopo ciò si ha:

$$\pi = \frac{1}{6}\left\{(N-1)(N-2)^2 - 2(N-2)P - \Sigma(\theta_i-1)(\theta_i-2)^2 + 2\Sigma(\theta_i-2)p_i - 2\chi\right\}.$$

Infine rimane a trovarsi il numero σ *delle coppie formate da due curve del fascio* $(\varphi)_1$ *ciascuna contenente due punti coniugati d'un medesimo gruppo dell'involuzione* [I]. A tal uopo basta osservare che le curve Δ e Δ', fuori dai punti fondamentali (n. 65), dalla curva unita (n. 67) e dalle terne di punti coniugati situate in Δ, si tagliano in un certo numero di punti distinti in coppie a due a due appartenenti ad un medesimo gruppo dell'involuzione ([1]).

I gruppi di essa nei quali si verifica la proprietà anzidetta sono in numero di σ e si ha

$$\sigma = \frac{1}{4}(\delta\delta' - \Sigma\varepsilon_k.\varepsilon'_k - \chi - 6\pi).$$

69. È noto che le curve del sistema lineare $(\varphi)_3$ (n. 64) si possono riguardare come le imagini delle sezioni piane di una superficie Φ, dell'ordine N, rappresentata univocamente, punto a punto, sul piano del sistema. La curva Δ è l'imagine della curva doppia di Φ e tal curva è dell'ordine $\frac{1}{2}(N-1)(N-2) - P$ (n. 66). Ogni terna di punti doppî, situati in Δ (n. 68), è l'imagine di un punto triplo della curva doppia. I $\varkappa$ punti comuni a tutte le curve unite delle involuzioni determinate dal sistema $(\varphi)_3$ (n. 67) sono le imagini di punti della curva doppia nei quali si toccano due falde di Φ. La sviluppabile tangente alla superficie nei punti della curva doppia, è della classe χ (n. 67). Le corde della curva doppia, passanti per un punto arbitrario dello spazio, sono in numero di σ (n. 68).

Ogni curva ζ_i è l'imagine di un punto conico, della superficie, dell'ordine θ_i ([2]), del genere p_i e della classe $2(\theta_i + p_i - 1)$ (n. 66). Per tal punto passa la curva doppia di Φ con $\frac{1}{2}(\theta_i - 1)(\theta_i - 2) - p_i$ rami. Il numero dei punti conici di Φ è i (n. 67).

Altri simboli, contenuti nelle formule precedenti, hanno un significato rispetto alla superficie Φ. Così la differenza $e - \varkappa$ (n. 67) è la classe di Φ; h e c (n. 67) dinotano rispettivamente l'ordine di un cono circoscritto a Φ e il numero delle sue generatrici cuspidali. Ecc. ecc. ([3]).

([1]) V. al n. 57 ponendo $y = m = 2$.

([2]) Se una curva ζ_i contenesse infiniti sottogruppi di θ_i punti coniugati in tutte le involuzioni determinate dal sistema $(\varphi)_3$ (n. 65) essa sarebbe l'imagine di un punto multiplo, della superficie Φ, con il cono delle rette osculatrici spezzato in θ_i piani coincidenti insieme.

([3]) Veggansi le ricerche, analoghe a queste del prof. Caporali: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* nel volume *Collectanea Mathematica*, pubblicato in memoria di Domenico Chelini (Milano, Hoepli edit.).

§ 6. *Trasformazioni delle involuzioni razionali.*

70. Un' involuzione razionale è perfettamente determinata quando è data la coppia di fasci generatori (o la rete generatrice) di curve che serve a costruirne gli infiniti gruppi. Così le involuzioni di uno stesso grado N si ottengono ricercando tutte le coppie di fasci generatori aventi la proprietà che ogni curva dell'uno seghi una curva qualunque dell'altro in N punti variabili. Per limitare il campo di tale ricerca converrà anzitutto aver presente che una data involuzione ammette infinite coppie di fasci generatori ([1]), cosicchè due involuzioni potrebbero, con opportuno cambiamento dei fasci generatori, essere ricondotte ad un medesimo modo di costruzione. Per raggiungere un tale scopo si può anche tener conto degli effetti di una trasformazione razionale (o ciò che è lo stesso, di una serie di trasformazioni quadratiche) poichè, data un' involuzione [I], in un piano, se i punti di questo si trasformano razionalmente nei punti di un altro piano, dalla figura formata da due fasci generatori della [I], si ottiene una figura formata pure da due fasci i quali determinano un' involuzione $[I_1]$. Le [I], $[I_1]$ sono del medesimo grado ed i loro gruppi si corrispondono univocamente. Esse, in generale, differiscono negli ordini delle curve dei fasci generatori e nei sistemi dei punti e delle curve fondamentali. Però non differiscono nei generi delle curve de' fasci anzidetti.

Quanto al cambiamento dei fasci generatori, che rispetto al modo di costruzione può riguardarsi come mezzo di trasformare un' involuzione, esso può farsi con un procedimento abbastanza semplice che si deduce facilmente considerando dapprima la quistione nel caso particolare in cui si tratti di un' involuzione di primo grado.

71. Per definire un' involuzione [I], di primo grado, basta costruire due fasci di curve (razionali) tali che ogni curva dell'uno seghi una curva qualunque dell'altro in un solo punto variabile.

Al solito, siano (φ) e (ψ) questi fasci, composti di curve degli ordini n ed n' rispettivamente. Si potrà supporre $n' \geq n$.

Un punto fondamentale R_1 (di seconda specie (n. 1)) comune soltanto alle curve ψ, è necessariamente semplice per le curve medesime (n. 12) ed è manifesto che la φ passante per esso, non potendo essere incontrata in punti variabili dalle ψ, è una curva fondamentale di terza specie (n. 6) ([2]).

Essendo R_2 un punto fondamentale appartenente soltanto alla base del fascio (φ), anche la ψ che passa per R_2 dovrebbe essere una curva fondamentale della terza specie, cioè una curva, o parte di curva, del fascio (φ). Ma ciò è impossibile se $n' > n$, epperò in questo caso non vi sono punti fondamentali comuni alle sole φ, vale a dire, tutti i punti base di (φ) cadono in punti base di (ψ). Se invece $n' = n$, la ψ di cui si tratta è una curva comune ai due fasci (φ), (ψ) e quindi coincide con la φ passante per R_1 ([3]).

([1]) V. la prefaz. pag. 302.

([2]) Quando, in generale, $N > 1$, la φ passante per R_1 è la curva coniugata di tal punto; nel caso attuale, questa curva coniugata non esiste, ma però la φ anzidetta, assumendo il carattere di curva fondamentale della terza specie, non dà origine a punti fondamentali di questa specie.

([3]) I fasci (φ) e (ψ), in allora, appartengono ad una medesima rete omoloidica che si potrebbe assumere come generatrice dell'involuzione (v. Cremona, *Sulla trasformazione delle figure piane*, Memorie dell'Acc. di Bologna, 1865).

Quanto ai punti fondamentali di prima specie (n. 9), essi non ammettono curva coniugata, per cui si vede che in una involuzione di primo grado non vi sono che curve fondamentali della terza specie. Si ha poi (n. 13)

$$\Sigma z_i = 2(n+n') - 3, \quad \Sigma_i \rho_{ik} = 2(r_k + r'_k) - 1 .$$

72. Rappresentiamo i punti del piano Π, dell'involuzione [I], sui punti di un iperboloide Π', facendo corrispondere ai fasci (φ) e (ψ) rispettivamente i sistemi (φ') e (ψ') delle generatrici e delle direttrici di Π' (n. 25). In allora è evidente che ad ogni fascio (ξ), il quale con (φ) può assumersi come generatore dell'involuzione, corrisponde ad un fascio (ξ') di curve (razionali) dell'iperboloide, aventi ciascuna un solo punto comune con ogni generatrice φ' e un certo numero m di punti comuni con ogni direttrice ψ'. Il fascio (ξ') si compone adunque di curve dell'ordine $m+1$; i suoi punti base, tutti semplici, sono in numero di $2m$ e possono prendersi tutti ad arbitrio, purchè due di essi non siano in una medesima generatrice [1].

Indichiamo con (η') un fascio di curve razionali, di Π', ciascuna delle quali seghi ogni generatrice in un solo punto e ogni direttrice in $m-1$ punti. Inoltre prendiamo i $2(m-1)$ punti base di (η') in punti base di (ξ') e diciamo A'_1, A'_2 i rimanenti punti base di quest'ultimo fascio. Riferendo proiettivamente il sistema delle generatrici e il fascio (η') in modo che si corrispondano le generatrici e le curve η' passanti per ciascuno dei punti A_1, A'_2, il luogo dei punti comuni alle linee corrispondenti è manifestamente una curva del fascio (ξ'). Perciò questo fascio si deduce dal sistema (φ') delle generatrici e da un fascio composto di curve η' dell'ordine m. Con una serie di costruzioni cosifatte si potrà dunque dedurre il fascio (ξ') dai sistemi (φ') e (ψ') delle generatrici e delle direttrici. Un tale risultato, trasportato al piano Π, dà il teorema:

Se alla coppia (φ), (ψ) di fasci generatori di un' involuzione del primo grado, si sostituisce l'altra (φ), (ξ), generando le curve ξ coi fasci (φ) e (ψ), riferiti proiettivamente fra di loro, quest' operazione, replicata successivamente ed in modo opportuno, fornirà tutti quanti i fasci che con (φ) possono assumersi come generatori dell' involuzione.

È importante a notarsi che mediante il procedimento contenuto nel teorema, si passa dalla coppia (φ), (ψ), all'altra (φ), (ξ) e viceversa da quest' ultima coppia alla primitiva.

73. Riprendiamo a considerare i due fasci generatori (φ) e (ψ) e la curva φ_1, del primo, che contiene il punto fondamentale R_1 (n. 71) comune alle sole ψ. La curva di (ψ), passante per un punto arbitrario di φ_1, si spezza nella stessa φ_1 e in un'altra curva ψ_1, dell'ordine $n'-n$. Escluso il caso in cui si abbia $n=n'=1$, se la ψ_1 non è essa medesima una curva fondamentale dell'involuzione, oltre la φ_1 esistono altre curve fondamentali e la somma dei loro ordini è eguale a $n+2n'-3$ (n. 71). E ancora, se la ψ_1 è una curva fondamentale, all'infuori di essa e della φ_1, vi sono altre curve fondamentali, la somma degli ordini delle quali è eguale a $2n+n'-3$. Perciò, sì nell'un caso che nell'altro, l'involuzione [I], insieme alla φ_1, ammette almeno un'altra curva fondamentale ζ, dell'ordine z, tale che essa e la φ_1 appartengono a due ψ differenti.

[1] Queste proprietà, del fascio (ξ'), si deducono facilmente facendo uso di una proiezione stereografica dell'iperboloide Π'.

Ciò posto riferiamo proiettivamente i due fasci (φ) e (ψ) per modo che la φ_1 e la ζ corrispondano a se stesse. In allora, colle intersezioni delle curve corrispondenti, si generano infinite curve dell'ordine $n''=n'-z$, formanti un fascio che in luogo del fascio (φ) può assumersi come generatore dell'involuzione [I]. E poichè $n''<n'$, così si ha il teorema:

A ciascuno dei fasci generatori di un' involuzione [I] *di primo grado, si può sempre sostituirne un altro, composto di curve d'ordine inferiore, ognuna delle quali si genera stabilendo un' opportuna relazione proiettiva tra i fasci primitivi.*

74. Il procedimento geometrico che ha condotto al teorema precedente è quello medesimo di cui si tratta nel teorema del n. 72 ed è manifesto che esso applicato successivamente, ed in modo opportuno, *conduce dalla coppia* (φ), (ψ), *di fasci generatori, a due fasci di rette. Viceversa, per quanto s' è notato* (n. 72), *con procedimento analogo da questi fasci di rette si risale alla coppia* (φ), (ψ). Farò di più osservare che i due fasci di rette in discorso possono essere dati comunque. Infatti per veder ciò basta aver presente che ogni retta del piano può sempre riguardarsi come generata da due fasci prospettivi aventi i centri in due punti arbitrarî.

Considerando ora due coppie qualisivogliano di fasci generatori dell'involuzione, col noto procedimento, dalla prima coppia potremo dedurre due fasci di rette e poscia da questi risalire alla seconda coppia. Onde:

Se alla coppia (φ), (ψ) *di fasci generatori, di una involuzione del primo grado, si sostituisce l'altra* (φ), (ζ), *generando le curve* ξ *coi fasci* (φ) *e* (ψ) *riferiti proiettivamente fra di loro, quest'operazione, replicata successivamente ed in modo opportuno, fornirà tutte le possibili coppie di fasci generatori dell'involuzione.*

75. È per altro agevole il mostrare che un tale teorema è vero qualunque sia il grado di un' involuzione [I]. A quest'uopo rappresentiamo i gruppi dell'involuzione sui punti di un iperboloide Π' nel modo noto (n. 25) e osserviamo che ad ogni coppia di fasci generatori della [I] corrisponde in Π' una coppia di fasci di curve (razionali) avente la proprietà che una curva qualunque dell'uno sega in un solo punto variabile ogni curva dell'altro. Ma per la costruzione di questi ultimi fasci vale manifestamente il teorema sopra enunciato, epperò esso vale ancora per la costruzione di tutte le coppie di fasci generatori [1] dell'involuzione [I].

Il teorema così generalizzato insegna adunque un metodo per effettuare il cambiamento dei fasci generatori dell'involuzione medesima.

76. Al n. 70 ho fatto cenno dei risultati che si ottengono applicando una trasformazione razionale ad una data involuzione. Quanto al cambiamento dei fasci generatori osservo ancora che esso, in generale, fornisce coppie di fasci composti di curve differenti sì negli ordini che nei generi dalle curve dei fasci primitivi. Ora, tanto la trasformazione razionale quanto il cambiamento dei fasci generatori si possono effettuare nello scopo di dedurre, da una involuzione data, un'altra involuzione costruita nel modo più semplice possibile. La risoluzione di un tale problema condurrebbe allora a stabilire delle *costruzioni tipiche* dalle quali si potrebbero dedurre tutte le involuzioni razionali del medesimo grado. Come già dissi più sopra (V. la Pref.) il problema stesso è stato risoluto per le involuzioni del secondo grado.

[1]) E quindi anche di tutte le reti generatrici.

La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario [1].

Memoria del prof. G. VERONESE

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

Nella mia Memoria *Behandlung der proj. Verhältnisse der Räume von verschiedenen dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* [2], ho notato che tutte le superficie a due dimensioni rappresentabili punto a punto in un piano (omaloidi, unicursali) mediante curve d'ordine n o minore di n, si deducono per projezione univoca dalla superficie normale omaloide $F_2{}^{n^2}$ a due dimensioni d'ordine n^2 dello spazio a $n\frac{(n+3)}{2}$ dimensioni per mezzo di spazî projettanti duali a quelli in cui si vuol projettare; per es. mediante spazî a $n\frac{(n+3)}{2}-4$ dimensioni se si projetta nel nostro spazio. Di questa superficie ho già date alcune proprietà principali in un'altra Memoria presentata a codesta illustre Accademia non ancora pubblicata; intanto però pubblico qui i risultati da me ottenuti per la più semplice di queste superficie, cioè per la $F_2{}^4$ del 4° ordine dello spazio a cinque dimensioni.

Questa superficie viene tagliata in generale da uno spazio qualunque a quattro dimensioni in una curva normale del 4° ordine [3], da uno spazio a tre dimensioni in quattro punti e da un piano in nessun punto. Essa possiede però un sistema doppiamente infinito di *piani secanti di* 1ª *specie* che la intersecano in una conica, i quali costituiscono una superficie del 3° ordine e a 4 dimensioni $M^3{}_4$. Ha invece un sistema sei volte infinito di *piani secanti di* 2ª *specie*, che la incontrano soltanto in tre punti. Essa possiede inoltre un sistema doppiamente infinito di piani tangenti, che s'incontrano due a due nei punti della superficie $M_4{}^3$ e costituiscono la superficie di 3ª classe reciproca di questa, nei cui spazî a quattro dimensioni sono situati due a due i piani secanti di 1ª specie

[1] Come altrove chiamo spazî i soli spazî lineari, tranne che il punto, la retta e il piano a cui conservo le loro denominazioni comuni. Gli altri spazî non lineari sono per me curve, coni, superficie a due o più dimensioni, oppure sistemi di rette, di piani, di spazî contenuti nello spazio a n dimensioni.

[2] Math. Annalen, vol. XIX. Nota alla pag. 221.

[3] A. ib. pag. 222.

Gli spazî a quattro dimensioni che toccano la F_2^4 lungo una conica (spazî tangenti doppî) costituiscono la superficie $\mathbf{F}_2^4$ di 4^a classe e a due dimensioni reciproca della F_2^4. La F_2^4 (come la $F_2^{n^2}$) non ha alcuna singolarità speciale, o in altre parole tutti i suoi punti hanno le stesse proprietà. Essa si lascia generare facilmente mediante tre forme projettive fondamentali particolari di 2^a specie, i cui assi sono tre dei suoi piani secanti di 1^a specie. Gli spazî corrispondenti a quattro dimensioni di queste tre forme s'incontrano nei piani secanti di 1^a specie della F_2^4, cioè generano la superficie M_4^3, mentre gli spazî corrispondenti a tre dimensioni s'incontrano nei punti della F_2^4.

La rappresentazione piana della F_2^4 si ottiene in due modi diversi, mediante una projezione univoca fatta da un piano qualunque di 1^a o di 2^a specie. Questo doppio modo di proiezione mi conduce a dedurre dalla F_2^4 per successive projezioni e sezioni univoche due piani qualunque fra loro in corrispondenza Cremoniana e per conseguenza anche le proprietà principali delle trasformazioni piane Cremoniane. Faccio analoghe considerazioni sulle trasformazioni razionali dello spazio a tre dimensioni, che svolgerò meglio alla prossima pubblicazione dell'anzidetta mia Memoria sulla $F_2^{n^2}$.

Dalla F_2^4 si ottengono per projezione da una retta S_1 sopra lo spazio ordinario tutte le superficie rappresentabili nel nostro spazio mediante un sistema triplamente infinito di curve del 2° ordine, e perciò anche la superficie di Steiner, che è stata principalmente studiata da Weierstrass, Kummer, Schröter, Cremona, Cayley, Clebsch, Reye e Sturm [1].

Segando la F_2^4 con lo spazio ordinario si ottengono le superficie reciproche.

Il metodo qui seguito è principalmente sintetico e *intuitivo*, come nelle altre mie Memorie sulla geometria a n dimensioni. Dico intuitivo perchè per me il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a n dimensioni sono elementi di *natura nota*, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario; e quindi i corpi a più di tre dimensioni generati con questi elementi sono essi stessi parzialmente intuitivi, perocchè vengono rappresentati nella nostra mente non già per merzo di equazioni, ma mediante figure geometriche [2].

(1) Weierstrass e Kummer, Monatsberich. der Berl. Ak. 1863. — Schröter, ib. e Giorn. di Crelle, vol. 64. — Cremona, ib. e Rendiconti dell'Ist. Lomb. 1867. — Cayley, Giorn. di Crelle, vol. 67. — Clebsch, id. — Reye, *Geometrie der Lage*, II Abth. — Sturm, Math. Annalen, vol. III.

(2) Ritengo opportuno, se non necessario, di chiarire bene in questa occasione il concetto dello spazio a n dimensioni, che sta a fondamento delle mie ricerche, onde non essere frainteso.

In un corso di lezioni elementari sui fondamenti della geometria a n dimensioni tenute in quest'anno nella R. Università di Padova ho stabiliti gli assiomi del segmento rettilineo, e costruita la retta, ho dato l'assioma delle parallele nel senso euclideo. Ammessa come ipotesi fondamentale che fuori del segmento rettilineo e degli enti costruiti per mezzo di esso vi siano sempre dei punti, o in altre parole ammesso che non ci sia alcun limite nel numero delle dimensioni degli enti costruibili col segmento rettilineo, ho fatto vedere come si costruisce con esso il piano, lo spazio a tre e a un numero qualsiasi di dimensioni, dimostrando per tutti e in modo analogo le loro proprietà fondamentali. La geometria descrittiva (A. *Sulla geom. descrittiva a quattro dimensioni*. Atti del r. Istituto veneto, apr. 1882) serve poi per costruire i modelli (projezioni) delle figure dello spazio a quattro e a n dimensioni nel nostro spazio, e per conseguenza anche le projezioni in un piano, foglio del disegno. Non si può dunque dubitare che le figure dedotte per projezione o per sezione da quelle dello

§ 1. *Proprietà dedotte dalla rappresentazione piana.*

1. Ricordo qui i seguenti teoremi: Quando uno spazio S_m ha $p+1$ punti comuni con uno spazio S_p $(m>p)$, lo contiene per intero.

Due spazî S_m e S_m' nello spazio a n dimensioni s'incontrano in generale in uno spazio S_a, ove $a = m+m'-n$. E se s'incontrano invece in uno spazio S_{a+d}, cioè se hanno $a+d+1$ punti indipendenti comuni, tali cioè da non essere situati in uno spazio a meno di $a+d$ dimensioni, i due spazî S_m, S_m' sono contenuti in uno spazio a $n-d$ dimensioni.

spazio a n dimensioni non esistano. Si vede adunque che il mio punto di partenza non è soltanto sintetico ma altresì rappresentativo senza alcun substrato analitico, ove l'elemento generatore non è già un elemento di natura qualsiasi, ma il punto tale quale ce lo immaginiamo nel nostro spazio. Ed è per questo che in tali ricerche possiamo aiutarci di continuo con figure tracciate sulla carta per rappresentarci punti, rette, piani, curve e superficie dello spazio a n dimensioni, le quali sono in qualche modo la prospettiva delle figure corrispondenti in questo spazio. Ecco anche la ragione per cui non posso adottare la parola piano adoperata da altri per designare uno spazio lineare a n dimensioni, perchè per me il piano è sempre lo stesso, si nello spazio ordinario come in un altro spazio qualunque. Ecco anche perchè non posso adottare la definizione puramente analitica accettata comunemente di un tale spazio, come cioè un continuo dove un elemento (di natura qualsiasi) è determinato da n quantità; imperocchè se è vero che questa definizione abbraccia tutte le interpretazioni geometriche, non è men vero che abbracciandole tutte non ne determina alcuna, e non è quindi rappresentativa. Non sono più dunque i risultati dell'analisi che rivesto del linguaggio sintetico, ma sono le costruzioni geometriche da cui parto, a cui applico poi il metodo analitico, quando lo credo opportuno, precisamente come avviene nella geometria analitica ordinaria.

Il principio poi di projezione e sezione, che è per sè stesso un principio eminentemente sintetico e intuitivo, applicato in tutta la sua generalità e sistematicamente allo studio della geometria projettiva a n dimensioni (A. l. c.) non è soltanto interessante per sè stesso, ma specialmente in quanto esso conduce a quest'altro principio fondamentale, che per quanto mi consta non fu mai applicato da alcuno, nemmeno in qualche suo caso particolare, e cioè:

Tutte le configurazioni di $n+1$ punti distinti, tutte le curve o superficie a 2, 3 ecc. $m-1$ dimensioni di uno spazio S_m (e perciò anche del nostro spazio) trasformabili razionalmente le une nelle altre, si deducono per projezione o sezione univoca da una piramide fondamentale di $n+1$ punti, da una curva o superficie normale a 2, 3 ecc m — 1 dimensioni dello spazio a n dimensioni.

L'importanza di questo principio, svolto nei miei lavori pubblicati e da pubblicarsi, risiede nel fatto che un ente normale è del tutto generale senza specialità rispetto ai suoi punti, e costruito e studiato che sia, non si ha che a fare delle semplici sezioni e projezioni univoche per ottenere tutti gli enti della medesima classe negli spazi inferiori, il cui studio diretto, lo si noti bene, è in generale più complicato di quello dell'ente normale corrispondente. Osservo anche che il principio di projezione o sezione si applica con molta utilità a quegli enti, che pure non essendo normali si lasciano costruire facilmente, come per es., tutte quelle superficie a due dimensioni o curve, che vengono generate mediante forme fondamentali collineari, molte tra le quali non sono rappresentabili punto a punto in un piano. In questo principio trova pieno svolgimento l'altro principio matematico col quale da semplici proprietà particolari si passa a semplici proprietà generali, per dedurre poi da queste proprietà particolari più complicate.

Possiamo dire che: tutte le proprietà projettive di uno o più enti di un dato spazio, si ottengono sempre mediante o sole projezioni, o sole sezioni, o mediante le une e le altre combinate insieme.

Inoltre si ha che la somma delle dimensioni di due spazî duali in S_n è uguale a $n-1$.

2. Come dalla costruzione del piano mediante una retta e un punto fuori di essa, di uno spazio a tre dimensioni S_3 mediante un piano e un punto fuori di esso, si dimostra che il piano contiene ∞^2 punti S_0 e ∞^2 rette S_1; che lo spazio S_3 contiene ∞^3 punti S_0, ∞^4 rette S_1, ∞^3 piani S_2, così dalle analoghe costruzioni per gli spazî S_4 e S_5 risulta che:

Lo spazio S_4 contiene $\infty^4 S_0$, $\infty^6 S_1$, $\infty^6 S_2$, $\infty^4 S_3$.

Lo spazio S_5 contiene $\infty^5 S_0$, $\infty^8 S_1$, $\infty^9 S_2$, $\infty^8 S_3$, $\infty^5 S_4$.

E in generale che: lo spazio S_n contiene $\infty^{(n-m)\,(m+1)}$ spazî S_m $(m<n)$.

Il numero degli spazî $m+1$, $m+2$, e a $n-1$ dimensioni che passano per uno spazio S_m si ottengono congiungendo con esso tutti i punti, le rette e gli spazî a $n-m-2$ dimensioni di uno spazio duale $Sn-m-1$.

Dò qui anche i due seguenti teoremi, dei quali ho fatto un uso continuo nelle mie Memorie precedenti sulla geometria a n dimensioni, senza dare però mai di essi un enunciato speciale, e cioè:

Quando uno spazio S_m ha p punti comuni con una configurazione di q punti, con una curva o con una superficie a 2, 3, ecc. m dimensioni dello spazio S_n $(n>m)$ e di q^{mo} ordine $(c>p)$, e si projetta da S_m questi enti in uno spazio duale S_{n-m-1}, non avente con S_m alcun punto comune (come avviene in generale), le projezioni sono configurazioni di $q-p$ punti, curve o superficie a 2, 3 ... m dimensioni dell'ordine $q-p$.

Se lo spazio S_m ha con una superficie F_2^s a due dimensioni e d'ordine s una curva comune C^r $(r<s)$, uno spazio S_{n-1} passante per S_m taglia la F_2^s in un'altra curva C^{s-r}. Se p è il numero dei punti d'incontro della C^{s-r} colla C^r, qualunque sia lo spazio S_{n-1}, la projezione della superficie nello spazio S_{n-m-1} è una superficie a due dimensioni d'ordine $n-r-p$.

Analogamente per le superficie a 3 ecc. a m dimensioni. Il numero p dipende evidentemente dalla natura della F_2^s stessa.

3. Nello spazio a cinque dimensioni S_5 abbiamo come elementi il punto S_0, la retta S_1, il piano S_2, lo spazio S_3 e lo spazio S_4.

Due, tre, quattro e cinque spazî S_4 s'incontrano rispettivamente in uno spazio S_3, in un piano S_2, in una retta S_1 e in un punto S_0.

Uno spazio S_4 incontra una retta S_1, un piano S_2, uno spazio S_3 rispettivamente in un punto, in una retta e in un piano.

Due spazi S_3 s'incontrano in una retta, e se s'incontrano in un piano sono situati in uno spazio S_4.

Uno spazio S_3 e un piano S_2 s'incontrano in un punto e se s'incontrano in una retta sono situati in uno spazio S_4.

Uno spazio S_3 e una retta S_1 non s'incontrano, se s'incontrano in un punto sono situati in uno spazio S_4.

Due piani S_2 non s'incontrano, se s'incontrano in un punto sono situati in uno spazio S_4, se s'incontrano in una retta giacciono in uno spazio S_3.

Un piano S_2 e una retta S_1 non s'incontrano, sono sempre situati in uno spazio S_4, se s'incontrano giacciono in uno spazio S_3.

Due rette sono situate sempre in uno spazio S_3, se s'incontrano appartengono ad un piano.

4. Sia dato ora un piano Σ_2, e alle curve di 2° ordine di esso facciamo corrispondere gli spazî S_4 dello spazio a 5 dimensioni S_5. È chiaro che agli spazî S_3, S_2, S_1, S_0 corrispondono i sistemi di coniche una, due, tre, quattro volte infiniti. Tutte le coniche passanti per un punto A_0' del piano Σ_2 formano un sistema quattro volte infinito, che vien determinato cioè da cinque coniche indipendenti. A questo sistema corrisponde un sistema quadruplicemente infinito di spazî S_4, che viene determinato da cinque di essi, i quali s'incontrano in un punto A_0 comune a tutti gli spazî S_4 del sistema. Ai punti del piano Σ_2 corrispondono dunque ∞^2 punti dello spazio S_5, che costituiscono una superficie del 4° ordine a 2 dimensioni F_2^4. Infatti uno spazio S_3 incontra la F_2^4 in quattro punti, che corrispondono ai punti fondamentali di un fascio di coniche del piano Σ_2, i quali possono essere tutti reali o immaginari, due reali e due immaginari, tutti in parte coincidenti. Chiamo la F_2^4 la superficie omaloide normale a 2 dimensioni dello spazio S_5. Ad una curva di 2° ordine di Σ_2 corrisponde sulla F_2^4 una *curva del* 4° *ordine* C^4 razionale, che è una *curva normale* contenuta nello spazio S_4 corrispondente a quella conica [1]. Due rette qualunque in Σ_2 costituiscono una curva di 2° ordine con un punto doppio A_0': a questa conica corrisponde in F_2^4 una C^4 con un punto doppio A_0, cioè una C^4 che si scompone in due coniche incontrantisi in un punto A_0. Lo spazio S_4 che le contiene passa evidentemente per le tangenti di esse nel punto A_0, che sono anche tangenti alla F_2^4, e sono quindi situate nel piano tangente in A_0 alla F_2^4, perchè tutte le tangenti in un punto di una superficie di 2 dimensioni in uno spazio qualsivoglia sono in generale situate in un piano. Lo spazio S_4 passa dunque pel piano tangente alla superficie nel punto A_0; lo chiamo *spazio tangente* della F_2^4 nel punto A_0 e lo indico col simbolo T_4 [2]. Dunque: La F_2^4 possiede un sistema doppiamente infinito di coniche K. Per due punti di essa passa una sola conica, e per un punto ne passano ∞^1. Le tangenti alle coniche passanti per un punto sono situate nel piano tangente T_2 in questo punto alla F_2^4.

Due coniche K qualsivogliano s'incontrano in un punto A_0, e sono situate in uno spazio T_4 tangente in A_0 alla F_2^4.

Le coniche K sono situate in altrettanti piani, che chiamo piani secanti di 1ª specie S_2. Due tali piani s'incontrano in un punto della F_2^4, e sono situati in uno spazio tangente T_4. Non possono incontrarsi in una retta, o in altre parole, non possono essere situati in uno spazio S_3, perchè le due coniche K situate in essi dovrebbero aver due punti

(1) A. l. c. p. 207, e 219.

(2) In generale chiamo spazio tangente di una superficie a due dimensioni F_2^m in S_n uno spazio S_{n-1} passante per un piano tangente. Questo spazio incontra la F_2^m in una curva C^{m-1} con un punto doppio nel punto di contatto.

comuni, oppure perchè la loro retta d' intersezione dovrebbe avere tre punti comuni con la F_2^4, ciò che non è possibile. Un piano di S_5 non ha in generale alcun punto comune colla F_2^4, ma ne può avere uno, due, o al più tre, senza essere però un piano secante di 1ª specie. Nel caso che abbia tre punti comuni lo chiamo piano secante di 2ª specie M_2.

La F_2^4 contiene ∞^5 curve normali razionali C^4 del 4° ordine. Una conica K e una curva C^4 qualunque s'incontrano in due punti. Due C^4 s'incontrano in quattro punti. Per cinque punti qualsiano di F_2^4 passa una sola C^4.

Tutte le C^4 che passano per quattro punti della F_2^4 dirò che formano un *fascio*. Si ha:

Per un punto A_0 di F_2^4 passano due coniche K che toccano una C^4 data.

Le curve C^4 di un fascio incontrano una conica K in due punti mobili, che formano un'involuzione. Ci sono due curve del fascio che la toccano nei due punti doppi dell'involuzione.

Alle coniche di una schiera in Σ_2 corrispondono le C^4 di *una schiera* sulla F_2^4, e si ha:

Per un punto A_0 di F_2^4 passano due C^4 che toccano quattro coniche date K. Per il punto A_0 passano due coniche K che toccano una curva C^4 della schiera, le tangenti a queste coniche K in A_0 formano un'involuzione i cui raggi doppi sono le tangenti alle due prime curve C^4.

Il piano tangente in un punto A_0 e un piano secante di 1ª specie passante per A_0 s'incontrano in una retta tangente in A_0 alla conica K del piano secante, vale a dire sono situati in uno spazió S_3, quindi:

Per un piano tangente T_2 e per un piano secante S_2 passante pel punto di contatto passano ∞^1 spazî tangenti T_4.

5. Una retta del piano rappresentativo Σ_2 può essere considerata come una curva del 2° ordine, e quindi corrisponde ad essa uno spazio speciale che ha in comune con la F_2^4 la sola conica K corrispondente a quella retta, dunque si ha:

Fra gli infiniti spazî T_4 passanti per un piano secante S_2 ce n'è un solo che taglia la F_2^4 in due coniche coincidenti. Questo spazio lo indico col simbolo U_4 e lo chiamo spazio *tangente doppio* della F_2^4 lungo la conica K in esso contenuta. Essendo U_4 uno spazio T_4 speciale si ha:

Uno spazio U_4 contiene tutti i piani tangenti alla F_2^4 nei punti della sua conica K di contatto. Gli spazî U_4 corrispondono alle rette del piano Σ_2, e per conseguenza:

Gli ∞^2 spazî U_4 tangenti doppi della F_2^4 costituiscono la superficie reciproca F_2^4 di 4ª classe a due dimensioni, tale cioè che per un punto S_0 dello spazio S_5 passano ∞^1 spazî U_4 che formano un cono — S_0 a 2 dimensioni della 4ª classe, che indico con γ^4 (¹). Così si vede che per una retta qualunque S_1 dello spazio S_5 passano quattro spazî U_4 tangenti doppi della F_2^4, che possono

(¹) Sui caratteri di una curva e per conseguenza dei coni a 2 dimensioni aventi per vertice un punto, o per asse una retta, un piano ecc. in S_n, vedere la mia citata Memoria p. 167 e pag. 195 e seg.

essere tutti reali o immaginari, due reali e due immaginari, tutti o in parte coincidenti.

Due spazî qualunque tangenti U_4 passano per un piano tangente, perchè le due coniche K di essi s'incontrano in un punto A_0, e il piano tangente in A_0 è situato evidentemente nei due spazî.

Due piani tangenti individuano un solo spazio U_4, perchè pei loro due punti di contatto passa una sola conica K, la conica di contatto di U_4.

Mentre due punti di F_2^4 determinano un piano secante, due spazî U_4 determinano un suo piano tangente.

Vediamo dunque che c'è perfetta reciprocità fra i punti di F_2^4 e i suoi spazî doppi U_4, fra i suoi piani secanti S_2 e i suoi piani tangenti T_2.

Siccome due piani secanti S_2 non possono incontrarsi in una retta, e sono situati in uno spazio T_4 passante pel piano tangente T_2 nel punto d'incontro dei due piani S_2, si ha:

Due piani tangenti s'incontrano in un punto, nel punto d'incontro delle due tangenti alla conica K, che passa pei loro due punti di contatto, in questi punti. Non possono incontrarsi in una retta S_1, o ciò che è lo stesso, non possono giacere in uno spazio S_3.

6. Questa reciprocità fra la F_2^4 e la $\mathfrak{F}_2^4$, viene determinata anche dalla dualità tra i punti e le rette, le curve del 2° ordine e le curve di 2ª classe del piano rappresentativo Σ_2, e quindi si ha:

Tutti gli spazî U_4 passanti per un punto A_0 di F_2^4 (che passano pel piano tangente in A_0 e rispettivamente per tutte le coniche K passanti per A_0) costituiscono un cono X di 2ª classe a 2 dimensioni, avente per asse il piano tangente in A_0.

Rispetto alla $\mathfrak{F}_2^4$ i piani tangenti T_2 di F_2^4 li chiamerò *piani projettanti di* 1ª *specie*.

Per un piano qualunque non passa alcun spazio U_4 di $\mathfrak{F}_2^4$, ma ne possono passare uno, due o tre senza che esso sia un piano projettante di 1ª specie. In questo ultimo caso lo chiamerò *piano projettante di* 2ª *specie della* $\mathfrak{F}_2^4$.

Tutti i coni γ^4 i cui vertici stanno sopra una retta S_1 hanno quattro spazî U_4 comuni. Dirò che formano una *schiera*.

Uno spazio U_4 è comune a due coni X, aventi rispettivamente un altro spazio U_4 in comune con un dato cono γ^4.

I coni γ^4 di una schiera hanno rispettivamente due spazî U_4 tangenti comuni con un cono X, i quali formano un'involuzione. Ci sono due coni γ^4 pei quali i due spazî coincidono, negli spazî doppi dell'involuzione.

7. Una conica in Σ_2 può essere considerata come curva di 2° ordine e come curva di 2ª classe; nel primo caso le corrisponde una C^4 normale di F_2^4 situata in uno spazio S_4, e nel secondo caso le corrisponde un cono di 4ª classe γ^4 di $\mathfrak{F}_2^4$, avente per vertice un punto S_0 dello spazio S_5. Alle tangenti alla conica in Σ_2 corrispondono le coniche K di F_2^4, che toccano la C^4, e alle stesse rette nella rappresentazione duale corrispondono gli spazî U_4 tangenti la F_2^4 lungo quelle coniche, i quali formano il cono γ^4. Dunque:

Tutti gli spazî U_4, che toccano la F_2^4 lungo le coniche K tangenti ad una curva normale C^4 di uno spazio S_4 qualunque, passano per un punto S_0 e costituiscono un cono γ^4. E per dualità:

Tutti i punti, vertici dei coni X di 2ª classe della F_2^4 aventi due a due uno spazio S_3 comune (nel quale s'incontrano due spazî infinitamente vicini del cono) col cono di 4ª classe di un punto S_0 qualunque sono situati in una curva C^4 di uno spazio S_4. Diremo in tal caso che il cono γ^4 tocca la F_2^4 lungo la curva C^4 corrispondente.

8. Si vede pure che mentre la tangente ad una curva C^4, che è l'intersezione di un piano tangente e di un piano secante, è situata nello spazio S_4 della curva, lo spazio S_3 ove s'incontrano due spazî U_4 infinitamente vicini di un cono γ^4, il quale spazio congiunge un piano tangente e un piano secante (cioè il piano secante di uno degli U_4 e il piano tangente comune con lo spazio infinitamente vicino), passa pel vertice del cono S_0 del cono γ^4, o in altre parole:

Se un piano tangente e un piano secante s'incontrano in una retta S_1 tangente della F_2^4, questa è situata in tutti gli spazî S_4 delle C^4 a cui quella retta è tangente. Essi sono situati inoltre in uno spazio S_3 che passa per tutti i vertici S_0 dei coni γ^4 pei quali S_3 è lo spazio d'intersezione di due dei loro spazî U_4 infinitamente vicini.

9. Ad un punto A_0' di Σ_2 riguardato come curva di 2ª classe corrispondono tutti gli spazî U_4 tangenti lungo le coniche K passanti pel punto corrispondente A_0 della F_2^4. Il passaggio però da questa rappresentazione alla duale è in questo caso indeterminato, poichè due rette qualunque passanti per A'_0 si possono considerare come la curva del 2° ordine determinata da quel punto, e quindi abbiamo.

Nella corrispondenza anzidetta tra le curve C^4 e i coni γ^4 ad un punto della superficie F_2^4 corrispondono tutti gli spazî T_4 e gli spazî U_4 del suo cono X.

Ad uno spazio U_4 corrispondono tutte le coppie di punti, e i soli punti della sua conica di contatto.

10. Una retta viene toccata da due coniche di un fascio in Σ_2, dunque:

Uno spazio U_4 è comune a due coni γ^4 che toccano la F_2^4 lungo le C^4 di un fascio.

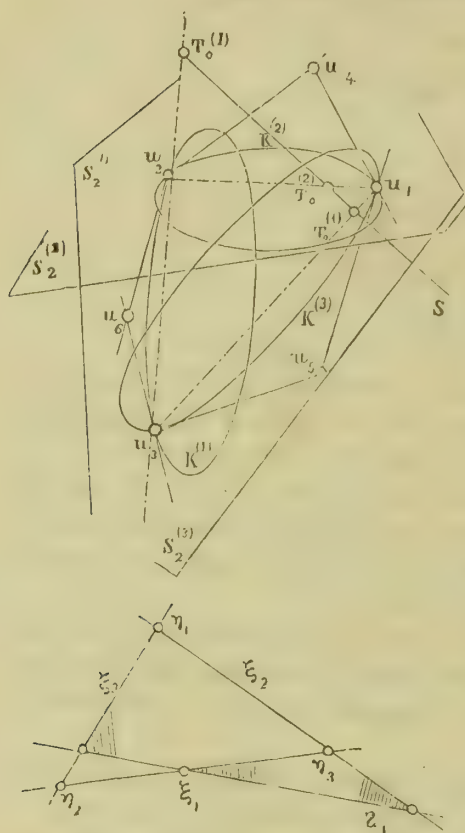
Lo spazio U_4 è comune a due coni X variabili che toccano un cono γ^4 qualunque di una C^4 del fascio. Gli spazî S_3 determinati dai piani tangenti, assi dei due coni X contenuti in U_4 e dal piano secante di U_4 formano una involuzione, i cui spazî doppi sono dati dai due piani tangenti determinati in U_4 dai due coni γ^4. I punti di contatto di questi piani tangenti, che giacciono nella conica di contatto K di U_4, formano essi pure un'involuzione.

§. 2. *Proprietà dedotte dalla costruzione.*

11. Siano ora date tre rette nel piano rappresentativo Σ_2, che per brevità indico con ξ_1, ξ_2, ξ_3, e i punti d'incontro di esse con η_1, η_2, η_3. Ad esse corrispondono tre piani secanti di 1ª specie $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ i quali contengono le

tre coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$. Queste tre coniche s' incontrano in tre punti che indico con u_1, u_2, u_3 e che corrispondono ai tre punti η_1, η_2, η_3. Alle rette ξ_1, ξ_2, ξ_3 corrispondono tre spazî U_4 che toccano la $F_2{}^4$ lungo le tre coniche K, e che indico con x_1, x_2, x_3. Di più designo con x_4, x_5, x_6 gli spazî T_4, nei quali sono contenuti due a due i tre piani secanti S_2, e cioè:

$$x_6 \equiv S_2{}^{(2)}\ S_2{}^{(3)},\quad x_4 \equiv S_2{}^{(1)}\ S_2{}^{(3)},\quad x_5 \equiv S_2{}^{(1)}\ S_2{}^{(2)}.$$

Fig. 1.

Una retta qualunque S_1 in Σ_2 forma tre coppie di rette con ξ_1, ξ_2, ξ_3 e quindi il piano corrispondente S_2 è situato in tre spazî T_4 coi tre piani $S_2{}^{(1)}$, $S_2{}^{(2)}$, $S_2{}^{(3)}$. Dato uno di questi spazî, per es. quello passante per $S_2{}^{(1)}$; il piano S_2 è fissato, e quindi anche gli altri due spazî corrispondenti passanti per $S_2{}^{(2)}$ e $S_2{}^{(3)}$. Si ha dunque:

Gli spazî tangenti T_4 che uniscono tre piani $S_2{}^{(1)}$, $S_2{}^{(2)}$, $S_2{}^{(3)}$ secanti di 1ª specie di $F_2{}^4$ con gli altri piani della medesima specie costituiscono tre forme fondamentali projettive di 2ª specie (¹).

Ora tre forme fondamentali projettive di 2ª specie intorno a tre piani S_2 in S_5 tagliano un piano qualunque in tre forme fondamentali di 2ª specie, nelle quali i punti d' incontro di tre rette corrispondenti costituiscono una curva del 3° ordine, quindi si ha:

I piani secanti di 1ª specie della $F_2{}^4$ costituiscono una superficie $M^3{}_4$ del 3° ordine a quattro dimensioni.

Abbiamo visto al n. 4 che il punto d' incontro di due piani tangenti giace nel piano secante della conica K determinata dai loro punti di contatto, quindi abbiamo:

I punti d' incontro dei piani tangenti sono situati sulla superficie $M_4{}^3$. Per ogni punto di questa passano due piani tangenti della $F_2{}^4$.

Nel caso generale tre spazî S_3 corrispondenti qualunque non s' incontrano in un punto. Infatti se si considerano tre spazî corrispondenti $S_4{}^{(1)}$, $S_4{}^{(2)}$, $S_4{}^{(3)}$ nelle tre forme S_2, gli spazî S_3 corrispondenti situati in essi tagliano il piano secante comune in tre fasci, aventi per vertici i punti d' incontro coi tre piani S_2, i quali fasci non generano una conica ma tre punti.

Nel nostro caso invece siccome per un punto A_0' del piano Σ_2 passano le

(¹) A. l. c. p. 179, e p. 215 e seg.

infinite rette di un fascio, vuol dire che gli spazî corrispondenti dei tre fasci corrispondenti nelle forme S_2 passano per un punto A_0, o in altre parole che tre spazî corrispondenti S_3 s'incontrano in un punto della F_2^4, e quindi gli spazî S_3 generano in un piano secante S_2 qualunque la sua conica K. Dunque:

Gli spazî S_3 corrispondenti delle tre forme collineari $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ si incontrano nei punti della F_2^4.

12. Bastano tre terne di spazî S_4 qualunque corrispondenti per determinare le tre forme collineari. Per la forma $S_2^{(1)}$ consideriamo gli spazî.

$$x_1\,,\ x_4\,,\ x_5$$

A questi corrispondono in $S_2^{(2)}$, $S^{(3)}$, gli spazî

$$\begin{matrix} x_4\,, & x_2\,, & x_6 \\ x_5\,, & x_6\,, & x_3 \end{matrix} \tag{1}$$

Possiamo dunque rappresentare la M_4^3 col simbolo

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{vmatrix} \equiv M_4^3 \tag{2}$$

Dico che queste tre forme costituiscono *un complesso simmetrico* [1].

Siccome x_1 è lo spazio tangente doppio lungo la conica $K^{(1)}$ si deduce da ciò che precede il modo di costruirlo, poichè è lo spazio corrispondente ai due spazî x_4, x_5 nelle due forme $S_2^{(2)}, S_2^{(2)}$, i quali passano pel piano $S_2^{(1)}$, dunque:

Agli spazî T_4, congiungenti due piani secanti di 1ª specie $S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$ con un altro piano $S_2^{(1)}$ corrisponde nelle tre forme collineari $S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$, stabilite mediante altri tre piani S_2, lo spazio tangente doppio lungo la conica $K^{(1)}$ di $S_2^{(1)}$.

È chiaro anche da ciò che precede che per un punto S_0 qualunque di S_5 non passa alcun piano secante S_2, o uno solo, oppure infiniti. Nell'ultimo caso il punto S_0 cade sulla F_2^4 stessa, e gli ∞^1 piani secanti S_2 passanti per esso costituiscono *il cono projettante del punto* S_0.

13. Un ente geometrico in S_n che si lascia generare mediante forme projettive fondamentali ammette in generale due sistemi coniugati generatori e due sistemi di curve e superficie [2]. Nel caso della M_4^3 questi sistemi generatori coincidono. Dunque:

I due sistemi generatori della M_4^3, e perciò anche della F_2^4, coincidono.

[1] Questa denominazione è adoperata dal Cremona in casi analoghi nel suo trattato: *Teoria delle superficie* nello spazio a tre dimensioni, quando cioè le superficie d'ordine ν che determinano $\mu+1$ sistemi lineari di μ^{ma} specie nello spazio S_3 possono essere indicate col simbolo $P_{\rho\sigma}$, ove ρ indica le superficie di uno stesso sistema e σ invece l'indice di $\mu+1$ superficie corrispondenti, e in modo che $P_{\rho\sigma} \equiv P_{\sigma\rho}$. La differenza tra i sistemi lineari projettivi considerati dal Cremona in S_3 e quelli da me considerati (l. c. pag. 215 ecc.) consiste in ciò: che in luogo di superficie d'ordine ν abbiamo degli spazî fondamentali; in altre parole nei miei sistemi non è l'ordine ν che determina la multiplicità che può avere il sistema, ma bensì il numero delle dimensioni. Molte proprietà sono comuni, ma nello spazio a n dimensioni acquistano maggiore semplicità.

[2] A. l. c. pag. 215 ecc.

Le superficie del 3° ordine a 3 dimensioni, come per es.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_2 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix} \equiv C_3^3$$

sono coni, che hanno per vertici i punti della superficie F_2^4, i quali vengono generati da tre fasci projettivi del sitema generatore. Dalle mie citate ricerche e dal simbolo stesso di M_4^3 segue: Due coni C_3^3 qualunque sono situati in un cono di 2° grado a quattro dimensioni, che ha per asse la retta congiungente i vertici dei due coni.

Per es.: i due coni:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_2 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{vmatrix}$$

che hanno per vertici i punti u_3, u_2, (fig. 1) sono situati nel cono di 2° grado

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix}$$

che ha per asse, la retta u_3, u_2, nella quale s'incontrano i quattro spazî x_1, x_4, x_5, x_6.

14. Indichiamo ora i punti d'incontro delle tangenti alle coniche $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$ (fig. 1) nei tre punti u_1, u_2, u_3 con u_4, u_5, u_6. Questi formano coi tre primi una *piramide fondamentale* di S_5 (¹). Lo spazio x_1 tocca la F_2^4 lungo la conica $K^{(1)}$, e quindi passa per i piani tangenti in u_2 e u_3 alla F_2^4, che sono $u_5 u_2 u_6$, $u_4 u_3 u_6$, cioè passa pei cinque punti $u_2 u_3 u_4 u_5 u_6$. Analogamente x_2 e x_3 passano rispettivamente pei punti $u_1 u_3 u_4 u_5 u_6$, $u_1 u_2 u_4 u_5 u_6$. Lo spazio x_4 contiene i due piani $S_2^{(1)} S_2^{(3)}$ (nr. 11) e quindi contiene i punti $u_1 u_2 u_3 u_5 u_6$; così x_5 e x_6 passano rispettivamente per i punti $u_1 u_2 u_3 u_4 u_6$, $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$. Vale a dire:

I tre punti d'incontro delle tre coniche K di tre piani secanti qualunque $S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$ e i punti d'incontro in questi piani delle tangenti alle coniche K nei primi tre punti, costituiscono una piramide fondamentale H. Le facce opposte di essa agli ultimi tre punti sono gli spazî doppi tangenti alla F_2^4 lungo le coniche K, e le facce opposte agli altri tre punti sono gli spazî T_4 che congiungono i piani secanti S_2 due a due.

Una piramide H è duale di sè stessa rispetto alla F_2^4 e $\mathbf{F}_2^4$.

15. Dalla doppia rappresentazione piana in Σ_2 si ha per dualità:

I piani tangenti costituiscono una superficie $\mathbf{M}_4^3$ di 3ª classe a quattro dimensioni, che viene generata da tre forme fondamentali collineari di un complesso simmetrico, aventi per sostegno i tre piani tangenti. Gli spazî a quattro dimensioni di questa super-

(¹) La configurazione più semplice in S_n è data da $n+1$ dei suoi punti indipendenti, che determinano S_n. Questa configurazione la ho chiamata piramide fondamentale di S_n (A. l. c. pag. 171 n. 7).

ficie sono gli spazî T_4 e U_4, nei primi sono contenuti due piani secanti S_2 distinti, nei secondi due piani secanti S_2 coincidenti.

Dai coni C_3^3 si ha per dualità:

Tutti i piani tangenti di F_2^4 nei punti di una conica K formano una superficie di 3ª classe e di 3° ordine a tre dimensioni situata nello spazio doppio U_4 lungo la K.

16. Prendiamo ora la piramide $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6$ (fig. 1) come piramide di riferimento, e indichiamo con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, le coordinate che determinano un dato punto in S_5 (¹).

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 0\,, \quad x_3 = 0\,, \quad x_4 = 0\,, \quad x_5 = 0\,, \quad x_6 = 0.$$

rappresentano le equazioni delle facce a quattro dimensioni della piramide fondamentale. Prima $x_1, x_2, \ldots x_6$ erano simboli qualunque che designavano sei spazi S_4, ora rappresentano i primi membri delle equazioni degli stessi spazî.

L'equazione della M_4^3 è dunque:

$$M^3{}_4 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Essa viene generata dalle tre forme projettive fondamentali:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 &= 0 \\ \lambda x_4 + \mu x_2 + \nu x_6 &= 0 \\ \lambda x_5 + \mu x_6 + \nu x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

dove λ, μ, ν sono tre parametri. Vediamo che per la F_2^4 passano i coni di 2° grado a 4 dimensioni dei seguenti tre gruppi;

$$\begin{array}{lll} x_1 x_6 - x_4 x_5 = 0\,, & x_4 x_6 - x_2 x_5 = 0\,, & x_1 x_2 - x_4^2 = 0 \\ x_1 x_3 - x_5^2 = 0\,, & x_3 x_4 - x_5 x_6 = 0\,, & x_1 x_6 - x_4 x_5 = 0 \\ x_3 x_4 - x_5 x_6 = 0\,. & x_2 x_3 - x_6^2 = 0\,, & x_4 x_6 - x_2 x_5 = 0 \end{array} \qquad (3)$$

i quali vengono generati rispettivamente dai tre gruppi seguenti di fasci projettivi

$$\begin{array}{lll} x_1 - \dfrac{\xi_1}{\xi_3} x_5 = 0\,, & x_4 - \dfrac{\xi_2}{\xi_3} x_5 = 0\,, & x_1 - \dfrac{\xi_1}{\xi_2} x_4 = 0 \\ x_4 - \dfrac{\xi_1}{\xi_3} x_6 = 0\,, & x_2 - \dfrac{\xi_2}{\xi_3} x_6 = 0\,, & x_4 - \dfrac{\xi_1}{\xi_2} x_2 = 0 \\ x_5 - \dfrac{\xi_1}{\xi_3} x_3 = 0\,, & x_6 - \dfrac{\xi_2}{\xi_3} x_3 = 0\,, & x_5 - \dfrac{\xi_1}{\xi_2} x_6 = 0 \end{array} \qquad (4)$$

Quindi si ottiene:

Le coordinate dei punti della F_2^4 riferita ad una delle sue piramidi H si esprimono nel modo seguente:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \xi_1^2 : \xi_2^2 : \xi_3^2 : \xi_1 \xi_2 : \xi_1 \xi_3 : \xi_2 \xi_3 \qquad (5)$$

Se $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ sono le equazioni dei tre lati di un triangolo fondamentale nel piano Σ_2, le (5) ci dànno con le (6) le formole di passaggio tra un punto del piano e un punto della superficie, e viceversa.

(¹) Da qui si scorge bene il passaggio dai concetti sintetici all'applicazione ad essi dell'analisi.

17. Se noi consideriamo ora una superficie a due dimensioni dello spazio a quattro o a tre dimensioni la quale si lasci rappresentare in un piano mediante un sistema di curve del 2° ordine o quadruplicemente o triplamente infinito, essa puossi ottenere dalla F_2^4 mediante projezione univoca da un punto se si proietta in S_4, e da una retta se si proietta nel nostro spazio S_3.

Infatti le coordinate dei punti di una tale superficie dello spazio S_4 si esprimono nel seguente modo:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : f_5 \tag{1}$$

ove le f sono funzioni razionali ed intere di 2° grado nelle ξ_1, ξ_2, ξ_3, e saranno della forma:

$$f_i = a_{11}^{(i)} \xi_1^2 + a_{22}^{(i)} \xi_2^2 + a_{33}^{(i)} \xi_3^2 + 2a_{12}^{(i)} \xi_1 \xi_2 + 2a_{13}^{(i)} \xi_1 \xi_3 + 2a_{23}^{(i)} \xi_2 \xi_3 \quad i=1,2,3,4,5 \tag{2}$$

Ora ponendo nello spazio S_5

$$\sigma y_i = a_{11}^{(i)} x_1 + a_{12}^{(i)} x_2 + a_{23}^{(i)} x_3 + 2a_{12}^{(i)} x_4 + 2a_{13}^{(i)} x_6 + 2a_{23}^{(i)} x_6 \tag{3}$$

$$\sigma y_6 = x_6$$

veniamo ad eseguire nello spazio S_5 una trasformazione rispetto ad un'altra piramide fondamentale, le cui facce hanno rispetto alla prima le equazioni $y_i = 0$, $x_6 = 0$, e la superficie (1) è allora la projezione nella faccia x_6 eseguita dal vertice opposto nella nuova piramide, cioè dal punto d'incontro dei cinque spazî $y_i = 0$.

L'analoga dimostrazione vale evidentemente per le superficie dello spazio ordinario.

Vedremo nel § 5 un' altra semplicissima dimostrazione sintetica di questo teorema.

18. Ritornando alla piramide H osserviamo che al punto e alla retta *unità* del piano Σ_2 corrisponde il punto e lo spazio unità in S_5 *che sono un punto ed uno spazio* U_4 di F_2^4. Scegliendo opportunamente *il punto e lo spazio unità* e riguardando le $u_i = 0$ come le equazioni dei vertici della piramide si ha:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5 : u_6 = \eta_1^2 : \eta_2^2 : \eta_3^2 : \eta_1 \eta_2 : \eta_1 \eta_3 : \eta_2 \eta_3 \tag{1}$$

da cui si ricava pure che l'equazione della superficie $\mathbf{M}_4^3$ è:

$$\mathbf{M}_4^3 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_4 & u_5 \\ u_4 & u_2 & u_6 \\ u_5 & u_6 & u_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Dalle equazioni di M_4^3 e $\mathbf{M}_4^3$ osserviamo che: l e d u e s u p e r f i c i e M_4^3 e F_2^4 s o n o p o l a r i r e c i p r o c h e d i s è s t e s s e r i s p e t t o a l l a s u p e r f i c i e d i 2° g r a d o a q u a t t r o d i m e n s i o n i $S_4^2 \equiv \Sigma x_i^2 = \Sigma u_i^2 = 0$, vale a dire un punto di F^4_2 ha per spazio polare rispetto alla S_4^2 uno dei suoi spazî doppi U_4.

Si ha dunque:

L a s u p e r f i c i e S_4^2 t o c c a l a F_2^4 l u n g o u n a c u r v a n o r m a l e C_4.

U n a p i r a m i d e H e u n a l t r o p u n t o e u n a l t r o s p a z i o U_4 d e t e r m i n a n o u n a t a l e s u p e r f i c i e d i 2° g r a d o [1].

[1] A l. c. p. 184.

Per ogni curva C^4 passa una superficie S_4^2 dalla quale la F_2^4 viene toccata lungo la C^4.

19. Le coordinate dello spazio polare di un punto y_i rispetto alla $S_4^2 = 0$ sono le stesse y_i, e quindi al polo e allo spazio polare corrispondono le due coniche:

$$y_1 \xi_1^2 + y_2 \xi_2^2 + y_3 \xi_2^2 + y_4 \xi_1 \xi_2 + y_5 \xi_1 \xi_3 + y_6 \xi_x \xi_3 = 0$$
$$y_1 y_1^2 + y_2 y_2^2 + y_3 y_3^2 + y_4 y_1 y_2 + y_5 y_1 y_3 + y_6 y_2 y_3 = 0$$

le quali sono evidentemente polari reciproche rispetto alla conica:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 0$$

e viceversa una curva del 2° ordine e una curva di 2ª classe polari reciproche rispetto alla conica (2) ci dànno un punto e lo spazio polare rispetto alla $S_4^2 = 0$.

Ad un punto di Σ_2 e alla sua polare rispetto alla conica (2) corrispondono un punto e uno spazio U_4 di F_2^4, polo e spazio polare rispetto a S_4^2.

La conica (2) corrisponde evidentemente alla curva di contatto C^4 di F_2^4 con la S_4^2.

La conica (2) ha ∞^3 triangoli conjugati, e ad ogni triangolo conjugato, come il fondamentale, corrisponde poi in S_5 una piramide H; quindi si ha:

Ci sono ∞^3 piramidi H della F_2^4 che sono polari reciproche rispetto ad una delle superficie S_4^2.

Le coppie dei punti d'incontro della C^4 di contatto colle tre coniche K dei tre piani secanti S_2 di una piramide H dividono armonicamente le coppie dei tre punti d'incontro delle tre coniche [1].

20. Le due coniche (1) possono essere considerate l'una come curva di 2ª classe l'altra come curva del 2° ordine, e ad esse corrispondono quindi un altro punto S_o e un altro spazio S_4, o per meglio dire un altro cono γ^4 e un'altra curva C^4 polari reciproci rispetto alla superficie S_4^2.

Se le due coniche (1) coincidono, se cioè una conica è reciproca di sè stessa rispetto alla conica (2), vuol dire che il cono γ^4 e la C^4 che essa determina sono polari reciproci rispetto alla S_4^2. In tal caso ci sono adunque infiniti triangoli inscritti nella curva di contatto C_1^4 di S_4^2 con F_2^4, cioè infinite piramidi H conjugate rispetto alla S_4^2 tangente alla F_2^4 lungo la C^4, e viceversa.

Ci sono nel piano quattro coniche rispetto alle quali sono polari reciproche due

[1] A. l. c. Polar figuren im Bezug auf eine $(n-1)$ dim. Fläche F_{n-1}^2. Noto che la S_4^2 ha due sistemi di ∞^3 piani, di cui se ne è servito recentemente il dott. Segre nella seconda parte della sua bella dissertazione di laurea (Atti della r. Acc. di Torino 1884), per lo studio della retta nella via tracciata dal Klein nella sua Memoria: *Ueber Linien Geometrie und metrische Geometrie*, adoperando anche lui, come me, il metodo sintetico. Osservo però che l'errore della mia Memoria che ha citato spesse volte il dott. Segre nella prima parte della sua dissertazione, relativo al numero degli spazî lineari contenuti in una superficie F_{n-1}^2, non è che un errore apparente, perchè come si deduce dall'esatto ragionamento in luogo di essere stampato $\infty^{3+3+4+\dots+m(m-1)}$ si trova stampato $\infty^{3 \cdot 3 \cdot 4 \dots m(m-1)}$.

coniche date, i cui punti d'incontro hanno per rette polari rispetto alle quattro coniche rispettivamente le quattro tangenti comuni, quindi:

Ci sono quattro superficie S_4^2 rispetto alle quali una retta S_1 ha lo stesso spazio polare S_3. Ai quattro punti d'incontro di S_3 con F_2^4 sono polari i quattro spazî U_4 passanti per la retta S_1 rispetto alle quattro superficie S_4^2.

21. Dalle equazioni stesse delle M_4^3 e $\mathbf{M}_4^3$ si scorge che la F_2^4 è una superficie doppia della M_4^3, e così la $\mathbf{F}_2^4$ è una superficie doppia (nel senso reciproco) della $\mathbf{M}_4^3$.

§ 3. *Figura determinata da una retta* S_1 *e da uno spazio* S_3 *rispetto alla* F_2^4.

22. Sappiamo già che uno spazio S_3 incontra la F_2^4 in quattro punti, che possono essere tutti reali o immaginari, tutti o in parte coincidenti, come anche sappiamo che per una retta S_1 possiamo condurre quattro spazî doppi U_4, tutti reali o immaginari, tutti o in parte coincidenti.

Essendo la superficie a quattro dimensioni M_4^3 costituita dai piani secanti del 3° ordine, vuol dire che una retta S_1 la incontra in tre punti, dunque:

Una retta S_1 incontra tre piani secanti di 1ª specie $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ della F_2^4 in tre punti $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$, nei quali, per un teorema dato al n. 11, passano due a due sei piani tangenti $T_2^{(1)}\, T_2'^{(1)}$; $T_2^{(2)}\, T_2'^{(2)}$; $T_2^{(3)}\, T_2'^{(3)}$, che contengono le tangenti $t_1^{(1)}\, t_1'^{(1)}$; $t_1^{(2)}\, t_1'^{(2)}$; $t_1^{(3)}\, t_1'^{(3)}$ condotte da $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$ alle coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ dei tre piani secanti, i cui punti di contatto indico colle lettere $w^{(1)}\, w'^{(1)}$; $w^{(2)}\, w'^{(2)}$; $w^{(3)}\, w'^{(3)}$.

Siano inoltre $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ le quattro coniche K situate negli spazî tangenti doppi U_4 passanti per S_1.

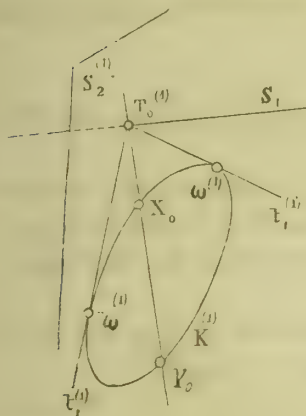
Abbiamo dimostrato al n. 6 che un cono γ^4 avente per vertice un punto S_0 qualunque dello spazio S_5 tocca la F_2^4 lungo una curva C^4, o per meglio dire, gli spazî U_4 del cono γ^4 toccano la F_2^4 lungo le coniche K tangenti ad una determinata curva C^4. Inoltre si è visto che mentre la tangente in un punto della C^4 giace nel suo spazio S_4 nel quale è contenuta, gli spazî S_3, determinati dai piani tangenti nei punti della C^4 alla F^4 e dai piani secanti individuati dalle tangenti di C^4, passano pel vertice del cono γ^4. È chiaro dunque che se la S_1 passa pel punto S_0, essa incontra tutti gli spazî S_3 così ottenuti, e quindi è situata con ciascuno di essi in uno spazio a quattro dimensioni. E siccome in tal caso il cono γ^4 contiene i quattro spazî U_4 passanti per la S_1, è evidente che la curva C^4 anzidetta tocca anche le quattro coniche K di questi spazî, perchè tocca tutte le coniche degli spazî U_4 del cono γ^4. Ciò vale naturalmente per qualunque cono γ^4 della *schiera*, i cui vertici S_0 sono situati sulla retta S_1, e le cui curve corrispondenti C^4 toccano le quattro coniche K dei quattro spazî U_4.

23. I tre piani secanti $S_2^{(1)}\, S_2^{(2)}\, S_2^{(3)}$ s'incontrano in tre punti, che ora indico con $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, nei quali s'incontrano rispettivamente due a due le coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$. La figura formata da questi tre piani è identica a quella descritta al n. 11 (fig. 1).

Ora lo spazio S_3 che congiunge $S_2^{(1)}$ con S_1 incontra evidentemente i piani

$S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ secondo le rette $A_0^{(3)} T_0^{(2)}$; $A_0^{(2)} T_0^{(3)}$, e quindi lo spazio S_3 passa pel piano $A_0^{(1)} A_0^{(2)} A_0^{(3)}$. Analogamente per gli altri due spazî $S_2^{(2)} S_1$, $S_2^{(3)} S_1$. Vale a dire:

La retta S_1 giace nel piano secante di 2ª specie determinato dai tre punti d'incontro delle coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$. O in altre parole: Per una retta passa un solo piano secante di 2ª specie M_2 (fig. 1).

Fig. 2.

24. Uno spazio qualunque S_4 passante per S_1 incontra la F_2^4 in una curva C^4, che ha due punti X_0, Y_0 in comune con le coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$, e le cui congiungenti passano evidentemente per $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$. Col variare di S_4 i punti X_0, Y_0, formano nelle coniche K tre involuzioni i cui punti doppi sono rispettivamente le tre coppie di punti w.

Se consideriamo uno spazio U_4 per la retta S_1, in esso la C^4 si riduce ad una sola conica u, e quindi questa incontra le coniche K in tre punti w, per es. $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$. Dunque:

Le quattro coniche u incontrano le tre coniche K ciascuna in tre dei sei punti w. Quindi si ha pure:

I sei piani tangenti T_2, che incontrano due a due la retta nei tre punti T_0, sono situati tre a tre nei quattro spazî doppi U_4 passanti per la retta S_1, e i loro punti di contatto w sono situati tre a tre nelle quattro coniche u.

25. Tiriamo ora pel punto, per es. $T_0^{(1)}$ (fig. 2), una retta X_0 Y_0 nel piano $S_2^{(1)}$. I piani tangenti $T_2^{(x)}$, $T_2^{(y)}$ in questi due punti alla F_2^4 sono contenuti, come già si sa nello spazio U_4 tangente lungo la conica $K^{(1)}$, il quale non passa per la S_1. Il piano $T_2^{(x)}$ determina colla S_1 uno spazio $T_4^{(x)}$, che passa evidentemente per $S_2^{(1)}$, perchè passa per la retta $T_0^{(1)} X_0$, e per la tangente in X_0 alla conica $K^{(1)}$. Lo spazio $T_4^{(x)}$ incontra dunque la F_2^4 in una altra conica $K^{(x)}$ passante pel punto X_0, avente in X_0 una tangente X_1 situata nel piano $T_2^{(x)}$. Così il piano $T_2^{(y)}$ determina colla S_1 uno spazio $T_4^{(y)}$, che taglia la F_2^4 in un'altra conica $K^{(y)}$ (oltre la $K^{(1)}$), che avrà in Y_0 una tangente Y_1 situata nel piano $T_2^{(y)}$.

I punti X_0 e Y_0 generano nella $K^{(1)}$ un'involuzione i cui punti doppî sono $w^{(1)}$ e $w'^{(1)}$. In questa involuzione si corrispondono i due punti $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$ situati in $K^{(1)}$. I piani tangenti in questi punti sono i due piani $T_2^{(1)}$, $T_2'^{(1)}$ del n. 22, ne consegue dunque:

Gli spazî tangenti T_4 che passano per una retta S_1 e per uno dei piani secanti $S_2^{(i)}$, che incontrano questa retta, sono due a due in involuzione. I punti di contatto di due spazî corrispondenti giacciono sulla conica $K^{(i)}$ del piano $S_2^{(i)}$ e sono per diritto col punto d'incontro di S_1 col piano $S_2^{(i)}$. Gli spazî doppi dell'involuzione sono dati dai due piani tangenti T_2 nei due punti w della conica $K^{(i)}$.

I due spazî che congiungono il piano $S_2^{(i)}$ con gli altri due piani secanti incontrati dalla retta formano una coppia dell'involuzione.

26. Le tangenti X_1 e Y_1 sono situate come si è detto nei piani tangenti $T_2^{(x)}$, $T_2^{(y)}$. Ora i piani tangenti nei punti di una conica K formano una superficie a 3 dimensioni di 3° ordine e di 3ª classe situata nello spazio U_4 corrispondente alla conica (n. 15), e quindi si ha:

Le tangenti alle coniche K degli spazî T_4 del precedente teorema nei punti d'incontro colla conica $K^{(i)}$ del piano secante $S_2^{(i)}$, formano una superficie rigata normale del 3° ordine ([1]) a due dimensioni nello spazio tangente doppio U_4 della conica $K^{(i)}$. A queste tangenti appartengono pure le due tangenti, condotte alle altre due coniche K, i cui piani secanti incontrano la S_1 nei loro punti d'incontro con la prima.

27. Se si congiunge la S_1 colle sei tangenti t_1 si ottengono sei piani situati due a due negli spazî S_3 determinati da S_1 coi tre piani $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$, e situati tre a tre nei quattro spazi U_4 passanti per la retta, in modo che per due piani situati in uno stesso S_3 per es. S_1 $S_2^{(1)}$ passano rispettivamente due coppie di spazî U_4. Dunque:

Gli spazî S_3 determinati da una retta S_1 e dai tre piani secanti S_2, che la incontrano, intersecano in piani gli spazî opposti R_3 della quaterna degli spazî U_4 passanti per la retta.

28. Per dualità si hanno le proprietà analoghe per uno spazio S_3 qualunque, oltre a quelle già enunciate nei numeri precedenti. Vogliamo soltanto enunciare le proprietà seguenti:

Uno spazio S_3 incontra in tre rette $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}$ tre piani tangenti T_2 della $F_2^{(4)}$, perchè per esso passano tre spazî tangenti $T_4^{(1)}, T_4^{(2)}$, $T_4^{(3)}$ della M_4^3.

Le rette a_1 sono situate in un piano projettante di 2ª specie (duale al teor. del num. 23).

Le rette a_1 incontrano rispettivamente gli spigoli opposti del tetraedro formato dai quattro punti d'incontro di S_3 con F_2^4 (duale al teorema n. 27).

§ 4. *Projezioni di un piano. — Trasformazioni piane Cremoniane.*

29. Scegliamo dapprima un piano secante di 1ª specie S_2, il quale incontra la F_2^4 in una conica K, e projettiamo da esso la F_2^4 in un piano Σ_2.

Ciò è sempre possibile perchè basta congiungere S_2 coi punti di F_2^4, si ottengono così degli spazî S_3 che incontrano il piano Σ_2 in punti, che sono la projezione o l'imagine dei punti di F_2^4.

Ma a noi interessa pure che la projezione sia univoca, o in altre parole che a un punto di Σ_2 corrisponda un solo punto di F_2^4, e viceversa.

([1]) A. l. c. pag. 229.

Ora ciò succede appunto projettando da un piano S_2, perchè ogni punto A_0 fuori del piano S_2 e situato sulla F_2^4 unito con S_2 determina uno spazio S_3, che non ha altri punti colla F_2^4. Se ne avesse un altro, per questo e per A_0 passerebbe una conica K_1, la quale incontrando la K in un terzo punto, il suo piano sarebbe contenuto in S_3, vale a dire due piani secanti s'incontrerebbero in una retta, ciò che è impossibile (n. 3). Lo spazio S_3 incontra dunque il piano Σ_2 nel punto corrispondente $A_0^{(1)}$.

Una conica K_1 qualunque di F_2^4 incontra la K del piano projettante S_2 in un punto, e quindi, pel teorema dato al n. 2, essa viene projettata nel piano Σ_2 in una retta. Ciò risulta pure dal fatto che la K e la K_1 sono situate in uno spazio T_4, che incontra Σ_2 nella retta imagine di K_1.

La conica K di S_2 viene projettata in Σ_2 nella retta d'intersezione dello spazio U_4 che tocca la F_2^4 lungo la conica K.

Una curva qualsiasi C^4 razionale di F_2^4 incontra la K in due punti, vale a dire essa viene projettata in Σ_2 in una conica.

E viceversa: le rette e le coniche di Σ_2 vengono projettate da un piano qualunque di 1ª specie S_2 nelle coniche e nelle curve C^4 di F_2^4.

30. Consideriamo ora un piano M_2 secante di 2ª specie, avente cioè tre punti comuni, ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ colla F_2^4. Dico che projettando da questo piano la F_2^4 nel piano Σ_2 si ha pure una projezione o imagine univoca della F_2^4. Infatti ogni spazio S_3 passante per M_2 incontra la F_2^4 in quattro soli punti, di cui tre sono i tre punti fissi ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$.

Un punto A_0 qualunque della superficie viene projettato da M_2 in un punto $A_0^{(2)}$ di Σ_2.

Pei punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ passano tre coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ determinate rispettivamente dalle coppie di punti ${}_1A_0\ {}_2A_0$; ${}_1A_0\ {}_3A_0$; ${}_3A_0\ {}_2A_0$. Queste tre coniche determinano con M_2 tre spazî S_3, che incontrano il piano Σ_2 in tre punti ${}_1A_0^{(2)}$, ${}_2A_0^{(2)}$, ${}_3A_0^{(2)}$. I punti fissi di M_2 colla F_2^4, le tre coniche K e i tre punti ${}_1A_0^{(2)}$, ${}_2A_0^{(2)}$, ${}_3A_0^{(2)}$ li chiamo punti e coniche fondamentali di M_2 e della imagine in Σ_2, che indico col simbolo $\Sigma_2^{(2)}$.

Una conica K di F_2^4 viene projettata in una conica del piano $\Sigma_2^{(2)}$ passante pei suoi punti fondamentali ${}_1A_0^{(2)}$, ${}_2A_0^{(2)}$, ${}_3A_0^{(2)}$, perchè la conica K incontra le tre coniche fondamentali $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ in un punto.

Una conica passante pel punto ${}_1A_0$ di M_2 incontra le coniche fondamentali $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ in questo punto, e la $K^{(1)}$ in un punto fuori di M_2, quindi viene projettata in una retta passante pel punto ${}_1A_0^{(2)}$. E siccome ogni punto A_0 di F_2^4 determina una sola conica K col punto ${}_1A_0$, ne consegue che la retta congiungente di ogni punto $A_0^{(2)}$ del piano $\Sigma_2^{(2)}$ con uno dei suoi punti fondamentali, per es. con ${}_1A_0^{(2)}$, è la projezione di una sola conica K di F_2^4, che passa pel punto ${}_1A_0$.

Una curva razionale normale C^4 di F_2^4 incontra le tre coniche fondamentali $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ in coppie di punti, in generale fuori del piano M_2, e quindi viene projettata da questo piano in curve razionali del 4° ordine con tre punti doppi nei punti fondamentali di $\Sigma_2^{(2)}$.

Una curva C^4 passante per uno dei punti fondamentali di M_2, per es.: per ${}_1A_0$, incontra rispettivamente le coniche $K^{(2)}$ e $K^{(3)}$ oltre che nel punto ${}_1A_0$ in un altro punto, e incontra la $K^{(1)}$ in due punti fuori di M_2, quindi viene projettata in Σ_2 in una curva del 3° ordine avente un punto doppio in ${}_1A_0{}^{(2)}$ e due punti semplici negli altri due punti fondamentali.

Una curva C^4 passante per due punti fondamentali di M_2, per es.: ${}_1A_0$, ${}_2A_0$ incontra la conica $K^{(3)}$ in questi due punti, mentre incontra le coniche $K^{(1)}$ e $K^{(2)}$ in due altri punti; vale a dire, viene proiettata in Σ_2 in una conica passante pei due punti fondamentali ${}_1A_0{}^{(2)}$, ${}_2A_0{}^{(2)}$.

Finalmente una curva C^4 che passa pei tre punti fondamentali di M_2 (altri due punti di $F_2{}^4$ bastano a individuarla) viene projettata in una retta, perchè lo spazio S_4 della C^4 contiene anche il piano M_2.

Gli spazî T_4 che uniscono le tre coniche fondamentali due a due incontrano il piano Σ_2 nelle rette corrispondenti alle C^4 da esse determinate. Queste tre rette sono i lati del triangolo fondamentale di $\Sigma_2{}^{(2)}$. Uno di questi spazî T_4, per es: quello che contiene le coniche $K^{(2)}$, $K^{(3)}$, passa pel piano tangente ${}_1T_2$ del loro punto d'incontro ${}_1A_0$. Tutte le coniche che passano per ${}_1A_0$ hanno in questo punto una tangente situata nel piano ${}_1T_2$. cioè hanno in questo piano un punto infinitamente vicino a ${}_1A_0$. Queste coniche, per ciò che si è visto, vengono projettate in Σ_2 in rette passanti pel punto ${}_1A_0{}^{(2)}$, e quindi i loro punti infinitamente vicini ad ${}_1A_0$ in ${}_1T_2$ vengono projettati da M_2 nei punti del lato ${}_2A_0{}^{(2)}$ ${}_3A_0{}^{(2)}$ del triangolo fondamentale di $\Sigma_2{}^{(2)}$, dunque: I punti di un lato del triangolo fondamentale di $\Sigma_2{}^{(2)}$ sono le projezioni fatte da M_2 dei punti infinitamente vicini ad uno dei suoi punti fondamentali sulla $F_2{}^4$.

I teoremi inversi agli enunciati si deducono evidentemente mediante una sezione della forma di 2ª specie M_2 colla $F_2{}^4$.

Se il piano M_2 ha colla $F_2{}^4$ due o tre punti infinitamente vicini, ciò significa che le curve C^4 in $\Sigma_2{}^{(2)}$ hanno due o tre punti doppi infinitamente vicini, e che le coniche passanti per questi punti si toccano o si osculano.

31. Si scorge ora facilmente che: la projezione $\Sigma_2{}^{(1)}$ fatta da un piano secante di 1ª specie S_2 e la projezione $\Sigma_2{}^{(2)}$ fatta da un piano di 2ª specie M_2 sono in una corrispondenza (Verwandschaft) quadratica univoca.

Projettiamo infatti i punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ dal piano S_2 in Σ_2, otterremo tre punti ${}_1A_0{}^{(1)}$, ${}_2A_0{}^{(1)}$, ${}_3A_1{}^{(1)}$, che chiamo i punti fondamentali di $\Sigma_2{}^{(1)}$ in relazione col piano $\Sigma_2{}^{(2)}$.

Ad un punto $A_0{}^{(1)}$ di $\Sigma_2{}^{(1)}$ corrisponde un punto $A_0{}^{(2)}$ di $\Sigma_2{}^{(2)}$, perchè basta congiungere $A_0{}^{(1)}$ con S_2 per mezzo di uno spazio S_3, il quale incontra la $F_2{}^4$ nel punto X_0, e quindi basta projettare questo punto dal piano M_2 in $A_0{}^{(2)}$.

Alle rette di $\Sigma_2{}^{(1)}$ non passanti per alcuno dei suoi punti fondamentali, siccome vengono projettate da S_2 sulla $F_2{}^4$ in coniche K, non passanti pei punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$, corrispondono le coniche di $\Sigma_2{}^{(2)}$ passanti pei punti fondamentali di questo piano.

Nella stessa guisa si vede che alle rette passanti per un punto fondamentale per es.: ${}_1A_0^{(1)}$ del piano $\Sigma_2^{(1)}$ corrispondono, per ciò che precede, le rette passanti pel punto fondamentale ${}_1A_0^{(2)}$. Un lato del triangolo fondamentale, per es.: ${}_2A_0^{(1)}$ ${}_3A_0^{(1)}$ viene projettato da S_2 sulla F_2^4 nella conica fondamentale $K^{(1)}$, quindi ai lati del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(1)}$ corrispondono i vertici del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(2)}$.

Alle coniche passanti pei tre punti ${}_1A_0^{(1)}$, ${}_2A_0^{(1)}$, ${}_3A_0^{(1)}$ di $\Sigma_2^{(1)}$, le quali vengono projettate da S_2 sulla F_2^4 in curve C^4 passanti pei tre punti fondamentali di M_2, corrispondono le rette di $\Sigma_2^{(2)}$.

Le coniche di $\Sigma_2^{(1)}$ non passanti per alcuno dei suoi punti fondamentali vengono projettate da S_2 in F_2^4 in curve C^4 non contenenti alcuno dei punti fondamentali di M_2. Queste vengono poi projettate da M_2 in curve del 4° ordine con tre punti doppi nei punti fondamentali di $\Sigma_2^{(2)}$.

Ad una conica di $\Sigma_2^{(1)}$ passante per uno dei suoi punti fondamentali, per es.: ${}_1A_0^{(1)}$, corrisponde in $\Sigma_2^{(2)}$ una curva del 3° ordine con un punto doppio nel punto fondamentale ${}_1A_0^{(2)}$ e che passa semplicemente per gli altri due punti fondamentali.

Così si può stabilire anche la corrispondenza inversa fra il piano $\Sigma_2^{(2)}$ e il piano $\Sigma_2^{(1)}$. Osservo soltanto che ai punti fondamentali di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono in F_2^4 le coniche fondamentali di M_2, e quindi in $\Sigma_2^{(1)}$ i lati del triangolo fondamentale.

Ai punti dei lati del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono in F_2^4, come si è visto al num. precedente, i punti infinitamente vicini ai punti fondamentali di M_2, e quindi in $\Sigma_2^{(1)}$ ai lati di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono i punti fondamentali, e ai punti dei lati, corrispondono in $\Sigma_2^{(1)}$ i punti infinitamente vicini ai punti fondamentali in tutte le rette passanti per essi.

Per ciò che precede si ha dunque.

Le projezioni piane della F_2^4 fatte da due piani di 2ª specie sono collineari, quelle fatte da due piani, l'uno di 1ª l'altro di 2ª specie sono in una corrispondenza quadratica univoca. Si ha pure quest'altro teorema:

Le projezioni fatte da due piani di 2ª specie sono in una corrispondenza univoca quartica, cubica o quadratica.

Siano in fatti dati i due piani di 2ª specie M_2, M'_2, che hanno con la F_2^4 i punti fondamentali ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$; ${}_1A'_0$, ${}_2A'_0$, ${}_3A'_0$.

Le rette di $\Sigma_2^{(2)}$ sono le projezioni fatte da M_2 delle curve C^4 passanti pei tre punti fondamentali di M_2. Queste curve vengono projettate da M'_2 in curve del 4° ordine aventi in comune tre punti doppi nei punti fondamentali del piano $\Sigma'^{(2)}_2$, e tre punti semplici, cioè le projezioni dei tre punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ fatte dal piano M'_2. Alle rette dunque di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono le curve del 4° ordine di $\Sigma'^{(2)}_2$ aventi in comune tre punti doppi e tre punti semplici.

Se M'_2 ha con M_2 un punto fondamentale per es.: il punto ${}_1A_0$ comune, le curve C^4 passanti pei punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ vengono projettate da M'_2 in $\Sigma'^{(2)}_2$ in curve del 3° ordine con un punto doppio nel punto ${}_1A'^{(2)}_0$ e con quattro punti semplici in comune. Due di questi punti cadono nei punti ${}_2A'^{(2)}_0$, ${}_3A'^{(2)}_0$, e gli altri due cadono nelle projezioni dei punti ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ del piano M_2 fatte dal piano M'_2.

Finalmente se M'_2 ha con M_2 due punti fondamentali comuni per es.: ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, le C^4 anzidette vengono projettate da M'_2 in $\Sigma'_2{}^{(2)}$ in coniche, che passano pei due punti fondamentali ${}_1A'_0{}^{(2)}$ ${}_2A'_0{}^{(3)}$ e pel punto projezione del punto ${}_3A_0$ del piano M_2, fatta dal piano M'_2.

Da ciò che precede si ha pure:

L' ordine di una curva tracciata sulla F_2^4 (che è sempre pari) e quello della curva projezione fatta da un piano M_2 di 2ª specie, sono eguali se la curva non passa per alcuno dei punti fondamentali di M_2. Quello invece della curva projezione fatta da un piano S_2 di 1ª specie è la metà del primo.

32. Vogliamo ora dimostrare il seguente teorema:

Data una rete di coniche con tre punti comuni in un piano Σ_2, si può sempre ottenerla projettando le coniche di F_2^4 mediante un numero infinito di piani di 2ª specie. O in altre parole: tre punti qualunque di un piano Σ_2 si possono considerare, e in un numero infinito di modi diversi, come l'intersezione dei tre spazî S_3 che passano per un piano M_2 di 2ª specie e contengono rispettivamente le tre coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ determinate dai tre punti di M_2 comuni con la F_2^4.

Infatti siano ${}_1A_0{}^{(2)}$, ${}_2A_0{}^{(2)}$, ${}_3A_0{}^{(2)}$ i tre punti qualunque del piano Σ_2. Consideriamo un piano projettante $S_2{}^{(1)}$ di F_2^4 e proiettiamo il piano $\Sigma^{(2)}{}_2$ sulla F_2^4. Il punto ${}_1A_0{}^{(2)}$ determina con $S_2{}^{(1)}$ uno spazio S_3, che incontra la F_2^4 nel punto corrispondente ${}_1A_0$. Alle due rette ${}_1A_0{}^{(2)}$ ${}_2A_0{}^{(2)}$; ${}_1A_0{}^{(2)}$ ${}_3A_0{}^{(2)}$ corrispondono in F_2^4 due coniche $K^{(2)}$ e $K^{(3)}$, che tagliano la conica $K^{(1)}$ di $S_2{}^{(1)}$ rispettivamente in due punti ${}_2A_0$, ${}_3A_0$. Il piano M_2 determinato dai tre punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ così ottenuti, sarebbe uno dei piani richiesti se lo spazio T_4, che contiene le coniche $K^{(2)}$, $K^{(3)}$, tagliasse il piano Σ_2 nella retta ${}_2A_0$ ${}_3A_0$, mentre ciò non ha luogo in generale.

Se nella F_2^4 teniamo fisso il punto ${}_2A_0$ e consideriamo tutte le coniche K dei piani S_2 passanti per esso, e facciamo con questi piani la stessa operazione che abbiamo eseguita col piano $S_2{}^{(1)}$, otterremo evidentemente un numero semplicemente infinito di punti ${}_1A_0$ sulla F_2^4, che corrisponderanno al punto ${}_1A_0{}^{(2)}$ di $\Sigma_2{}^{(2)}$, e quindi avremo un numero semplicemente infinito di spazî T_4 determinati dalle coppie di coniche $K^{(2)}$, $K^{(3)}$. Questi spazî incontreranno il piano Σ_2 in un numero semplicemente infinito di rette. Non ancora però fra queste rette sarà compresa in generale la retta ${}_2A_0{}^{(2)}$ ${}_3A_0{}^{(2)}$ del piano $\Sigma_2{}^{(2)}$. Ma se si fa muovere il punto ${}_2A_0$ in una curva di F_2^4, per es.; in una conica K, e si fa per ogni sua posizione la stessa operazione, otterremo un numero doppiamente infinito di spazî T_4 determinati dalle ∞^2 coppie di coniche $K^{(2)}$, $K^{(3)}$. Questi spazî intersecheranno il piano Σ_2 nelle sue ∞^2 rette, fra le quali adunque sarà compresa la retta ${}_2A_0{}^{(2)}$ ${}_3A_0{}^{(2)}$ del piano $\Sigma_2{}^{(2)}$.

33. Siano ora dati due piani qualunque $\Sigma_2{}^{(2)}$ $\Sigma_2{}^{(1)}$ fra loro in corrispondenza univoca quadratica. I tre punti fondamentali di $\Sigma_1{}^{(2)}$ siano ${}_1A_0{}^{(2)}$, ${}_2A_0{}^{(2)}$, ${}_3A_0{}^{(3)}$, e quelli di $\Sigma_2{}^{(1)}$ ${}_1A_0{}^{(1)}$, ${}_2A_0{}^{(1)}$, ${}_3A_0{}^{(1)}$. Pel teorema precedente la rete di coniche di $\Sigma_2{}^{(2)}$ può essere considerata come la projezione di F_2^4 da ∞ piani secanti M_2 di 2ª specie.

Sia M_2 uno di questi piani, e projettato il piano $\Sigma_2^{(2)}$ sulla F_2^4, riprojettiamolo da un piano qualunque S_2 di 1^a specie sul piano Σ_2. Otterremo una nuova forma $\Sigma'_2{}^{(1)}$, che è collineare colla forma $\Sigma_2^{(1)}$. Infatti la corrispondenza fra $\Sigma_2^{(1)}$ e $\Sigma'_2{}^{(1)}$ è univoca e inoltre alle rette dell'uno corrispondono le rette dell'altro, in modo che due coppie di rette corrispondenti in $\Sigma_2^{(1)}$ $\Sigma'_2{}^{(1)}$ s'incontrano in punti corrispondenti. Due tali piani $\Sigma_2^{(1)}$ $\Sigma'_2{}^{(1)}$ si possono ottenere mediante successive projezioni e sezioni da un terzo piano $\Sigma''_2{}^{(1)}$ (') e quindi si ha il teorema:

Una corrispondenza razionale quadratica tra due piani $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_2^{(2)}$ si ottiene mediante due projezioni della F_2^4, l'una da un piano secante di 1^a, l'altra da uno di 2^a specie.

O in altre parole:

La corrispondenza quadratica razionale fra le due projezioni della F_2^4 fatte da un piano di 1^a e 2^a specie è affatto generale. I diversi casi particolari si ottengono 1° colle posizioni speciali dei punti fondamentali di M_2, 2° colle posizioni speciali dei due piani secanti M_2, S_2.

Il primo caso l'abbiamo già considerato al n. 30: pel secondo osserviamo che un piano M_2 di 2^a specie incontra la superficie M_4^3 dei piani secanti di 1^a specie nelle tre rette che congiungono i suoi punti d'incontro colla F_2^4. D'altra parte siccome due piani secanti non possono incontrarsi che nei punti di F_2^4 si ha:

Due piani secanti di 1^a e 2^a specie in generale non s'incontrano, e non possono mai incontrarsi fuori della F_2^4.

Le posizioni speciali di S_2 e M_2 sono dunque due oltre alla generale, cioè quando S_2 passa per uno dei punti fondamentali di M_2, oppure quando passa per due di essi. In quest'ultimo caso i due piani $\Sigma_2^{(2)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ in Σ_2 hanno gli stessi punti fondamentali.

34. Ritorniamo ai piani $\Sigma_2^{(2)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ che si sono ottenuti in Σ_2 mediante le projezioni della F_2^4 dai due piani M_2 e S_2. Projettiamo ora il piano $\Sigma_2^{(2)}$ da un secondo piano secante di 1^a specie $S_2^{(1)}$ qualunque, e seghiamo la forma così ottenuta colla F_2^4, e riprojettiamo la sezione da un secondo piano qualunque $M_2^{(1)}$ sul piano Σ_2. Otteniamo così una terza forma $\Sigma_2^{(3)}$ in corrispondenza quadratica con la forma $S_2^{(1)}$ $\Sigma_2^{(2)}$ e quartica con $\Sigma_2^{(1)}$, e quartica con la forma M_2 $\Sigma_2^{(2)}$.

Le coniche di $\Sigma_2^{(2)}$ passanti per punti ${}_1A_0^{(2)}$, ${}_2A_0^{(2)}$, ${}_3A_0^{(2)}$ vengono projettate da $S_2^{(1)}$ sulla F_2^4 in C^4 passanti per tre punti, che indicherò con ${}_1\alpha_0^{(1)}$, ${}_2\alpha_0^{(2)}$, ${}_3\alpha_0^{(3)}$. Se $M_2^{(1)}$ passa per uno di questi punti per es. ${}_1\alpha_0^{(1)}$, per ciò che precede, queste C^4 vengono projettate in cubiche con un punto doppio nel punto fondamentale corrispondente ad ${}_1\alpha_0^{(1)}$, e con quattro punti semplici comuni situati negli altri due punti fondamentali corrispondenti al piano $M_2^{(1)}$ e nelle projezioni fatte da $M_2^{(1)}$ dei punti ${}_2\alpha_0^{(2)}$, ${}_3\alpha_0^{(3)}$. Se invece $M_2^{(1)}$ passa per due dei punti α, allora le C^4 vengono projettate in coniche. Nel primo caso i piani $\Sigma_2^{(3)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ stanno in una corrispondenza razionale cubica, nel secondo invece in una corrispondenza quadratica.

Projettiamo di nuovo $\Sigma_2^{(3)}$ da un altro piano $S_1^{(2)}$ sulla F_2^4 e riprojettiamo

(') A l. c. pag. 179.

da un terzo piano $M_2^{(2)}$, otterremo una quarta forma $\Sigma_2^{(4)}$ in corrispondenza dell'ottavo ordine o d'ordine inferiore con $\Sigma_2^{(1)}$, secondo le posizioni speciali di $M_2^{(2)}$ rispetto ai punti fondamentali della sezione della forma $S_2^{(2)}$ $\Sigma_2^{(3)}$ colla F_2^4. Così continuando si ottiene una serie di piani projettanti di 1ª e 2ª specie, e una serie di forme delle quali due successive stanno in una relazione quadratica. Osserviamo anche che evidentemente i tre punti fondamentali di maggior multiplicità in $\Sigma_2^{(s)}$ si ottengono dai tre punti fondamentali dell'ultimo piano projettante $M_2^{(s-1)}$ di 2ª specie.

35. Supponiamo ora che siano dati due piani $\Sigma_2^{(3)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ in una corrispondenza cremoniana d'ordine n, e siano ${}_1A_0^{(s)}$, ${}_2A_0^{(s)}$, ${}_3A_0^{(s)}$ i tre punti fondamentali di $\Sigma_2^{(s)}$ di maggior multiplicità.

Come si è fatto per la trasformazione quadratica possiamo riguardare la rete di coniche avente i tre punti fondamentali ${}_1A_0^{(s)}$, ${}_2A_0^{(s)}$, ${}_3A_0^{(s)}$ come la projezione delle coniche K di F_2^4 da ∞ piani M_2. Da uno di questi piani $M_2^{(s-1)}$ projettiamo la forma $\Sigma_2^{(s)}$ sulla F_2^4 e poi riprojettiamola nel piano Σ_2 da un piano qualunque di 1ª specie $S_2^{(s-1)}$, otterremo una nuova forma $\Sigma_2^{(s-1)}$, che per l'ultimo teorema del n. 31 è colla forma $\Sigma^{(1)}$ in una corrispondenza Cremoniana d'ordine $\frac{n}{2}$ oppure $\frac{n+1}{2}$, mentre poi $\Sigma_2^{(s)}$ e $\Sigma_2^{(s-1)}$ sono in una corrispondenza quadratica (teorema n. 31). Così continuando si perviene al seguente teorema:

Una trasformazione Cremoniana tra due piani $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_2^{(s)}$ può essere sostituita da una serie finita di successive projezioni e sezioni della F_2^4 con piani secanti di 1ª e 2ª specie.

Da questo teorema si deduce il teorema già noto che una trasformazione Cremoniana può essere sostituita da una serie di trasformazioni quadratiche, perchè due projezioni successive fatte da un piano secante di 1ª e da uno di 2ª specie equivalgono a una trasformazione quadratica.

Da qui si deduce pure l'altro teorema che la somma degli ordini dei punti di maggiore multiplicità è maggiore di n.

36. Da ciò che precede si ha pure il seguente teorema:

I diversi sistemi omaloidici di curve d'un ordine qualunque nel piano si ottengono mediante successive projezioni e sezioni della F_2^4 con piani di 1ª e 2ª specie, partendo dal sistema delle rette del piano.

Con questo teorema si possono trovare speditamente i diversi sistemi omaloidici formati da curve dello stesso ordine.

Infatti dalle rette di $\Sigma_2^{(1)}$ si passa mediante un piano S_2 alle coniche di F_2^4, che vengono projettate da un piano M_2 in Σ_2 in una rete $\Sigma_2^{(2)}$ di coniche con tre punti comuni. Questa rete viene projettata da un altro piano $S_2^{(1)}$ sulla F_2^4 in curve razionali C^4 aventi tre punti comuni. Questo sistema viene projettato da un altro piano $M_2^{(1)}$ in Σ_2 in un sistema $\Sigma_2^{(3)}$ omaloidico di curve del 4° ordine con tre punti doppi comuni e tre punti semplici, oppure se $M_2^{(1)}$ passa per un punto comune alle C^4 otteniamo in Σ_2 un sistema $\Sigma'^{(3)}_2$ omaloidico di curve del 3° ordine con un punto doppio e quattro punti semplici.

Projettiamo di nuovo da un piano $S_2^{(2)}$ il sistema $\Sigma_2^{(3)}$ e $\Sigma'^{(3)}_2$ sulla F_2^4, e riprojettiamoli in Σ_2 da un altro piano $M_2^{(2)}$.

Nel 1° *caso* otteniamo su F_2^4 un sistema di curve dell'8° ordine con 3 punti doppi e 3 punti semplici (le quali incontrano le coniche K di F_2^4 in quattro punti).

Nel 2° *caso* otteniamo su F_2^4 un sistema di curve del 6° ordine con un punto doppio e quattro punti semplici (che incontrano le coniche K di F_2^4 in tre punti).

Proiettiamo nel I° caso le C^8 di F_2^4,

a) Da un piano $M_2^{(2)}$ qualunque.

Le C^8 vengono projettate in curve dell' 8° ordine con 3 punti quadrupli, 3 punti doppi e 3 punti semplici.

b) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto semplice comune alle C^8 della F_2^4. Le C^8 vengono projettate in curve C^7 del 7° ordine con 1 punto quadruplo, 2 punti tripli, 3 punti doppi e 2 punti semplici comuni.

c) $M_2^{(2)}$ passa per 2 punti semplici comuni alle C^8. Si ottiene in Σ_2 un sistema di curve del 6° ordine C^6 con 2 punti tripli, 4 punti doppi 1 punto semplice comuni.

d) $M_2^{(2)}$ ha 3 punti semplici comuni colle C^8. Si ottengono delle C^5 con 6 punti doppi comuni.

e) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto doppio delle C^8.

Le C^8 vengono projettate in curve del 6° ordine C^6 con 4 punti doppi, 1 punto quadruplo e 3 punti semplici.

f) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto doppio e per 1 punto semplice delle C^8.

Le C^8 vengono projettate in curve C^5 con 3 punti semplici, 3 punti doppi, 1 punto triplo.

g) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto doppio e 2 punti semplici delle C^8.

Le C^8 vengono projettate in curve C^4 con 3 punti doppi e 3 punti semplici (già considerato).

h) $M_2^{(2)}$ passa per 2 punti doppi delle C^8.

Le C^8 vengono projettate in curve C^4 con 3 punti doppi e 3 punti semplici (già considerato).

i($M_2^{(2)}$ passa per 2 punti doppi e 1 punto semplice delle C^8.

Queste vengono projettate in Σ_2 in curve di 3° ordine con 1 punto doppio e 4 punti semplici (già considerato).

l) $M_2^{(2)}$ passa per 3 punti doppi delle C^8.

Le C^8 vengono projettate nelle coniche di una rete (già considerato).

II. Caso.

a) Projettando da un piano $M_2^{(2)}$ qualunque, le C^6 vengono proiettate in Σ_2 in curve del 6° ordine con 3 punti tripli, 1 punto doppio e 4 punti semplici.

b) $M_2^{(2)}$ ha 1 punto semplice comune con le C^6.

Queste vengono projettate in curve del 5° ordine C^5 con 3 punti doppi. 1 punto triplo e 3 punti semplici (già considerato).

c) $M_2^{(2)}$ passa per 2 punti semplici delle C^6.

Le C^8 vengono projettate in C^4 con 3 punti doppi e 3 punti semplici (già considerato).

d) $M_2^{(2)}$ passa pel punto doppio delle C^6; queste vengono projettate in C^4 con 1 punto triplo e 6 punti semplici.

e) $M_2^{(2)}$ passa pel punto doppio e per 1 punto semplice delle C^6; queste vengono projettate in curve C^3 con 1 punto doppio e 4 punti semplici (già considerato).

f) $M_2^{(2)}$ passa pel punto doppio e 2 punti semplici; le C^6 vengono projettate in coniche con 3 punti comuni (già considerato).

In questi casi se ne scorge subito uno che si lascia generalizzare, ed è l'ultimo caso *d*). Le C^3 con 1 punto triplo e 6 punti semplici vengono projettate da un piano S_2 sulla $F_2^{(4)}$ in curve dell'8° ordine con 1 punto triplo e 6 punti semplici. Queste curve vengono projettate in Σ_2 da un piano M_2 avente con le C^8 il punto triplo comune, in curve del 5° ordine con 1 punto quadruplo comune e 8 punti semplici.

Così projettando queste curve da un piano S_2 sulla F_2^4 e riprojettando in Σ_2 da un piano M_2 avente con le C^{10} corrispondenti il punto quadruplo comune, si ottiene un sistema omaloidico di curve del 6° ordine con un punto quintuplo e 10 punti semplici comuni. La legge è manifesta e si ha per le curve d'ordine n un sistema omaloidico con 1 punto $(n-1)^{plo}$ e con $2(n-1)$ punti semplici comuni.

37. Dò qui anche i due seguenti risultati, in relazione alla superficie omaloide normale $F_2^{n^2}$ a due dimensioni, di cui ho parlato nella prefazione, e in relazione alla superficie omaloide normale a tre dimensioni $F_3^{n^3}$ dell' ordine n^3 e dello spazio a $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}-1$ dimensioni, la quale ultima viene rappresentata punto per punto nello spazio a tre dimensioni mediante le sue superficie di ordine n. Da questa superficie si deducono per projezione univoca tutte le superficie omaloidi a tre dimensioni di uno spazio $S_m\left(m<\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}-1\right)$ rappresentabili nello spazio ordinario mediante superficie d'ordine n o minore di n. E cioè:

Una trasformazione piana cremoniana d'ordine n fra 2 piani $\Sigma_2^{(1)}$ $\Sigma_2^{(n)}$ può essere sostituita da due projezioni univoche della superficie normale $F_2^{n^2}$ sopra un piano.

Il passaggio tra il piano $\Sigma_2^{(n)}$ e il piano $\Sigma^{(1)}$ può farsi mediante dei piani $\Sigma_2^{(n-1)}$, $\Sigma_2^{(n-2)}$ ecc. in corrispondenza d'ordine $(n-1)$, $(n-2)$ ecc. con $\Sigma^{(1)}$ ottenuti projettando la $F_2^{n^2}$ con spazî secanti a $\frac{n(n+3)}{2}-3$ dimensioni di specie differenti.

E così:

Una trasformazione cremoniana tra due spazî $\Sigma_3^{(n)}$, $\Sigma_3^{(1)}$ a tre dimensioni può essere sostituita da due projezioni univoche della superficie omaloide normale $F_3^{n^3}$ dello spazio a $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}-1$ dimensioni fatte con spazî a $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}-5$ dimensioni nello spazio ordinario.

Il passaggio tra lo spazio $\Sigma_3^{(n)}$ e $\Sigma_3^{(1)}$ può farsi mediante degli spazî $\Sigma_3^{(n-1)}$, $\Sigma_3^{(n-2)}$ ecc. in corrispondenza d'ordine $(n-1)$, $(n-2)$ ecc. con $\Sigma^{(1)}$, ottenuto per projezione univoca dalla $F_3^{n^3}$ con spazî secanti di differente specie.

§ 5. *Projezioni della* F_2^4 *nello spazio ordinario superficie di Steiner.*

38. Si vede anche dalla projezione piana della F_2^4 fatta da un piano secante di 1ª specie S_2 che tutte le superficie del nostro spazio (le quali come si sa sono sempre a due dimensioni) rappresentabili in un piano mediante un sistema triplamente infinito di curve di 2° ordine, sono una projezione della F_2^4 fatta da una retta S_1 dello spazio S_5 sul nostro spazio S_3. Infatti projettando da S_2 sulla F_2^4 il sistema di curve di 2° ordine, determinato da quattro coniche indipendenti di esso, si ottiene su F_2^4 un sistema triplamente infinito di curve C^4, e perciò di spazî S_4 che passano per una retta S_1, che è la retta di proiezione richiesta.

Le varie superficie che nel nostro spazio S_3 sono rappresentabili mediante un sistema triplamente infinito di curve di 2° ordine si ottengono projettando la F_2^4 dalle varie posizioni di una retta S_1 rispetto alla superficie F_2^4 stessa.

39. Consideriamo la posizione generale di una retta S_1. La superficie $F'_2{}^{(4)}$ di projezione è la nota superficie di Steiner, di cui voglio qui dedurre le proprietà principali projettive dalla F_2^4 stessa.

Lo spazio T_4 che congiunge la retta S_1 con una conica di F_2^4 contiene un'altra conica, la quale incontra la prima nel punto di contatto del piano tangente T_2 contenuto in T_4 (n. 4).

Il piano T'_2 d'intersezione di T_4 con lo spazio ordinario S_3, su cui si projetta può considerarsi come la projezione del piano T_2 fatta dalla retta S_1. Si ha dunque:

La $F'_2{}^4$ contiene ∞^2 coniche K'_2 situate due a due nei suoi piani tangenti T_2'. Il punto di contatto di T_2' è la projezione del punto d'incontro delle due coniche K, e le due rette osculatrici della $F'_2{}^{(4)}$ nel piano T_2' sono le projezioni delle due tangenti alle due coniche K.

Per la retta S_1 passano quattro spazî U_4 (n. 5) i quali toccano la F_2^4 lungo quattro coniche $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, dunque la $F'_2{}^{(4)}$ possiede quattro piani tangenti doppi, che toccano cioè la $F'_2{}^{(4)}$ lungo quattro coniche $u'^{(1)}$, $u'^{(2)}$, $u'^{(4)}$, $u'^{(4)}$, le quali possono essere nel caso generale tutte reali o immaginarie, due reali e due immaginarie, pure essendo la $F'_2{}^{(4)}$ reale.

La retta S_1 incontra tre piani secanti $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$, (n. 11 e 22), e quindi la $F'_2{}^4$ riceve tre rette doppie. Ma per la S_1 passa un piano secante di 2ª specie M_2 (n. 23) che passa per i tre punti d'incontro delle tre coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ dei tre piani secanti $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S^{(3)}$; dunque le tre rette doppie s'incontrano in un punto triplo della $F'_2{}^4$, cioè nel punto immagine dei tre punti d'incontro delle tre coniche K.

Le tangenti $t_1^{(1)}$ $t'_1{}^{(1)}$; $t_1^{(2)}$ $t'_1{}^{(2)}$; $t_1^{(3)}$ $t'_1{}^{(3)}$, che passano pei punti $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$,

$T_0^{(3)}$ d'incontro di S_1 coi tre piani $S_2^{(i)}$ alle tre coniche $K^{(i)}$ dànno per projezione i punti cuspidali $w_1^{(1)}$ $w'_1{}^{(1)}$; $w_1^{(2)} w'_1{}^{(2)}$; $w_1^{(3)}$ $w'_1{}^{(3)}$ delle rette doppie. Le coniche $u^{(i)}$ passano per tre dei 6 punti w, quindi le coniche $u'^{(i)}$ passano per 3 punti cuspidali di $F'_2{}^{(4)}$.

Dall'ultimo teorema del n. 27 si deduce:

Gli spigoli opposti del tetraedro formato dai quattro piani delle coniche $u'^{(i)}$ sono incontrati rispettivamente dalle tre rette doppie.

La maggior parte dei teoremi del n. 4 si enunciano nello stesso modo per la superficie di Steiner $F'_2{}^4$, per es. si ha: Due coniche K' non situate in un piano tangente si tagliano in un punto. La $F'_2{}^4$ ha ∞^5 curve C'^4 razionali del 4° ordine di 1ª specie (¹), le quali s' incontrano due a due in quattro punti, e che incontrano le coniche K' in due punti. Per un punto A'_0 di $F'_2{}^4$ passano due coniche che toccano una curva C'^4 data.

Le curve C'^4 di un *fascio*, che passano cioè per quattro punti, incontrano una conica K' in due punti mobili che generano un'involuzione. Per un punto A'_0 di $F'_2{}^4$ passano due C'^4 che toccano quattro coniche date K'; le C'^4 che toccano quattro coniche date formano una *schiera*. Pel punto A'_0 passano due coniche K' che incontrano una C'^4 della schiera; le tangenti a queste coniche generano un'involuzione i cui raggi doppi sono le tangenti condotte in A'_0 alle due curve C'^4 della schiera passanti per esso.

Dal n. 6 sappiamo che tutti gli spazi U_4 tangenti lungo le coniche K, che toccano una C^4, formano un cono γ^4. Se il vertice di questo cono è sulla S_1 (sappiamo che tutti questi coni e le curve C^4 corrispondenti formano una schiera) gli spazi R_3, determinati dal piano di una conica K e dal piano tangente nel punto di contatto A_0 colla C^4 passano pel vertice del cono γ^4 (n. 8), e per conseguenza sono situati in spazi T_4 colla S_1 stessa. Quindi la tangente comune in A_0 alla conica K e alla curva C^4 viene projettata nella tangente in A'_0 alla K' e alla curva C'^4; vale a dire questa tangente è una retta osculatrice di $F'_2{}^4$ passante per il punto A'_0. La C^4 tocca le quattro coniche $u^{(i)}$ dei quattro spazi U_4 passanti per la retta, quindi abbiamo che tutte le curve C'^4 che toccano le quattro coniche $u'^{(i)}$ sono le c u r v e a s s i n t o t i c h e della superficie di Steiner.

Una piramide H (n. 14) viene projettata in una piramide H', composta di tre coniche $K'^{(1)}$, $K'^{(2)}$, $K'^{(3)}$ che s'incontrano in tre punti, e dai tre piani tangenti in questi tre punti.

Dal n. 19 si ha: Una curva C'^4 della $F'_2{}^4$ incontra le tre coniche K' di ∞^3 piramidi H' in coppie di punti, che dividono armonicamente le coppie dei tre punti d'incontro delle coniche K'.

Dal teorema del n. 25 si ha:

I piani tangenti che passano per una retta doppia formano due a due un'involuzione, i cui piani tangenti doppi hanno i loro punti di contatto nei due punti

(¹) Nella mia citata Memoria ho distinto le curve di un dato genere in specie. Quello della 1ª specie sono le più generali. Nel caso speciale della curva del 4° ordine in R_3, la curva razionale di 1ª specie è la curva del 4° ordine che si chiama comunemente di 2ª *specie*. Mi pare che la mia distinzione che fa dipendere le *specie* non già dal genere, ma dalle singolarità possibili con un dato genere, sia molto opportuna.

cuspidali, e nella quale si corrispondono i piani che uniscono quella retta con le altre due rette doppie.

Così pure dal n. 26 si ha projettando:

Le tangenti alle coniche situate nei piani passanti per la retta doppia nei punti d'incontro con questa retta costituiscono una superficie rigata del 3° ordine, la cui retta semplice è situata nel piano delle altre due rette doppie.

Uno spazio R_3 qualunque passante per la retta S_1 incontra lo spazio ordinario S_3 in un'altra retta X_1, che può considerarsi come una retta qualunque di S_3. Ma R_3 incontra tre piani tangenti della F_2^4 in tre rette $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $a_1^{(3)}$ (n. 28), che vengono projettate da S_1 nella X_1, e quindi per X_1 passano tre piani tangenti T'_2 della $F'^{(4)}_2$, vale a dire: la superficie di Steiner è di 3ª classe.

Così pure le configurazioni formate da quattro punti qualunque della F_2^4 rispetto allo spazio S_3 passanti per essi, vengono projettate in altrettante configurazioni analoghe per la superficie di Steiner.

Queste sono le proprietà principali della superficie di Steiner in gran parte trovate dagli illustri geometri che ho menzionati nella prefazione; si vede però qui come risultino con grande spontaneità dalla F_2^4 stessa, e come si deve operare in casi simili per ottenere proprietà di superficie già note o non ancora studiate.

40. Gli spazi U_4 passanti per una retta S_1 possono essere tutti o in parte coincidenti. I due casi in cui coincidono due, o tre spazi U_4 corrispondono ai due casi speciali della superficie di Steiner considerati l'uno dal Clebsch, l'altro dal Cremona.

Se la retta S_1 giace in un piano tangente T_2 di F_2^4 essa viene incontrata da ∞^1 piani secanti di 1ª specie, cioè da quelli che passano pel punto di contatto del piano T_2, e quindi projettando la F_2^4 dalla S_1 si ottiene nello spazio ordinario S_3 un cono di 2° grado, considerato come doppio, il cui vertice è il punto d'intersezione del piano tangente T_2 collo spazio ordinario.

Se la retta S_1 incontra la F_2^4 in un punto si ottiene in S_3 la superficie rigata del 3° ordine, la quale viene meglio studiata mediante la superficie normale rigata dello spazio S_4 [1].

Se la retta S_1 incontra la F_2^4 in due punti si ha nello spazio ordinario la superficie di 2° ordine. Da ciò che precede si vede pure perchè la superficie di Steiner ammette una projezione univoca in un piano Σ_2, cioè quella fatta dal suo punto triplo. Questa projezione è precisamente quella della F_2^4 fatta sul piano Σ_2 dal piano secante M_2, passante per la retta S_1. Si vede anche perchè non si può ottenere per projezione la rappresentazione piana della superficie di Steiner d'ordine minimo, cioè mediante le curve di 2° ordine di un sistema triplamente infinito, perchè per la retta S_1 non passa alcun piano secante di 1ª specie.

Tagliando poi la F_2^4 con uno spazio a tre dimensioni si ottengono le differenti specie delle superficie reciproche di quelle dinanzi considerate, e che vengono rappresentate nel piano da un sistema triplamente infinito di curve di 2ª classe.

(¹) A. l. c. pag. 229.

Studî sui composti della serie del pirrolo.
Parte ottava.
Sull'azione di alcune anidridi organiche sul pirrolo.

Memoria di G. CIAMICIAN e M. DENNSTEDT

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

Durante l'anno accademico trascorso, abbiamo presentato a questa Accademia alcune Note ([1]) preliminari, contenenti la descrizione sommaria di esperienze che avevano per soggetto lo studio dell'azione delle anidridi acetica, benzoica e ftalica sul pirrolo. Avendo ora condotto a termine queste ricerche, pubblichiamo nella presente Memoria la descrizione dettagliata di tutte le reazioni e di tutte le sostanze da noi scoperte durante questo tempo.

Prima di entrare nell'esposizione dei fatti, vorremmo proporre un tentativo di nomenclatura pei derivati del pirrolo, che descriveremo più sotto, dando dei nomi speciali ad alcuni residui del pirrolo che si riscontrano nei varî composti.

Noi chiameremo:

Pirroile il residuo « C_4H_3NH »,
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad CO$

Pirrile il residuo « C_4H_3NH »,

Pirrilene il residuo « C_4H_2NH » e

Pirrolene il residuo « C_4H_3N ».

I. Il pseudoacetilpirrolo o pirrilmetilchetone « $(C_4H_3NH).CO.CH_3$ ».

Come è noto ([2]), trattando il pirrolo con anidride acetica si ottengono due composti isomeri, l'uno dei quali ha il comportamento di un vero acetilpirrolo, mentre l'altro contiene ancora un atomo di idrogeno sostituibile dall'argento. Per stabilire la costituzione di quest'ultimo, abbiamo eseguito le seguenti esperienze, che dimostrano come a questo corpo si debba attribuire la formola soprascritta.

Prima di tutto abbiamo voluto accertarci, che il pseudoacetilpirrolo ha realmente un peso molecolare corrispondente alla formula C_6H_7NO. Una determinazione della sua densità di vapore, fatta per spostamento d'aria col metodo di Vittorio Meyer in un bagno di lega metallica ad una temperatura di circa 320°, diede numeri che

([1]) *Sull'azione dell'anidride acetica e benzoica sul pirrolo.* Transunti, febbraio 1884. — *Sull'azione dell'anidride ftalica sul pirrolo.* Transunti, aprile 1884.

([2]) Vedi Ciamician e Dennstedt, *Studî sui composti della serie del pirrolo.* Parte VI, vol. XV. Memorie della Classe di scienze fisiche ecc. *L'acetilpirrolo ed il pseudoacetilpirrolo*, 1883.

sono conformi a quelli richiesti dalla formula suddetta. La sostanza si gassifica senza alterarsi minimamente.

0,0590 gr. di sostanza, spostarono gassificandosi 13,4 c.c. di aria, misurati a 25° e 761,2 mm.

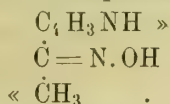
densità trovata	densità calcolata
3,83	3,76

1. *Pirrilmetilacetossime.*

Per ottenere questo composto si riscaldano a b. m. per alcune ore 4 gr. di pseudoacetilpirrolo con 3 gr. di cloridrato di idrossilamina in soluzione di alcool metilico, aggiungendo 4 gr. di carbonato sodico. Il liquido resta scolorato, non adoperando il carbonato alcalino, il liquido diventa invece giallo-bruno e questa colorazione si rende ancora più manifesta se si aggiunge in principio qualche goccia d'acido cloridrico.

Si filtra il liquido dal cloruro sodico e si svapora a secco la soluzione alcoolica. Il residuo solido e bianco vien fatto cristallizzare dall'acqua bollente, scolorando la soluzione con nero animale. Per raffreddamento si separano piccoli aghi bianchi, che dopo 3 o 4 cristallizzazioni fondono costantemente a 145°-146°. I cristalli stando a lungo esposti alla luce prendono un colore grigio.

Le analisi diedero numeri che corrispondono alla formola:

$$\begin{array}{c} C_4H_3NH \text{ »} \\ \dot{C}=N.OH \\ \text{« } \dot{C}H_3 \end{array}$$

I. — 0,2984 gr. di sostanza diedero 0,6316 gr. di CO_2 e 0,1820 gr. di OH_2.
II. — 0,1994 gr. di sostanza svolsero 37,5 c.c. di azoto misurati a 8°,5 e 764 mm.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_6H_8N_2O$
C	57,73	—	58,06
H	6,78	—	6,45
N	—	22,78	22,58

Facendo bollire il pirrilmetilacetossime con acido cloridrico diluito, si ripristina il pseudoacetilpirrolo e l'idrossilamina.

2. *Azione della fenilidrazina sul pseudoacetilpirrolo.*

Per stabilire con maggiore sicurezza la natura chetonica del pseudoacetilpirrolo, abbiamo creduto opportuno di vedere se questo corpo dà anche la reazione scoperta recentemente da E. Fischer [1], reazione sensibilissima per riconoscere i chetoni e le aldeidi.

Mescolando una soluzione di pseudoacetilpirrolo nell'acqua bollente, con una soluzione non troppo diluita di cloridrato di fenilidrazina, trattata con acetato sodico, si ottiene per raffreddamento un' opalescenza lattiginosa, che si trasforma dopo qualche

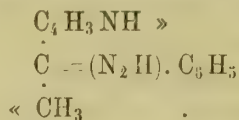
[1] Berl. Ber. XVII. 572.

tempo in un precipitato di piccoli aghetti bianchi. La soluzione ed il precipitato acquistano però dopo qualche ora un colore rossastro intenso.

4 gr. di pseudoacetilpirrolo vennero trattati, in soluzione acquosa con 6 gr. (calcolato 4,7 gr.) di cloridrato di fenilidrazina e 4 gr. (calcolato 3,77 gr.) di acetato sodico. Il composto cristallino che si forma aveva un colore lievemente roseo, e venne filtrato dal liquido intensamente rosso. Sciogliendolo nell'alcool diluito e bollente si ottiene una soluzione colorata in rosso, che diventa azzurro-verdastra aggiungendovi carbone animale. Per raffreddamento si separa una polvere biancastra che dopo quattro cristallizzazioni dallo stesso solvente fonde a 146°-147°.

Il nuovo composto forma una polvere bianca che all'aria diventa dopo poco tempo grigio-verdastra. È notevolmente solubile nell'alcool e solubilissima nel benzolo. Nell'acqua bollente si scioglie in piccola quantità, separandosi per raffreddamento in fiocchi bianchi. Sembra però che in questo caso avvenga una parziale decomposizione della sostanza.

Una determinazione di azoto, diede numeri concordanti colla formola:

$$\begin{array}{l} C_4H_3NH \;» \\ C = (N_2H).C_6H_5 \\ « \; CH_3 \end{array}$$

0,1007 gr. di sostanza svolsero 19 c.c. di azoto misurati a 25° e 763 mm.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_{12}H_{13}N_3$
N	21,23	. . . .	21,10

Bollendolo con acido cloridrico diluito, il composto in questione si scinde in fenilidrazina ed in pseudoacetilpirrolo.

3. *Azione dell'aldeide benzoica sul pseudoacetilpirrolo.* (Pirrilcinnamilchetone).

Il pseudoacetilpirrolo dà come l'acetone e l'acetofenone [1], facilmente un prodotto di condensazione con l'aldeide benzoica.

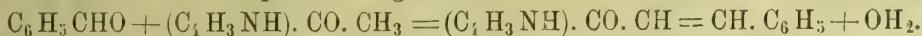
Si fa bollire per circa un quarto d' ora, in un apparecchio a ricadere, parti eguali di pseudoacetilpirrolo ed aldeide benzoica con una soluzione diluita di potassa. Dopo questo tempo l'aldeide sparisce, ed il contenuto del pallone è formato da un liquido oleoso piuttosto denso, galleggiante sulla soluzione alcalina. Per raffreddamento l'olio si solidifica formando una massa gialla e cristallina, che si filtra e si lava con acqua fredda, nella quale il nuovo composto è affatto insolubile, fino che il filtrato non ha più reazione alcalina. La materia così ottenuta venne fatta cristallizzare dall'alcool bollente nel quale è poco solubile. Per raffreddamento si separano aghi gialli, che dopo quattro successive cristallizzazioni dall'alcool bollente, anche aggiungendo carbone animale conservano un colore giallo pallido. Fondono costantemente a 141-142°.

[1] Vedi L. Claisen e A. C. Ponder, Liebig's Ann. d. Chemie, 223, 137.

Il nuovo composto è insolubile nell'acqua, abbastanza solubile nell'alcool bollente, e facilmente solubile nell'etere. All'analisi diede numeri, che corrispondono alla formola di un:

pseudocinnamilpirrolo « $C_4H_3NH.CO.CH=CH.C_6H_5$ »,

che si forma secondo l'equazione seguente:

$$C_6H_5CHO + (C_4H_3NH).CO.CH_3 = (C_4H_3NH).CO.CH = CH.C_6H_5 + OH_2.$$

0,2997 gr. di sostanza dettero 0,8710 gr. di CO_2 e 0,1562 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{11}NO$
C	79,26	79,19
H	5,79	5,58

Composto argentico $[(C_4H_3NAg).CO.CH=CH.C_6H_5]$, per ottenere questa sostanza bisogna ricorrere ad un piccolo artifizio; trattando una soluzione alcoolica del pseudocinnamilpirrolo con una soluzione alcoolica di nitrato argentico ed aggiungendo alcune goccie di una soluzione alcoolica di ammoniaca, non si ottiene nessun precipitato. Versando il liquido nell'acqua si forma un precipitato di aghi gialli che oltre al composto argentico, contiene pure della sostanza inalterata.

1 gr. di materia venne trattato in soluzione alcoolica con 0,86 gr. di nitrato argentico come sopra; il liquido giallo venne liberato, filtrandolo, da alcuni fiocchi nerastri che conteneva sospesi, ed indi mescolato con acqua. Il precipitato ottenuto venne filtrato, lavato con acqua e seccato. Per separare il composto argentico così ottenuto dalla sostanza inalterata che lo accompagna, esso venne lavato ripetutamente con etere, il quale non lo altera punto.

L'analisi diede i seguenti risultati:

0,2642 gr. di materia dettero 0,0934 gr. di argento.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{10}ONAg$
Ag	35,35	35,53

Questo composto è insolubile nell'ammoniaca.

Noi abbiamo fatto agire il bromo sul pseudocinnamilpirrolo nell'intenzione di ottenere un prodotto di addizione; sembra però invece, che trattando questa sostanza, in soluzione di acido acetico glaciale, colla quantità calcolata di bromo, non si formi che un miscuglio di un monobromo e di un bibromopseudocinnamilpirrolo. Mescolando una soluzione di pseudocinnamilpirrolo (5 gr.) con una soluzione di bromo (4,06 gr.) nell'acido acetico glaciale, questo viene assorbito completamente, sebbene il liquido resti colorato in giallo ranciato. Si versa questo nell'acqua ottenendo un precipitato biancastro. Versando la soluzione acetica nell'acqua si nota uno svolgimento d'acido bromidrico.

Il precipitato venne seccato e fatto cristallizzare dall'alcool bollente. Dopo una lunga serie di cristallizzazioni frazionate si sono potute separare due sostanze, l'una meno solubile, fondente a 225°, l'altra più solubile, che fondeva a 175-177°. Tutte e due queste frazioni però, abbenchè avessero un punto di fusione costante, non erano sostanze perfettamente pure, come lo dimostrano le seguenti analisi:

	frazione fondente a 225°	$C_{13}H_9Br_2NO$ bibromopseudo-cinnamil-pirrolo	$C_{13}H_{11}Br_2NO$ bibromuro di pseudocinna-milpirrolo	$C_{13}H_{10}BrNO$ monobromo-pseudocin-namilpirrolo	frazione fondente a 175-177°
C	45,72	43,94	43,70	56,52	——
H	2,99	2,53	3,08	3,62	——
Br	43,51	45,07	44,82	28,98	30,68

Come apparisce dal presente specchietto si può ammettere con probabilità che per azione di una molecola di bromo sul pseudocinnamilpirrolo si formi principalmente un miscuglio di *monobromo-* e *bibromopseudocinnamilpirrolo*, mentre una parte della sostanza rimane inalterata. Questo fatto avviene probabilmente in seguito alla grande tendenza che ha il pirrolo a scambiare completamente con gli alogeni i quattro atomi di idrogeno disponibili.

Noi non abbiamo reputato conveniente di continuare queste esperienze, non considerandole di tanto interesse per sacrificarvi ingenti quantità di materiale.

II. L'acido pirroilcarbonico, pirrilgliossilico o pirrolcarbochetonico « $(C_4H_3NH).CO.COOH$ ».

Le esperienze or descritte dimostrano sufficientemente che la costituzione del pseudoacetilpirrolo, non può essere altra che quella espressa dalla formola $(C_4H_3NH).CO.CH_3$; si può ammettere perciò con grande probabilità che l'acido che si ottiene da questo composto per ossidazione (¹), abbia la forma soprascritta.

Noi abbiamo tentato di trasformare l'acido pirroilcarbonico in un acido carbopirrolico, ossidandolo col camaleonte, ma sembra che per quanto l'ossidazione sia lenta e moderata non si possa evitare la combustione completa.

L'etere metilico $[(C_4H_3NH).CO.COOCH_3]$ si ottiene facilmente dal sale argentico, trattando questo con joduro metilico a 100°. Per preparare il sale argentico è conveniente di saturare in parte coll'ammoniaca la soluzione acquosa dell'acido, prima di trattarla col nitrato d'argento.

7 gr. di sale argentico perfettamente secco vennero riscaldati in tubi chiusi, a 100°, per un' ora, con un eccesso di joduro di metile. Il contenuto dei medesimi è formato da una massa verdastra. Si scaccia l'eccesso del joduro metilico a b. m., e si esaurisce la massa con etere. La soluzione eterea, che ha un colore rosso intenso, viene scolorata con carbone animale e svaporata. Si ottiene così un olio che si solidifica dopo qualche tempo formando una materia cristallina colorata in giallo, che ha un odore che ricorda moltissimo quello dell'etere metilico dell'acido carbopirrolico. Per purificarla la si fa cristallizzare dal benzolo bollente, nel quale è molto solubile. Per svaporamento spontaneo si ottengono così facilmente tavolette senza colore o leggermente tinte in giallo, che fondono a 70-72° formando un liquido senza colore, che bolle con notevole decomposizione a 285°. Da 14 gr. di sale argentico si ottennero 7 gr. di etere.

(¹) Vedi la Memoria già citata: *Studi sui composti* ecc. Parte VI.

L'analisi diede i seguenti risultati:

0,2982 gr. di sostanza dettero 0,5994 gr. di CO_2 e 0,1290 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_7H_7NO_3$
C	54,82	. . . .	54,90
H	4,81	. . . .	4,57

L'etere metilico dell'acido pirroilcarbonico è solubilissimo nell'etere, nel benzolo e nell'alcool bollente, poco solubile nell'acqua ed insolubile nell'etere petrolico. La sua soluzione acquosa dà con nitrato argentico ed alcune goccie di ammoniaca un precipitato giallo, che si annerisce se si riscalda il liquido. L'etere metilico dà con l'acido cloridrico l'istessa reazione che si ha con l'acido libero.

Per lento svaporamento di una soluzione dell'etere nel benzolo, si ottengono facilmente dei cristalli bene sviluppati che furono studiati cristallograficamente dall'ing. sig. Giuseppe La Valle, alla cui gentilezza dobbiamo le seguenti misure.

« I cristallini misurati furono 6, e si ottennero i seguenti risultati:

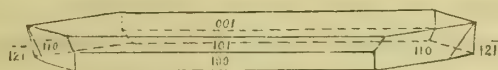
« Sistema cristallino: Monoclino.

« $\eta = +X : +Z = 92^\circ 15' 10''$.

« $a : b : c = 1,16058 : 1 : 1,47454$.

« Forme osservate: (100), (101), (001), (110), (12$\bar{1}$).

$\infty \bar{P} \infty , \; + \bar{P} \infty , \; 0P , \; \infty P , \; +2 \grave{P} 2$.

« Combinazioni osservate: (100)(101)(001) 110)($\bar{1}$10) e la medesima più la faccia 12$\bar{1}$.

Angoli	Misurati		Calcolati
	Medie	Limiti	
100:101	37°20′20″	37° 4′ — 37°32′	*
101:001	50°24′30″	50°15′ — 50°31′	*
101:110	58°43′15″	58°34′ — 58°54	*
100:110	49°12′54″	49° 7′ — 49°20′	49°13′43″
110:001	88°40′ —	88°22′ — 88°57′	88°31′44″
12$\bar{1}$:110	24°56′ —	————	24°52′50″
12$\bar{1}$:100	68°38′ —	————	68°24′40″
12$\bar{1}$:00$\bar{1}$	73°30′ —	————	73°30′22″
12$\bar{1}$:$\bar{1}$10	64°37′ —	————	64°44′46″

« Sulla faccia (001) si è osservato un apice d'iperbole, da cui si conchiuse che « il piano degli assi ottici è (010), e che la dispersione è inclinata. Altre osserva- « zioni ottiche non è stato possibile di fare, non avendo avuto sufficiente materiale « disponibile.

« La sfaldatura è perfetta e facilissima secondo la faccia (100).

« L'abito dei cristalli è tabulare, almeno così lo era in tutti i cristalli stu- « diati, con la (001) molto più sviluppata delle altre; la (12$\bar{1}$) si è osservata in due « cristalli, in uno solo dei quali si è potuta sottoporre a delle misure goniometriche ».

III. Il pseudoacetilmetilpirrolo « $(C_4H_3NCH_3).CO.CH_3$ ».

1. *Preparazione del metilpirrolo* $(C_4H_4NCH_3)$.

Il metilpirrolo finora non è stato ottenuto che dal mucato di metilamina [1], noi lo abbiamo preparato dal composto potassico del pirrolo e joduro di metile.

Il joduro metilico non agisce notevolmente sul composto potassico del pirrolo a pressione ordinaria; rinchiudendo però queste due sostanze in un tubo, la reazione avviene dopo qualche tempo accompagnata da un forte sviluppo di calore. 100. gr. di composto potassico furono distribuiti a parti eguali, in 4 tubi, ed a ciascuno di essi vennero aggiunti 35 gr. di joduro metilico. Pochi minuti dopo che i tubi furono chiusi, incominciò una viva reazione in modo che il liquido bolliva nell'interno dei medesimi. Quando la reazione spontanea fu terminata, i tubi vennero riscaldati ancora per qualche tempo a b. m. [1]. Il prodotto della reazione è una massa semi-solida giallo-bruna, che venne posta in un pallone e distillata con vapor acqueo. Assieme all'eccesso di joduro metilico passa il nuovo prodotto, formando col primo un olio più pesante dell'acqua. Nel pallone resta indietro, sospesa nella soluzione acquosa, una notevole quantità di materia resinosa. Il distillato venne estratto con etere, seccato con cloruro di calcio e sottoposto alla distillazione frazionata. Il liquido passa fra 100° e 125°, non tenendo conto della prima frazione che è formata precipuamente dall'etere e dal joduro metilico rimasto in eccesso. Dopo ripetute distillazioni la maggior parte del prodotto (17 gr.) bolle fra 115-117°. Le frazioni che passano sopra 120° vengono sensibilmente attaccate dal potassio. Distillando nuovamente la frazione 115°-117°, si ha un punto di ebollizione costante a 114°-115° (la colonna a mercurio del termometro essendo tutta immersa nel vapore) ad una pressione di 747,5 mm., che noi riteniamo quale punto di ebollizione del metilpirrolo. Ch. Bell trovò pel suo prodotto il punto di ebollizione a 112°-113°.

Il liquido così ottenuto ha un odore particolare ben distinto da quello del pirrolo, al quale però somiglia notevolmente. Il metilpirrolo si altera facilmente all'aria ed alla luce.

L'analisi diede i seguenti numeri:

0,3437 gr. di sostanza dettero 0,9332 gr. di CO_2 e 0,2714 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per C_5H_7N
C	74,05	74,07
H	8,77	8,64

2. *Azione dell'anidride acetica sul metilpirrolo.*

Facendo agire il joduro di metile sul composto argentico del pseudoacetilpirrolo non si ottiene un prodotto metilato, ma si ripristina invece il pseudoacetilpirrolo.

Noi abbiamo tentato di introdurre l'acetile direttamente nel metilpirrolo, per

[1] Ch. Bell, Berl. Ber. 10, 1866.

[1] Noi crediamo che sia forse più vantaggioso di non riscaldare i tubi a b. m., per evitare la resinificazione che è appena sensibile dopo terminata la reazione spontanea.

stabilire se la presenza dell'idrogeno imidico libero avesse un' influenza sull'andamento della reazione. L'operazione venne eseguita nel modo che abbiamo già descritto per la preparazione del pseudoacetilpirrolo. Si riscaldano 10 gr. di metilpirrolo (bollente fra 115-117°) con 70 gr. di anidride acetica, e 12 gr. di acetato sodico fuso di fresco, in un apparecchio a ricadere, in un bagno ad olio, mantenendo il liquido in ebollizione per 10 o 12 ore. Il contenuto del pallone è semi-solido e colorato in bruno. Si distilla nel vuoto a b. m. per allontanare l'eccesso di anidride acetica e la parte del metilpirrolo rimasta inalterata, però non è possibile di evitare che anche una parte del nuovo prodotto passi assieme all'anidride acetica. Il residuo viene trattato con acqua e distillato con vapor acqueo; passano piccole quantità di un olio più pesante dell'acqua, mentre la maggior parte del prodotto resta indietro. Distillato e residuo vennero estratti con etere, e siccome si vide che le due frazioni contenevano l'istesso composto, esse furono riunite. Il liquido ottenuto distilla, dopo che è passato l'etere, fra 195° e 205° quasi completamente. Dopo alcune rettificazioni la maggior parte del prodotto bolle costantemente a 200-202°.

L'analisi diede i seguenti risultati:

0,1840 gr. di materia dettero 0,4589 gr. di CO_2 e 0,1221 gr. di OH_2.

In 100 parti:

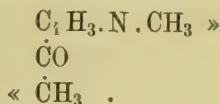
	trovato	calcolato per C_7H_9NO
C	68,02	68,29
H	7,37	7,32

Il nuovo composto è un liquido più pesante dell'acqua, bolle a 200-202°, ed ha un odore che ricorda quello dei vapori del pseudoacetilpirrolo. Esso è poco solubile nell'acqua, trattandolo con una soluzione di nitrato d'argento non si altera, aggiungendo alcune goccie di ammoniaca e riscaldando, si ottiene uno specchio di argento metallico. Esso è poco alterabile all'aria ed alla luce, il suo vapore arrossa però una scheggia d'abete bagnata di acido cloridrico. Bollito con una soluzione di potassa in un apparecchio a ricadere non si altera.

Il composto or descritto ha dunque la composizione ed il comportamento di un

pseudoacetilmetilpirrolo,

la di cui costituzione è espressa dalla formola:

$$\begin{array}{c} C_4H_3.N.CH_3 \text{ »} \\ \dot{C}O \\ \text{« } \dot{C}H_3 \text{ .} \end{array}$$

Questa esperienza dimostra dunque che si può introdurre l'acetile nel pirrolo anche quando l'idrogeno imidico è sostituito da un radicale alcoolico, e che perciò il pseudoacetilpirrolo si può formare direttamente, senza che sia necessario di ammettere, che l'acetile sostituisca prima l'idrogeno imidico e passi poi per una trasposizione molecolare al posto di uno degli idrogeni dei quattro atomi di carbonio.

IV. Il dipseudoacetilpirrolo o pirrilendimetildichetone « $(C_4H_2NH).(COCH_3)_2$ ».

Trattando il pseudoacetilpirrolo con anidride acetica in tubi chiusi a temperatura elevata, si riesce facilmente ad introdurre un secondo gruppo acetilico al posto di un altro atomo d'idrogeno, mentre resta sempre intatto l'idrogeno imidico.

Il composto per cui noi proponiamo i nomi soprascritti si ottiene nel seguente modo. Si riscaldano per alcune ore in tubi chiusi 3 gr. di pseudoacetilpirrolo con 10-15 gr. di anidride acetica a 230°-250°. Se la temperatura è inferiore ai 230° non si ottiene che delle tracce del nuovo composto. Impiegando invece di un forte eccesso, la quantità calcolata di anidride (5 gr.) si forma molto più resina. Il contenuto dei tubi, che è formato da una materia nera ed in parte carbonizzata, viene esaurito con acqua bollente, neutralizzando la soluzione con carbonato sodico. Si estrae con etere la soluzione acquosa, ed il residuo dell'estratto etereo, che è formato da piccole pagliette gialle, viene fatto cristallizzare alcune volte dall'acqua bollente, aggiungendo carbone animale.

Si ottengono per raffreddamento, bellissimi aghi quasi senza colore, che fondono a 161-162°. La sostanza non è però ancora perfettamente pura, e per toglierle le ultime tracce di materie estranee conviene farla sublimare ed indi cristallizzare ancora una volta dall'acqua bollente. Si ottengono così aghetti del tutto incolori che hanno però lo stesso punto di fusione 161-162°.

Da 9 gr. di pseudoacetilpirrolo se ne ottengono 3 del nuovo composto.

Distillando la materia nera, resinosa, che resta indietro nell'estrazione del contenuto dei tubi coll'acqua bollente, si ottengono ancora delle piccole quantità di sostanza cristallina.

L'analisi diede i seguenti risultati:

0,3296 gr. di materia dettero 0,7636 gr. di CO_2 e 0,1782 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_8H_9NO_2$
C	63,18	63,58
H	6,01	5,96

Il dipseudoacetilpirrolo si scioglie nella potassa bollente, per raffreddamento si separa una sostanza cristallizzata in aghi bianchi che sono solubili nell'acqua, ma insolubili nell'etere. Se si concentra la soluzione alcalina, il composto si separa anche dal liquido bollente. Questa materia è evidentemente il composto potassico del dipseudoacetilpirrolo. Trattando la sua soluzione acquosa con un acido si ottiene, se questa era molto concentrata, un precipitato di squamette bianche del dipseudoacetilpirrolo rigenerato, se la soluzione era diluita conviene estrarre con etere. Un forte eccesso d'acqua sembra essere già in grado di scindere questo composto, perchè diluendo molto una soluzione del dipseudoacetilpirrolo nella potassa, questo può venir estratto parzialmente con l'etere della soluzione alcalina, ciò che non avviene affatto per soluzioni molto concentrate.

Composto argentico $[C_4H_2N.Ag(COCH_3)_2]$. Trattando una soluzione acquosa del

dipseudoacetilpirrolo con una soluzione contenente la quantità calcolata di nitrato argentico, non avviene nessuna reazione sensibile, si ottiene però subito un precipitato bianco, aggiungendo alcune goccie di ammoniaca. Il composto argentico così ottenuto forma una polvere bianca solubile in un eccesso di ammoniaca ed insolubile nell'acqua anche bollente. Bollendolo per molto tempo con acqua esso diventa nero.

L'analisi diede i seguenti numeri:

I. 0,4208 gr. di materia dettero 0,1763 gr. di argento.

II. 0,4212 gr. di materia dettero 0,1759 gr. di argento.

In 10 parti:

	trovato		calcolato per $C_8 H_8 NO_2 Ag$
	I	II	
Ag	41,90	41,76	41,86

Nell'istesso modo che il pseudoacetilpirrolo dà con una molecola d'aldeide benzoica un prodotto di condensazione, il dipseudoacetilpirrolo agisce contemporaneamente su due molecole d'aldeide, trasformandosi in un

dipseudocinnamilpirrolo $(C_4 H_2 NH) . (CO . CH = CH . C_6 H_5)_2$.

Riscaldando 3 gr. di sostanza con 4,3 gr. (calcolato 4,21) di aldeide benzoica con una soluzione di potassa, si ottiene da principio un olio d'un colore giallo ranciato, che dopo qualche minuto di ebollizione si solidifica formando delle squamette dello stesso colore. Si filtra e si lava il nuovo prodotto fino che l'acqua di lavaggio non ha più reazione alcalina.

La materia così ottenuta venne polverizzata e fatta bollire con una quantità d'alcool insufficiente a scioglierla completamente. Si ottennero in questo modo due frazioni, che dopo alcune cristallizzazioni dall'acido acetico glaciale mostrarono lo stesso punto di fusione 238-240°. La nuova sostanza si separa da questo solvente, per raffreddamento in piccoli aghi appiattiti o in leggere squamette d'un colore giallo chiaro.

L'analisi diede i seguenti risultati:

0,2519 gr. di sostanza dettero 0,7491 gr. di CO_2 e 0,1224 gr. di OH_2.

In 100 parti:

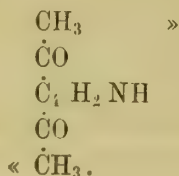
	trovato	calcolato per $C_{22} H_{17} NO_2$
C	81,11	80,73
H	5,40	5,20

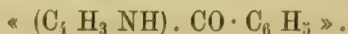
Il nuovo composto è poco solubile nell'alcool anche bollente, più solubile nell'acido acetico glaciale; esso si scioglie nell'acido solforico concentrato dando una soluzione d'un colore violetto intenso, che versata nell'acqua vi produce un precipitato bianco e fioccoso.

Riscaldato sopra il suo punto di fusione, il dipseudocinnamilpirrolo si scompone emettendo vapori di aldeide benzoica.

Dalle esperienze ora descritte noi crediamo si possa trarre la conchiusione, che

il prodotto che si forma per l'azione dell'anidride acetica sul pseudoacetilpirrolo abbia la costituzione espressa dalla formola:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ \dot{C}O \\ \dot{C}_4\,H_2\,NH \\ \dot{C}O \\ \dot{C}H_3 . \end{array}$$

Lo studio di questa sostanza sarà continuato.

V. Il pseudobenzoilpirrolo o pirrilfenilchetone « $(C_4\,H_3\,NH) . CO \cdot C_6\,H_5$ ».

La preparazione del pseudobenzoilpirrolo offre maggiori difficoltà di quella del pseudoacetilpirrolo, perchè nella reazione si producono sempre notevoli quantità di materia resinosa.

La via che noi abbiamo seguìta, dopo una serie di prove preliminari, è la seguente. Si riscalda in un apparecchio a ricadere, in un bagno ad olio a 200-240°, per circa otto ore, un miscuglio di 10 gr. di pirrolo con 35 gr. di anidride benzoica e 10 gr. di benzoato sodico secco. Se la temperature è inferiore a 200° una gran parte del pirrolo resta inalterata, se la temperatura è troppo elevata, aumenta notevolmente la resinificazione. L'anidride benzoica si scioglie nel pirrolo con notevole abbassamento di temperatura, riscaldando il miscuglio la massa diventa sempre più densa e prende un colore oscuro. Ad operazione terminata, il contenuto del pallone diviene quasi solido ed ha un colore nero. Si tratta la massa con acqua bollente e si satura l'acido benzoico che si è formato con carbonato sodico. Distillando con vapor acqueo passano piccole quantità di un olio più pesante dell'acqua, che ha un odore di mandorle amare, e resta indietro nel pallone una materia fusa, densa e nera sospesa nella soluzione alcalina. Quando il liquido acquoso che distilla incomincia a deporre degli aghetti per raffreddamento, si interrompe l'operazione.

Si filtra il liquido contenuto nel pallone di distillazione e si esaurisce la massa resinosa, che trattiene molto ostinatamente notevoli quantità del nuovo prodotto, con acqua bollente. I liquidi filtrati, che hanno un colore giallo più o meno carico, si intorbidano col raffreddamento e depongono dopo alcune ore degli aghi giallo-scuri. Si filtra e si estrae l'acqua madre con etere.

Il prodotto greggio così ottenuto (da 10 gr. di pirrolo se ne hanno 4,8) viene purificato facendolo cristallizzare molte volte dall'alcool bollente un poco diluito con acqua, aggiungendo carbone animale. Per raffreddamento delle soluzioni alcooliche, si ottengono piccoli aghetti, o squamette bianche, che fondono costantemente a 77-78°.

L'analisi diede i seguenti risultati:

I. 0,1775 gr. di sostanza dettero 0,4992 gr. di CO_2 e 0,0878 gr. di OH_2.

II. 0,3391 gr. di sostanza, cristallizzata ancora una volta dall'alcool, diluito con una piccolissima quantità di acqua, dettero 0,9575 gr. di CO_2 e 0,1679 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{11}H_9NO$
C	76,70	77,01	77,19
H	5,49	5,50	5,26

Il pseudobenzoilpirrolo è poco solubile nell' acqua bollente e pochissimo nella fredda, si scioglie invece molto facilmente nell' alcool. La potassa bollente non lo altera, nè lo scioglie notevolmente. Trattando una soluzione di pseudobenzoilpirrolo nell'alcool diluito con nitrato argentico ed alcune goccie di ammoniaca, si ottiene un precipitato biancastro che si scioglie molto difficilmente e con annerimento nell'acqua bollente.

Composto argentico [$(C_4H_3NAg).CO.C_6H_5$]. Non è facile di ottenere questo composto allo stato di perfetta purezza. Il seguente modo di preparazione ci sembra il migliore. Si tratta 1 gr. di pseudobenzoilpirrolo sciolto nell' alcool, con la quantità calcolata (1,1 gr.) di nitrato d'argento sciolto nell'acqua e si aggiunge alle soluzioni mescolate, alcune goccie di ammoniaca. Il liquido filtrato viene messo a svaporare spontaneamente sull' acido solforico. Dopo qualche tempo si separano dei piccoli mammelloni leggermente colorati in giallo del composto argentico, assieme a dei cristalli del pseudobenzoilpirrolo inalterato. Si filtra e si lava ripetutamente con alcool per eliminare il pseudobenzoilpirrolo.

Il composto argentico così ottenuto è molto alterabile e diventa bruno con grande facilità.

L'analisi diede i seguenti risultati:

0,2427 gr. di materia seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero 0,0928 gr. di argento.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{11}H_8NOAg$
Ag	38,24	38,85

L'olio suaccennato che passa col vapor acqueo nella preparazione del pseudobenzoilpirrolo, e che per l'analogia che questa operazione ha con la preparazione del pseudoacetilpirrolo, dovrebbe contenere il vero benzoilpirrolo, venne estratto dall'acqua con etere, seccato e distillato. Il liquido così ottenuto, non ha però un punto di ebollizione costante, ma passa dai 130° fino sopra ai 200°, e non si forma inoltre che in piccola quantità. Dovendo perciò abbandonare l'idea di sottoporre questo prodotto ad ulteriori ricerche, per non sprecare quantità troppo grandi di materiale, abbiamo cercato di preparare il vero benzoilpirrolo, facendo agire il cloruro di benzoile sul composto potassico del pirrolo. Ma anche questo tentativo fu poco fortunato, perchè il prodotto ottenuto non ha un punto di ebollizione costante, e perchè sembra inoltre che dalla maggior parte del composto potassico il pirrolo venga rigenerato.

VI. Sull'azione dell'anidride ftalica sul pirrolo.

Riscaldando in un bagno ad olio il pirrolo con la quantità necessaria di anidride ftalica a 180-200°, la massa si colora in giallo e si liquefà, formando un liquido nero, che entra in ebollizione emettendo notevoli quantità di vapor acqueo.

Il prodotto diventa sempre più vischioso, e si trasforma in una massa resinosa. Questo modo di preparazione però non è conveniente; per quanto si sieno mutate le condizioni dell' esperienza noi non abbiamo potuto ottenere con questo metodo che piccole quantità di materia cristallizzabile.

Noi abbiamo perciò seguìto un'altra via la quale ci ha dato rendimenti abbastanza soddisfacenti, abbenchè anche in questo caso non sia possibile di evitare del tutto la formazione di materie resinose. Si riscaldano 5 gr. di pirrolo con 11 gr. di anidride ftalica e con una quantità di acido acetico glaciale, il di cui volume è circa il triplo di quello del pirrolo impiegato, in tubi chiusi per 5 ore a 180-190°. Il contenuto dei tubi, dopo il riscaldamento, è formato da una massa semisolida e nera, che viene bollita ripetutamente con alcool. Si ottiene una soluzione bruno-rossastra e resta indietro una materia nera semicarbonizzata. Concentrando il liquido alcoolico si ottiene per raffreddamento una sostanza cristallina rosso bruna, che si purifica facendola cristallizzare alcune volte dall' alcool bollente, nel quale non è molto solubile, aggiungendo carbone animale. Si ottengono così per raffreddamento delle soluzioni alcooliche, dei finissimi aghi di splendore setaceo, d'un colore giallo carico, che fondono costantemente a 240-241°. Da 15 gr. di pirrolo se ne ottengono 5 di materia pura. Le prime acque madri hanno reazione acida e non contengono altro che dell'acido ftalico rigenerato dall'anidride.

Le analisi diedero i seguenti risultati:

I. 0,3696 gr. di sostanza dettero 0,9926 gr. di CO_2 e 0,1230 gr. di OH_2.

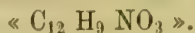
II. 0,2683 gr. di sostanza svolsero 16, 2 c. c. d'azoto, misurati a 12° e 752^{mm}.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per la formola
	I	II	$C_{12}H_7NO_3$
C	73,24	—	73,10
H	3,70	—	3,55
N	—	7,09	7,11

La nuova sostanza è insolubile nell'acqua, poco solubile nell'alcool, e notevolmente solubile nell'acido acetico e nell'etere. Essa è volatile e sublima facilmente in lunghi aghi gialli. Sembra ch'essa non contenga nessun atomo d'idrogeno sostituibile dall'argento, almeno non ci è stato possibile fin ora, di ottenere un composto argentico.

Il nuovo prodotto è un anidride; esso non si scioglie nella potassa fredda, ma bollendolo con una soluzione diluita di potassa si ottiene un liquido leggermente colorato in giallo, che per raffreddamento depone delle squamette bianche, che sono probabilmente il sale potassico del nuovo acido. Diluendo con acqua si ottiene una soluzione dalla quale l' etere nulla estrae. Acidificando con acido solforico diluito, il liquido diventa lattiginoso. Si estrae con etere, e si ottiene il nuovo prodotto in forma di una massa bianca e cristallina, che si fa cristallizzare dall'alcool bollente diluito con un egual volume d'acqua. Per raffreddamento si ottengono piccoli mammelloni leggerissimamente colorati in giallo che fondono scomponendosi fra 174 e 184°.

L'analisi diede numeri che conducono alla formola:

« $C_{12} H_9 NO_3$ ».

0,3714 gr. di materia dettero 0,9139 gr. di CO_2 e 0,1465 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12} H_9 NO_3$
C	67,11	66,97
H	4,38	4,18

Il nuovo acido è molto solubile nell'alcool e nell'etere, poco solubile nell'acqua, ed insolubile nel benzolo e nel toluene anche bollenti. Esso si trasforma con grande facilità nell'anidride da cui deriva. Riscaldandolo in un tubicino, esso fonde formando un liquido bruno e sviluppando vapori acquosi, mentre una parte della sostanza sublima alle pareti del tubo in forma di lunghi aghi gialli. Cristallizzando il tutto dall'alcool bollente si ottengono gli aghetti gialli, caratteristici dell' anidride, fusibili a 240-241°.

Se si svapora a b. m. la soluzione acquosa dell'acido, massima in presenza di un poco d'ammoniaca, esso si trasforma, se si ha cura di rinnovare l'acqua che svapora, a poco a poco completamente in anidride.

Sale argentico [$C_{12} H_8 NO_3 Ag$]. Trattando una soluzione dell'acido con nitrato argentico non avviene nessuna reazione sensibile, aggiungendo però un poco d'ammoniaca si ottiene subito un precipitato bianco del sale argentico. Una soluzione fatta a caldo, dell'acido nell'alcool diluito, venne trattata colla quantità necessaria di nitrato d'argento sciolto nell'acqua. Si filtra la soluzione per liberarla da alcune tracce di materia nera prodottasi per riduzione e vi si aggiunge a poco a poco dell'ammoniaca fino che questa cessa dal produrre un precipitato. Il sale argentico così ottenuto forma una polvere pesante, bianca e cristallina, che diede all' analisi i seguenti numeri:

0,3306 gr. di sostanza dettero 0,1111 gr. d'argento.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12} H_8 NO_3 Ag$
Ag	33,60	33,54

L'*etere metilico* [$C_{12} H_8 NO_3 . CH_3$] si può ottenere saturando una soluzione dell'acido nell'alcool metilico con acido cloridrico gassoso, oppure trattando il sale argentico con joduro metilico. Il secondo metodo è preferibile di molto, perchè nel primo caso avviene una sensibile resinificazione del prodotto. Si riscalda il sale argentico con un forte eccesso di joduro metilico in tubi chiusi per 2 ore a b. m. Il contenuto dei medesimi si trasforma in una massa semisolida giallo-bruna. Si scaccia il joduro metilico eccedente a b. m. e si esaurisce il residuo con etere. La soluzione eterea lascia indietro per svaporamento una materia cristallizzata in prismetti corti colorati in giallo. Per purificare il nuovo composto lo si fa cristallizzare dal benzolo bollente, nel quale è molto solubile, scolorando la soluzione con nero animale. Per lento svaporamento del liquido si ottengono grossi cristalli senza colore, che fondono a 104-105°.

L'analisi diede i numeri seguenti:

0,2507 gr. di sostanza dettero 0,6271 gr. di CO_2 e 0,1115 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{11}NO_3$
C	68,22	68,12
H	4,94	4,80

Il nuovo etere è molto solubile nell'alcool e nel benzolo, ed è quasi insolubile nell'acqua; esso si trasforma come l'acido libero con grande facilità nell'anidride. Svaporando a b. m. la sua soluzione nell'alcool diluito o bollendolo con acqua per qualche tempo, si vedono formarsi gli aghetti gialli caratteristici dell'anidride. Questa trasformazione avviene molto più presto in presenza di ammoniaca.

Per lento svaporamento spontaneo di una soluzione dell'etere nel benzolo, si sono ottenuti dei cristalli bene sviluppati, che furono studiati cristallograficamente dall'ing. sig. Giuseppe La Valle. Egli ebbe la gentilezza di comunicarci quanto segue:

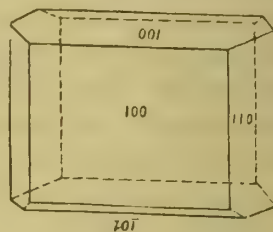
« Sistema cristallino: Monoclino.

« $a:b:c = 1{,}40305:1:1{,}01756$.

« $\eta = +X:+Z = 107^\circ\,14'\,2''$.

« Forme e combinazioni osservate:

« (100), (001), ($\bar{1}$01), (110).

« $\infty \text{P̶} \infty$, 0P, $\text{P̶}\infty$, ∞P.

Angoli	Misurati	n	calcolati
001 : 100	72° 47′ 40″	3	72° 45′ 58″
110 : $\bar{1}$10	73° 28′ 36″	5	73° 27′ 48″
001 : $\bar{1}$01	41° 34′	2	41° 25′ 15″
110 : 001	79° 54′	2	79° 47′ 37″
$\bar{1}$01 : $\bar{1}$10	76° 7′	2	75° 48′ 57″

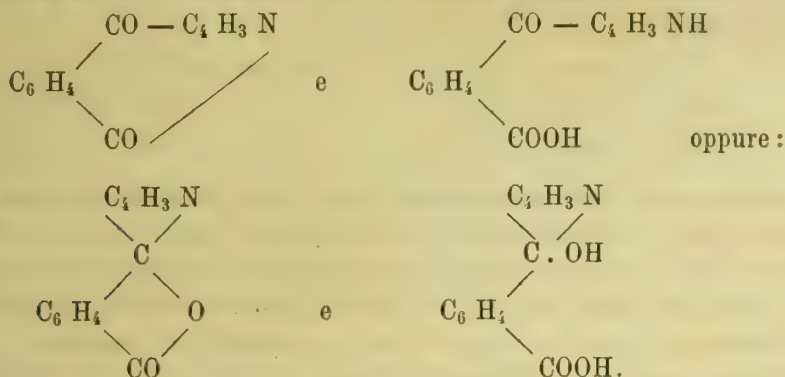
« Sfaldatura perfetta e facilissima parallela a (001).

« Sulla sfaldatura si osserva un apice d'iperbole con relativi anelli distintissimi, « da cui si è potuto concludere che il piano degli assi ottici è (010) con dispersione « inclinata. Una direzione d'estinzione fa, nel piano di simmetria, un angolo di circa 16° « dalasse $\bar{a}$ verso l'asse c, però per la piccolezza dei cristalli e per il loro abito sempre « tabulare non si è potuto ottenere una lamina normale alla bisettrice acuta.

« I cristallini sono incolori e splendentissimi, e le facce riflettono più imma- « gini; hanno sempre la faccia 100 sviluppata, mentre la ($\bar{1}$01) è costantemente « strettissima ed è sempre accompagnata lateralmente da facce curve smussanti l'angolo « solido fra ($\bar{1}$01) (001) (100) ($\bar{1}$10), però tali facce non poterono essere determinate « nè goniometricamente nè per mezzo delle zone ».

Tenendo conto dei fatti che abbiamo esposto fin ora, ed ammettendo che l'anidride or descritta, non contenga più il gruppo imidico « NH », ciò che noi riteniamo

per molto probabile, ma non per assolutamente dimostrato, si potrebbe attribuire all'anidride $C_{12} H_7 NO_2$ ed all'acido che ne deriva, le seguenti formole:

oppure:

Nel primo caso si tratterebbe di un acido pirroilbenzoico e della sua anidride, nel secondo di una pirrolenftalide e dell'acido che ne deriva.

Le ultime due formole, che sembrano le più probabili anche per il comportamento del nostro acido, che ricorda quello dell'acido ossimetilbenzoico derivato dalla ftalide, sono quelle che vennero confermate dall'esperienza.

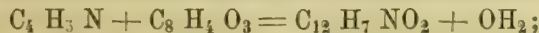
È noto che Vittorio Meyer [1] ed i suoi allievi nelle loro interessanti ricerche sul comportamento dell'idrossilamina verso alcune classi di composti organici, dimostrarono che l'ossigeno del carbonile delle anidridi lattoniche, come per es. della ftalide, non si può sostituire col residuo « N . OH » dell'idrossilamina, per cui solamente nel caso che la nostra anidride avesse la costituzione espressa dalla prima formola avrebbe potuto agire sull'idrossilamina.

Noi abbiamo fatto agire l'idrossilamina sull'anidride e sull'acido, ottenendo sempre risultati negativi. Noi abbiamo trattato l'acido con un eccesso di cloridrato di idrossilamina a caldo ed a freddo, riottenendo in ambedue i casi l'acido inalterato. Abbiamo poi bollito per più ore l' anidride in soluzione alcoolica con un eccesso di cloridrato di idrossilamina, e l'abbiamo indi riscaldata con questo reattivo, per 4 ore in tubi chiusi a 170-180°, ottenendo sempre risultati negativi.

Noi conchiudiamo perciò che l' anidride che fonde a 240-241°, ha con molta probabilità la costituzione di una

« *pirrolenftalide* »,

che potrebbe formarsi dal pirrolo e dall'anidride ftalica secondo la seguente equazione:

$$C_4 H_5 N + C_8 H_4 O_3 = C_{12} H_7 NO_2 + OH_2;$$

e che l'acido che ne deriva potrà essere chiamato,

acido o. pirrolenossimetilbenzoico o acido pirrolenfenilcarbinol-o-carbonico.

Noi crediamo che a compimento di quanto abbiamo esposto, sia necessario di studiare anche l'azione del pirrolo sulla ftalide, e su ciò speriamo di poter fra breve fare una comunicazione a questa Accademia.

[1] Berl. Ber. XVII, 817; XVI, 1781.

Degli equivalenti capillari dei corpi semplici.

Memoria di ROBERTO SCHIFF

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 15 giugno 1884.

In una Memoria intitolata: *Sulle costanti capillari dei liquidi al loro punto di ebollizione*, che ebbi l'onore di presentare a questa r. Accademia nel passato anno, giunsi alle seguenti conclusioni:

È utile introdurre in questi studî, oltre alla solita costante di capillarità a^2, una nuova quantità

$$N = \frac{a^2}{2v}$$

dove v rappresenta il volume molecolare alla temperatura di ebollizione e a^2 l'altezza di ascensione capillare, alla stessa temperatura, in un tubo di 1 millimetro di raggio. I valori di questa nuova costante N ci indicano: il numero relativo di molecole sollevate dall'unità di lunghezza della linea di contatto tra il liquido e la parete solida.

Confrontando tra loro sostanze che hanno diversa composizione, ma circa uguali valori di N, si trova che quando in una molecola si sostituisca 2 atomi d'idrogeno a 1 di carbonio, o 3 atomi d'idrogeno a 1 di ossigeno oppure 7 atomi d'idrogeno a 1 di cloro, il valore della costante N rimane inalterato. Con altre parole: relativamente a questa costante N si hanno i seguenti equivalenti capillari:

$$C = 2\,H$$
$$O = 3\,H$$
$$Cl = 7\,H.$$

Si possono quindi esprimere i pesi molecolari delle sostanze con un numero n H di atomi d'idrogeno e tracciare una curva, prendendo per ordinate questi stessi numeri e per ascisse i valori corrispondenti di N.

Operando così, si ottiene una curva logaritmica della forma:

$$N = \frac{e^{a-bH}}{H}$$

che rappresenta in modo assai soddisfacente le osservazioni e nella quale:

$e =$ base dei logaritmi naturali
$a = 6{,}48293$ $\qquad$ $b = 0{,}016763.$

Nel materiale sperimentale allora pubblicato non vi erano che due o tre sostanze che avessero forniti dei valori di N non coincidenti con quelli richiesti dalla

curva generale. Per rendersi ragione di queste eccezioni apparenti si poteva supporre, o una insufficiente purezza dei prodotti, cosa che mi parve improbabile per la cura messa nella loro purificazione, oppure che queste equivalenze capillari non fossero delle quantità assolutamente invariabili e che uno stesso atomo di un elemento, secondo la sua posizione o funzione chimica nella molecola, potesse avere una influenza variabile sui fenomeni di capillarità e potesse perciò possedere più di un solo equivalente capillare.

Ossia con altre parole; che un dato atomo, secondo la sua funzione chimica, fosse equivalente a numeri diversi di atomi d'idrogeno.

Nell'accennata Memoria, parlando della grande diversità dei valori di N del cloruro di etilene ($CH_2Cl - CH_2Cl$) e del cloruro di etilidene ($CH_3 - CHCl_2$) mi espressi come segue:

« L'equivalenza $Cl = 7H$ è stata stabilita partendo da sostanze diversissime sì, « ma sempre però tali che contenessero o un solo atomo di cloro, oppure alcuni di « questi, ma tutti attaccati ad uno stesso atomo di carbonio; mentre nel cloruro « di etilene abbiamo due atomi di cloro legati a due atomi di carbonio diversi. « Gli studî sui volumi molecolari dei composti clorurati fatti da Staedel, hanno di- « mostrato che il contributo portato al volume totale della molecola, ossia l'equiva- « lente in volume dell'atomo di cloro isolato, o legato insieme ad altri ad uno stesso « atomo di carbonio, è diversissimo dal valore dell'atomo di cloro che entrasse in « una molecola contenente già del cloro, ma andasse a legarsi ad un atomo di car- « bonio ancora libero da questo elemento.

« La straordinaria differenza nei volumi molecolari dei due isomeri sopradetti « attesta quanto dico: Vol. $CH_2Cl - CH_2Cl = 85,24$

Vol. $CH_3 - CHCl_2 = 88,55$.

« È dunque assai probabile che anche rispetto alle costanti capillari il cloro, « secondo la sua funzione nella molecola, possa avere dei valori (in H) diversi, come « possiede tre valori in volume diversissimi e che un atomo di cloro, entrando in « una molecola già contenente di questo elemento e fissandosi ad un atomo di car- « bonio ancora intatto, non sia equivalente a 7 H, ma ad un numero di atomi d'idro- « geno un poco minore ».

Queste parole che in allora non esprimevano che una semplice ipotesi, sono state pienamente confermate dai fatti. Esse formano il punto di partenza della presente ricerca, nella quale mi è stato possibile di fissare gli equivalenti capillari del carbonio, ossigeno, cloro, bromo, iodio, zolfo, azoto e fosforo, corrispondenti alle varie forme di concatenazione o funzione chimica di questi elementi.

Prima di riportare e di discutere i risultati delle mie osservazioni mi sia concesso di esporre i metodi d'investigazione impiegati.

Per la determinazione di a^2, ossia dell'innalzamento capillare in un tubo di un millimetro di raggio, alla temperatura di ebollizione, mi ero servito nel lavoro antecedente, di un piccolo tubo ad U a branche aperte di diversi diametri, calcolando i risultati mediante l'espressione:

$$a^2 = h\left(\frac{Rr}{R - r}\right).$$

Per l'istrumento impiegato era la costante

$$\frac{Rr}{R-r}=0,7032.$$

Questo tubetto, in parte riempito di liquido, si sospendeva direttamente nei vapori della stessa sostanza bollente, e si misurava col catetometro la differenza di livello h dei menischi nelle due branche. Così non si potevano eseguire le determinazioni che al punto di ebollizione delle sostanze ed era di più impossibile lo studio di liquidi che fossero decomponibili per l'umidità o l'acido carbonico dell'aria o che si decomponessero spontaneamente ad alta temperatura sviluppando bollicine gazzose o che, finalmente, bollissero a temperatura eccessivamente elevata. Ma desiderando io di studiare moltissime sostanze che posseggono le dette proprietà in sommo grado e desiderando inoltre di determinare le ascensioni capillari ad una serie di temperature intermedie tra lo zero ed il punto di ebollizione per potere sviluppare le formole d'interpolazione per i valori di a^2, dovuti ad ogni sostanza, ho dovuto modificare la forma del tubo impiegato costruendolo come lo mostra la qui unita figura in dimensioni ridotte a circa metà del vero.

Scelsi tra un grande numero di tubi due pezzetti di diversi diametri perfettamente calibri e di sezione esattamente circolare, ne determinai i diametri come ciò è descritto nell'ultima Memoria e li mandai al signor F. Müller, successore del dott. H. Geissler a Bonn, il quale colla nota sua abilità vi adattò la parte superiore munita di tre piccoli robinetti forati e smerigliati i quali ancora oggi, dopo un prolungato uso, tengono il vuoto per molto tempo (ben inteso senza l'aiuto di sostanza lubrificante qui naturalmente inadoperabile).

Chiuso il robinetto medio si aspira una piccola quantità del liquido da studiare. Dopo rimesso il tubo in posizione verticale si chiude uno dei robinetti superiori e aspirando dall'altro mediante un tubo di gomma interrotto, da un tubo contenente qualche sostanza disseccante, si fa fare al liquido una serie di forti oscillazioni per bagnare bene le pareti interne del tubo ad U. Indi si apre il robinetto medio che stabilisce la comunicazione tra le due branche e con una pompa aspirante si fa un vuoto parziale nel tubo, dopo di che si chiude l'ultimo robinetto superiore e dopo attaccato un pesante gancio di vetro pieno di mercurio (circa 50 grammi) nell'occhiello inferiore dell'istrumento, lo si sospende nell'apparecchio riscaldatore che subito descriverò.

Le dimensioni dei tubi ed il valore della costante da impiegarsi risultano dai dati seguenti:

Tubo stretto: 1132,25 millimetri di mercurio ($t^o=22,7$) pesano 3,6292 gr.

$$r=0,2745 \text{ mm.}$$

Tubo largo: 639,9 mm. di mercurio ($t^o=22,7$) pesano 35,2213 gr.

$$R=1,1375$$

$$\frac{Rr}{R-r}=0,36181=\text{Cost.}$$

Riguardo la correzione per il liquido sollevato dal menisco sopra il piano tangente al punto più basso della curvatura, ho adottato un metodo un poco diverso da quello impiegato nella prima Memoria.

Possiamo sempre, senza fare un errore sensibile, considerare il menisco in un tubo a sezione circolare come un mezzo ellissoide di rivoluzione generato intorno all'asse minore.

Se $2a$ è l'asse maggiore e

$2b$ l'asse minore, avremo per il volume di questo ellissoide intero:

$$\frac{4\pi a^2 b}{3},$$

ma se chiamiamo f l'altezza del menisco, avremo per il nostro caso:

$$2a = 2r \quad \text{e} \quad 2b = 2f.$$

Sia ora:

r e R = raggio del tubo stretto e di quello più largo,

f e F = altezze dei menischi nei due tubi,

h = differenza di livello dei due menischi,

hc = questa differenza corretta per i menischi,

H e H' = le ascensioni che si osserverebbero nei due tubi, se, separati, fossero immersi in un liquido.

Ora è evidente che deducendo dal cilindro $\pi r^2 f$, il volume del mezzo ellissoide $d\,n\,c$ e uguagliando la differenza a un cilindro di base πr^2 e di altezza x, x ci darà la quantità della quale bisogna aumentare l'ascensione osservata:

$$\pi r^2 f - \frac{2\pi r^2 f}{3} = \frac{\pi r^2 f}{3}$$

$$\frac{\pi r^2 f}{3} = \pi r^2 x \qquad\qquad x = \frac{\pi r^2 f}{3\pi r^2} = \frac{f}{3}.$$

La correzione dunque sarà:

$$\text{nel tubo largo} = \frac{F}{3},$$

$$\text{nel tubo stretto} = \frac{f}{3}.$$

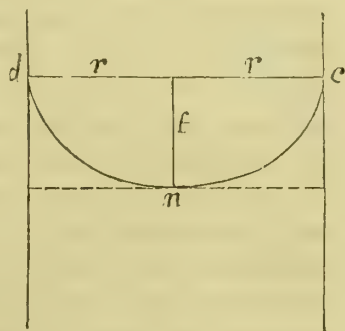
Ora $\qquad h = H - H'$

$$hc = H + \frac{f}{3} - H' - \frac{F}{3} \quad hc = h - \frac{1}{3}\left(F - f\right).$$

ossia bisogna sottrarre il terzo della differenza tra le altezze dei menischi.

Secondo quello che si è detto prima, la formola secondo la quale bisognerà calcolare a^2, lavorando col nuovo tubo a U, sarà:

$$a^2 = \left[h - \frac{1}{3}\left(F - f\right)\right].0{,}36181.$$

L'aumentare l'ascensione osservata di un terzo dell'altezza del menisco è già stato proposto da Frankenheim. Del resto in pratica l'uso della formola qui sviluppata, o di quella proposta nell'ultima mia Memoria, non conduce a differenze apprezzabili. Io l'ho scelta perchè è di più comoda applicazione.

L'apparecchio riscaldatore sopra menzionato consiste in una triplice cassa di lamiera di ferro, nella quale i singoli involucri sono alla distanza di circa 3 centimetri uno dall'altro. Le casse hanno dei finestrini tra di loro corrispondenti, chiusi con lastre di cristallo piane e tra loro perfettamente parallele. La cassa interna è rivestita di stagnatura il che è molto favorevole per l'illuminazione dell'apparecchio.

In questa cassa dunque si sospende il tubo ad U preparato come sopra si è detto e per due fori praticati nelle casse s'introducono due termometri esatti che coi loro bulbi vengono a collocarsi accanto ai due menischi nel tubetto. Mediante una fiamma sottoposta all'apparecchio si può così facilmente alzare gradatamente la temperatura del tubo capillare e tenerla anche a lungo costante per fare le letture desiderate. Ordinariamente i due termometri ai due lati del tubetto andavano bene d'accordo, e se qualche volta durante la lettura vi era una piccola differenza di pochi decimi di grado, si prendeva come esatta la media delle loro indicazioni, giacchè il tubo trovandosi tra mezzo a essi doveva certamente possedere questa temperatura media.

La maggior parte delle osservazioni qui riferite sono eseguite col nuovo tubo a costante 0,36181 col metodo ora detto, eseguendo a temperature crescenti una serie di determinazioni di a^2, stabilendo la curva che ne esprime l'andamento in funzione della temperatura e calcolando il valore di a^2 al punto di ebollizione.

In molti casi ho, per riprova, determinato a^2 anche direttamente nei vapori del liquido bollente e l'accordo, come più tardi si vedrà, è sempre stato perfetto.

Alcune determinazioni sono fatte ancora col primitivo tubo aperto a costante 0,7032, come ciò sarà indicato volta per volta.

Nell'ultima Memoria feci rilevare le difficoltà che s'incontrano nell'eseguire le misure delle altezze capillari dei liquidi ad alta temperatura con un catetometro usuale. Bisogna in brevissimo tempo cambiare l'accomodazione dell'occhio leggendo prima col cannocchiale poi col microscopio del nonio e così via un grande numero di volte in un tempo, come già dissi, possibilmente brevissimo. Questo procedimento mi aveva talmente stancata la vista che avrei dovuto rinunziare al proseguimento di queste ricerche, senza un nuovo istrumento, costruitomi con grande abilità e precisione dal signor F. Miller, meccanico a Innsbruck; istrumento il quale, oltre ad evitare tutti gli inconvenienti accennati, rende a così dire impossibili gli errori casuali di lettura.

Esso consiste in due cannocchiali tra loro uguali, posti in uno stesso piano orizzontale. Uno di essi è mobile rispettivamente all'altro, mediante una vite micrometrica esatta, lunga circa 15 centimetri e munita di tamburo diviso in 100 parti. Sopra una scala fissa un indice segna i giri interi della vite ed i centesimi di giro si leggono sul tamburo graduato. Quando gli assi ottici dei due cannocchiali si trovano esattamente nello stesso piano orizzontale, l'indice della scala e quello del tamburo segnano zero. I due cannocchiali insieme, come un sistema rigido, sono mobili lungo un' asta verticale con movimento rapido e micrometrico. I due cannocchiali, muniti di livelli sensibilissimi, hanno tutte le viti di rettifica e sono inoltre mobili nel piano intorno ad un asse verticale. Essendo conosciuta l'altezza del passo della vite micrometrica, mediante una serie di misure fatte sopra un metro normale, basta per misurare la differenza di livello dei due menischi, fissare il menisco inferiore col cannocchiale fisso (relativamente all'altro), ed il menisco superiore con quello mobile, movendo la vite

micrometrica e conservando ai due cannocchiali la perfetta orizzontalità. Ottenuta la coincidenza dei menischi coi reticoli dei due cannocchiali, si può, a tutto comodo leggerne la distanza verticale che rimane inscritta sulla scala e sul tamburo graduato. Aggiungo ancora che ho fatto corredare l'istrumento di due paia di oculari, permettendo un ingrandimento di 20 e di 40 diametri.

Questo istrumento si trova descritto e riprodotto nella Zeitschrift für Instrumentenkunde Dicembre 1883, pag. 409.

La mia vite micrometrica, secondo una serie di concordanti determinazioni, ha un passo alto da 0,4997 a 0,5002 millim. ed io presi come valore definitivo 0,5000 millimetri.

Per determinare la correzione dovuta per i menischi si procede come segue: letta la differenza di livello dei piani tangenti ai due menischi, si puntano i due cannocchiali sulle basi di questi e la differenza tra queste due letture è anche la differenza tra le altezze dei menischi della quale, come sopra si è detto, si prende il terzo che si sottrae dalla prima lettura.

Ho voluto istituire una serie di osservazioni per conoscere fino a qual punto i valori di a^2 determinati col nuovo tubo e col nuovo catetometro a vite, coincidessero coi valori determinati nel passato anno con metodi in ogni punto diversi, e per vedere inoltre se i valori di a^2 calcolati mediante una formola d'interpolazione, come sopra si disse, fossero concordanti con quelli determinati direttamente al punto di ebollizione delle sostanze.

Riferirò qui solo due di queste osservazioni, rimandando per altre non meno concordanti al materiale sperimentale.

Benzina. — L'anno passato col tubo aperto a costante 0,7032 trovai:

$t = 6{,}7^\circ \qquad a^2 = 6{,}968$ mm.

$t = 79{,}9^\circ \qquad a^2 = 5{,}245$ »

Ora trovo col tubo chiuso a costante 0,36181:

$t = 5{,}4^\circ \qquad a^2 = 6{,}997$ mm.

$t = 80{,}0^\circ \qquad a^2 = 5{,}253$ »

e dopo completo raffreddamento:

$t = 8{,}4^\circ \qquad a^2 = 6{,}963.$

Collo stesso tubo, ma procedendo per interpolazione:

I^a^ serie.

t°	hc	a^2	a^2 calcolato dalla formola
3,8°	19,5	7,055 mm.	7,058 mm.
33,8	17,52	6,339 »	6,342 »
48,0	16,60	6,006 »	6,004 »
71,0	15,08	5,456 »	5,454 »

II^a^ serie.

t°	hc	a^2	a^2 calcolato dalla formola
3,3°	19,55	7,073 »	7,070 »
33,5	17,58	6,360 »	6,350 »
48,5	16,57	5,995 »	5,991 »
60,3	15,81	5,720 »	5,710 »
76,7	14,70	5,318 »	5,319 »

Queste due serie, come si vede dalle cifre scritte nella colonna « a^2 calcolato », sono esattamente espresse dalla formola:

$$a^2 = 7,149 - 0,02387\, t$$

la quale fornisce . . . . a^2 a $80^\circ = 5,240$ mm.
mentre collo stesso tubo all'ebollizione si trovò . . . . $a^2 = 5,253$ »
e coll'altro tubo nel passato anno . . . . $a^2 = 5,245$ »

Le differenze sono dunque di un centesimo di millimetro ed i risultati possono chiamarsi soddisfacentissimi.

Colla formola per a^2 qui sviluppata, si calcola la temperatura critica (T) della benzina $= 299^\circ$ mentre Sajotschewscky trova direttamente $= 281^\circ$.

Furfurol. — Punto di eboll. 160-160,5 $B_0 = 753,4$.

L'osservazione diretta all'ebollizione col tubo aperto a costante 0,7032 fornì:

$$a^2 \text{ a } 160 = 5,205 \text{ mm.}$$

Procedendo per interpolazione trovo:

t	hc	a^2	a^2 calcolato dalla formola
13	21,63	7,826 mm.	7,826 mm.
49,5	19,82	7,171 »	7,173 »
68,5	18,88	6,831 »	6,833 »
76	18,51	6,697 »	6,699 »
111,5	16,72	6,050 »	6,063 »

Come si vede questi risultati si esprimono bene colla formola:

$$a^2 = 8,059 - 0,0179\, t,$$

che fornisce

$$a^2 \text{ a } 160^\circ = 5,195 \text{ mm.}$$

Temperatura critica (T) del furfurol $= 450^\circ$ gradi.

Come si vede le variazioni di a^2 sono inversamente proporzionali alla temperatura e si lasciano esprimere mediante una retta. Questo fatto è generale, almeno per tutte le numerose sostanze, finora studiate, ma non sono stato io il primo a costatarlo, come ciò si può vedere da un opuscolo pubblicato, pochi mesi fa, a Bruxelles dal signor M. P. de Heen sotto il titolo *Essai de Physique comparée.*

In questo scritto l'autore determina le equazioni lineari, esprimenti il variare di a^2 colla temperatura per un certo numero di sostanze, delle quali in gran parte ho dato il valore di a^2 all'ebollizione nella mia ultima Memoria. Il signor de Heen non dà che le ascensioni fornite direttamente dallo sperimento operando in tubi diversi, ma essendo indicati i diametri di questi tubi, ne ho potuto calcolare i valori di a^2 per confrontarli coi miei.

In generale i valori di a^2 al punto di ebollizione che così si calcolano non sono molto diversi da quelli contenuti nel mio lavoro antecedente.

Darò alcuni esempî scelti a caso.

			de Heen	Schiff (1883)
Alcool	etilico	a^2 a 78°	4,847 mm.	4,782 mm.
»	isobutilico	a^2 a $106,4^\circ$	4,418 »	4,416 »
Cloruro	propilico	a^2 a 47°	4,393 »	4,359 »
Formiato	butilico	a^2 a $98,5^\circ$	4,198 »	4,149 »

			de Heen	Schiff (1883)
Acetato	etilico	a^2 a 75,5°	4,376 mm.	4,268 mm.
»	isobutilico	a^2 a 112,8°	3,900 »	3,923 »
»	amilico	a^2 a 138,9°	3,718 »	3,720 »
Butirrato	metilico	a^2 a 102,5°	4,121 »	4,036 »
»	isobutilico	a^2 a 157°	3,337 »	3,361 »
Propionato	metilico	a^2 a 79,5°	4,364 »	4,289 »
»	propilico	a^2 a 121,7°	3,822 »	3,804 »
»	amilico	a^2 a 160,5°	3,384 »	3,459 »
Valerato	metilico	a^2 a 115°	3,721 »	3,853 »
»	etilico	a^2 a 133°	3,495 »	3,600 »

Mentre non voglio pretendere che i miei valori siano esenti da piccole inesattezze, credo però che per il metodo impiegato essi meritino forse una fiducia maggiore di quelli del signor de Heen e ciò per le seguenti ragioni.

1) Della purezza delle sostanze impiegate dall'autore non si ha alcun criterio. Esso non ne indica nè la provenienza, nè i metodi di preparazione e di purificazione, e neppure il loro punto di ebollizione.

2) L'autore indica solo i diametri dei tubi impiegati, e se anche noi possiamo ammettere ch'essi siano di calibro costante in tutti i punti, egli non dice se ne sia verificata la sezione circolare.

3) Non è fatto cenno alcuno di una correzione dovuta per il liquido sollevato dal menisco sopro il piano tangente alla sua curvatura.

4) Per il metodo impiegato non è in alcuna maniera assicurata la verticalità del tubo capillare, anzi essa appare molto dubbia o almeno assai difficile a conseguirsi.

5) Le letture sono fatte sopra tubi capillari divisi in $^1/_5$ di millimetro, dimodochè le frazioni inferiori ad un quinto si dovevano apprezzare a occhio.

Difatti nelle osservazioni in generale non sono indicati che i decimi di millimetro.

Per calcolare la costante N è necessaria come si è visto la conoscenza del volume molecolare al punto di ebollizione. Per una parte delle sostanze qui studiate era conosciuta la dilatazione grazie ai lavori di Kopp, Pierre, Thorpe e Zander ed io ho creduto di potere utilizzare i loro valori. Per moltissime sostanze invece ho determinato direttamente la densità al punto di ebollizione, adoperando il mio metodo estesamente descritto nella Memoria: *Sui volumi molecolari delle sostanze liquide* (Lincei 1882). Quando però le sostanze erano molto decomponibili, tanto che sviluppassero delle bollicine gazose in vicinanza del loro punto di ebollizione, oppure quando mostravano un punto di ebollizione eccessivamente elevato, ho preferito di determinarne la densità prima a zero e poi ad una serie di temperature intermedie, calcolando così le formole d'interpolazione per i volumi in funzione della temperatura. Negli sviluppi mi sono sempre fermato ai cubi delle temperature.

Ho ripetuta la determinazione della densità al punto di ebollizione per molte sostanze già studiate due anni fa e l'accordo è sempre stato soddisfacente.

Le sostanze qui impiegate sono tutte purificate colla massima diligenza e dove occorre saranno indicati brevemente i metodi di preparazione.

Molti prodotti mi furono spediti dalla rinomata fabbrica di Kahlbaum a Berlino in uno stato di purezza così perfetta, come in laboratorio, lavorando su piccole quantità, solo difficilmente si potrebbe conseguirla.

Le indicazioni termometriche per i punti di ebollizione si riferiscono ai 4 termometri altre volte menzionati. In tutti i casi la colonna di mercurio era interamente immersa nel vapore.

Le indicazioni barometriche s'intendono ridotte a zero.

Per molte sostanze, studiate per interpolazione, aggiungo le temperature critiche approssimate T calcolate dalle formole generali per i valori di a^2.

Riassumo tutti i simboli impiegati nell'esposizione del materiale sperimentale:

hc = differenza di livello osservata, corretta per i menischi,

a^2 = altezza di ascensione in un tubo di 1 millimetro di raggio,

$\frac{M}{D} = v =$ volume molecolare,

$1000 \frac{a^2}{2v} = N =$ numero relativo di molecole sollevate,

T = temperatura critica.

Materiale sperimentale.

1) *Terpene di limone.* $C_{10}H_{16}$

Dall'essenza. Bollito sul sodio. Punto di ebollizione 168-168,5° $B_0 = 763,2$.
Volume molecolare:

	I	II	III	altro campione I	altro campione II
$V_4 =$	7,7206	7,7271	7,6743		
$P =$	5,6259	5,6293	5,5863	$D_4^{9,9} =$ 0,8595	0,8593
$D_4^{168} =$	0,7286	0,7285	0,7279		
$\frac{M}{D} =$	186,24	186,25	186,42		

Capillarità:

t	hc	a^2	a^2 calcolato colla formola
10	18,79	6,798 mm.	6,799 mm.
47,5	16,79	6,075 »	6,080 »
69,7	15,66	5,665 »	5,659 »
80,0	15,14	5,477 »	5,462 »
86,0	14,79	5,351 »	5,348 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,990 - 0,0191\, t$$

che fornisce:

a^2 a 168,5 = 3,772 N = 10,1

T = 366°.

2) *Acido formico.* CH^2O^2

di Kahlbaum, distilla tutto a 100,3 $B_o = 763,5$.

Volume molecolare: $V_4 = 8,3010$

$P = 9,2723$

$D_4^{100,3} = 1,1170$

$\frac{M}{D} = 41,08$ Kopp trova 41,00.

Capillarità:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8,7	18,01	6,516 mm.	6,516 mm.
52,3	16,40	5,933 »	5,930 »
55,5	16,23	5,872 »	5,887 »
73,0	15,64	5,658 »	5,652 »
88,7	15,06	5,448 »	5,440 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,633 - 0,01345\, t$$

che fornisce:

a^2 a $100,3° = 5,284$ mm. $N = 64,3$

$T = 492°$.

3) *Acido acetico.* $C_2H_4O_2$

di Kahlbaum, bolle 117-117,5° $B_0 = 761,5$.

Volume molecolare = 63,2 (Kopp).

Capillarità:

t	hc	a^2	a^2 calc.
10	15,13	5,477 mm.	5,477 mm.
49,5	13,51	4,888 »	4,885 »
78,3	12,30	4,449 »	4,453 »
92,5	10,72	4,239 »	4,240 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 5,627 - 0,0150\, t$$

che fornisce:

a^2 a $117 = 3,872$ mm. $N = 30,6$

$T = 375°$.

4) *Acido propionico.* $C_3H_6O_2$

di Kahlbaum, bolle 140,5-141 $B_o = 758,5$.

Volume molecolare = 85,4 (Zander) 85,5 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcol.
7,5	15,81	5,720 mm.	5,720 mm.
46,5	14,20	5,138 »	5,135 »
48,0	14,07	5,111 »	5,110 »
72,3	13,09	4,736 »	4,740 »
83,0	12,61	4,560 »	4,580 »
91,4	12,31	4,454 »	4,461 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 5,832 - 0,0150\,t$$

che fornisce: a^2 a 140,5 = 3,725 mm. M = 21,7

T = 388°.

5) *Acido butirrico normale.* $C_4H_8O_2$

di Kahlbaum, bolle 162,5-163 $B_0 = 762,4$.

Volume molecolare = 107,85 (Schiff):

t	hc	a^2	a^2 calc.
12,7	16,09	5,821 mm.	5,821 mm.
31,5	15,30	5,535 »	5,535 »
44,0	14,76	5,340 »	5,345 »
47,2	14,64	5,297 »	5,297 »
73,5	13,49	4,880 »	4,890 »
111,2	11,94	4,320 »	4,324 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,014 - 0,0152\,t$$

che fornisce: a^2 a 162,5 = 3,545 N = 16,4

T = 395°.

6) *Acido isobutirrico.* $C_4H_8O_2$

di Kahlbaum, bolle 153-153,5 $B_0 = 750,5$ mm.

Volume molecolare = 108,57 (Schiff):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,8	15,57	5,633 mm.	5,633 mm.
47,5	13,94	5,047 »	5,052 »
71,5	12,95	4,685 »	4,683 »
94,5	11,95	4,323 »	4,329 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 5,784 - 3,0154\,t$$

che fornisce: a^2 a 153° = 3,428 mm. N = 15,8

T = 375.

7) *Acido valerianico.* $C_5H_{10}O_2$

di Kahlbaum, bolle 174,5-175 $B_0 = 750,8$ mm.

Volume molecolare = 130,2 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
7,8	16,05	5,807 mm.	5,807 mm.
38,5	14,78	5,347 »	5,344 »
40,5	14,67	5,308 »	5,314 »
43,5	14,56	5,268 »	5,269 »
70,5	13,47	4,873 »	4,861 »
102,0	12,12	4,385 »	4,385 »
115,3	11,52	4,168 »	4,184 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 5,925 - 0,0151\, t$$

che fornisce:

a^2 a $175° = 3,283$ mm. N = 12,6

T = 392°.

8) *Anidride acetica.* $C_4 H_6 O_3$

Frazionando 1 kilo del prodotto commerciale bollente tutto tra 137°,5,-138°,5, fu raccolto un terzo circa bollente 138°-138°,2 $B_0 = 762,2$ mm.

Volume molecolare = 109,69 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	17,64	6,382 mm.	6,382 mm.
44,7	15,98	5,782 »	5,785 »
78,8	14,36	5,196 »	5,199 »
94,5	13,63	4,933 »	4,929 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,554 - 0,0172\, t$$

che fornisce:

a^2 a $138 = 4,181$ mm. N = 19,1

T = 380°.

9) *Formiato metilico.* $C_2 H_4 O_2$

Trattato con calce viva a più riprese bolle 32°,4-32°5 B_0=761,4.

Volume molecolare: 62,57 (Schiff).

Capillarità determinata col tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 7,7°$		*a caldo*	
$h = 0,792$ mm.	$hc = 0,784$ mm.	$h = 0,711$ mm.	$hc = 0,703$ mm.
		$a^2 = 4,944$	N = 39,6.

10) *Acetato allilico.* $C_5 H_8 O_2$

Trattato come sopra bolle 102°,8-103° $B_0 = 752,2$.

Volume molecolare = 121,37 (Schiff).

Determinazione fatta col tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 4°,5$		*a caldo*	
$h = 0,879$ mm.	$hc = 0,870$ mm.	$h = 0,591$ mm.	$hc = 0,584$ mm.
		$a^2 = 4,106$ mm.	N = 16,9.

11) *Dimelilacetal.* $C_4 H_{10} O_2$

Nel rifare le determinazioni di a^2 per molte sostanze già studiate l'anno passato, ho trovato solo per il dimetilacetal differenze notevoli. Forse allora era rimasta inosservata qualche piccola bollicina di liquido in una delle branche del tubetto, che doveva produrre una pressione parziale. Per più sicurezza ho rifatto lo studio con tutti tre i metodi ora a mia disposizione.

Punto di ebollizione 62°8-63°,2 $B_0 = 761,2$.

Volume molecolare: 110,81 (Schiff):

1) Col tubo aperto a costante 0,7032 all'ebollizione:
$h = 0,620$ $hc = 0,612$ $a^2 = 4,303$ mm. $N = 19,4$

2) Col tubo chiuso a costante 0,36181 all'ebollizione:
$h = 12,04$ $hc = 11,87$ $a^2 = 4,297$ mm. $N = 19,4$

3) Per interpolazione:

t	hc	a^2	a^2 calc.
7,5	15,24	5,514 mm.	5,514 mm.
29,5	13,92	5,036 »	5,036 »
45,0	13,0	4,703 »	4,700 »
60	12,04	4,356 »	4,353 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 5,676 - 0,0217\,t$$

che fornisce: a^2 a $63,3 = 4,303$ mm. $N = 19,4$

$T = 261°$.

12) *Etere metilisoamilico.* $C_5H_{11} - O - CH_3$

Preparato per l'azione del ioduro metilico sull'isoamilato potassico. Il prodotto purificato con lavaggi e distillazione fu riscaldato a 150 gradi in tubi chiusi con grande eccesso di sodio metallico durante una notte intera. Bolle 91°-91°,3 $B_0 = 765,4$ mm.

Volume molecolare: $V_4 = 8,2990$ cm³

$P = 5,7025$ gr.

$D_4^{91} = 0,6871$

$\frac{M}{D} = 148,13$

t	hc	a^2	a^2 calcol.
6,5	16,30	5,897 mm.	5,897 mm.
45,3	14,00	5,065 »	5,065 »
72,6	12,38	4,479 »	4,479 »
78,3	12,04	4,356 »	4,357 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,0369 - 0,02145\,t$$

che fornisce: a^2 a $91° = 4,085$ $N = 13,8$

$T = 281°$.

13) *Ossalato etilico.* $C_6H_{10}O_4$

Bolle costantemente 186°186°,2 $B_0 = 758,3$.

Volume molecolare: 166,12 (Kopp, Weger):

t	hc	a^2	a^2 calcol.
11,3	17,13	6,198 mm.	6,200 mm.
66,0	14,85	5,373 »	5,373 »
76,2	14,42	5,217 »	5,220 »
93,5	13,70	4,957 »	4,959 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,370 - 0,0151\,t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 186^\circ = 3,562 \text{ mm.} \qquad N = 10,7$$

$$T = 422^\circ.$$

14) *Benzoato metilico.* $C_8H_8O_2$

Bolle 200-200°,4 $\quad B_0 = 754°,7$.

Volume molecolare = 151,8 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	19,90	7,200 mm.	7,201 mm.
61,5	17,48	6,324 »	6,328 »
75,0	16,86	6,100 »	6,100 »
93,5	15,98	5,782 »	5,786 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,370 - 0,01694\,t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 200^\circ = 3,982 \text{ mm.} \qquad N = 13,1$$

$$T = 435^\circ.$$

15) *Benzoato etilico.* $C_9H_{10}O_2$.

Bolle 213°-213°,5 $\quad B_0 = 758,5$ mm.

Volume molecolare: 174,8 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	19,53	7,066 mm.	7,068 mm.
48,5	17,77	6,429 »	6,431 »
78,5	16,38	5,926 »	5,935 »
97,0	15,56	5,629 »	5,629 »
110,5	15,20	5,500 »	5,505 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,234 - 0,01655\,t$$

che fornisce: $\quad a^2$ a 213° = 3,709 mm. $\qquad N = 10,6$

$$T = 436^\circ.$$

16) *Etere acetacetico.* $C_6H_{10}O_3$.

Da 500 gr. di prodotto puro commerciale di Kahlbaum fu ottenuta una larga porzione bollente:

$$180^\circ\text{-}180^\circ,3 \qquad B_0 = 754,5$$

Il volume molecolare fu determinato, stabilendo la formola dei volumi:

$$D_4^{0} = 1,0465 \qquad D_4^{8} = 1,0385 \qquad D_4^{55,8} = 0,9880$$

$$D_4^{79,2} = 0,9644 \qquad D_4^{135,5} = 0,9029$$

Questi valori sono benissimo resi dalla formola:

$$V_t = 1 + 0,00109301\,t - 0,0000013895\,t^2 + 0,00000001465\,t^3$$

che fornisce: $\quad D_4^{180} = 0,8458 \qquad \frac{M}{D} = 153,34$

Capillarità:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,1	18,18	6,657 mm.	6,657 mm.
71,7	15,64	5,658 »	5,662 »
73,0	15,55	5,646 »	5,641 »
77,3	15,40	5,572 »	5,573 »
91,4	14,78	5,347 »	5,349 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,802 - 0,0159\,t$$

che fornisce:

a^2 a 180° = 3,940 mm. N = 12,8

T = 428°.

17) *Anisol.* $C_6H_5 - OCH_3$

Questa sostanza, avendo dato dei risultati che da principio parevano affatto eccezionali, ne ho fatto lo studio sopra due campioni di diverse preparazioni, rideterminando anche il volume molecolare.

1° Campione bolle 155°-155°,5 $B_0 = 757,4$

Volume molecolare:

$V_4 = 8,3065$

$P_4 = 7,1475$

$D_4^{155} = 0,8605$

$\frac{M}{D} = 125,21$

Due anni fa trovai: $\frac{M}{D} = 125,18$ e 125,17 (Lincei 1882)

t	hc	a^2	a^2 calcolato
7,5	20,81	7,529 mm.	7,529 mm.
57,0	18,04	6,531 »	6,534 »
67,5	17,50	6,331 »	6,323 »
79,5	16,82	6,086 »	6,082 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,679 - 0,0201\,t$$

che fornisce:

a^2 a 155,°5 = 4,554 mm. N = 18,°0

T = 382°

2° Campione bolle 155,°5-156° $B_0 = 763,4$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
12,2	20,63	7,46 mm.	7,46 mm.
50,0	18,52	6,700 »	6,69 »
71.5	17,33	6,27 »	6,26 »
76,0	17,08	6,18 »	6,17 »
82,5	16,69	6,04 »	6,04 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,710 - 0,0203\,t$$

che fornisce: a^2 a 155°,5 = 4,554 mm. N = 18

T = 380°.

18) *Fenetol.* $C_6H_5 - OC_2H_5$

Bolle 171°,5 $B_0 = 763,0$

Volume molecolare: 148,50 (Schiff):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
7,7	20,10	7,272 mm.	7,273 mm.
42,7	18,23	6,596 »	6,598 »
66,0	16,98	6,143 »	6,151 »
77,5	16,38	5,926 »	5,929 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,421 - 0,01925\,t$$

che fornisce:

a^2 a 171°,5 = 4,120 mm. N = 13,8

T = 385°.

19) *Etere metilico del paracresol.* $C_6H_4 \overset{CH_3}{-} O - CH_3$

Preparato secondo le indicazioni di Koerner (Zeitschrift für Chemie, 1868, p. 326) per l'azione del ioduro metilico sul paracresolato potassico. Dopo lavato con soda e disseccato è subito puro. Rendita eccellente. Bolle 175°,5-176° $B_0 = 762,3$ mm.

Volume molecolare:

$$V_4 = 8,3201$$
$$P = 6,8527$$
$$D_4^{175.5} = 0,8236$$
$$\frac{M}{D} = 147,79$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
5,5	20,46	7,403 mm.	7,403 mm.
48,7	18,25	6,603 »	6,609 »
66,5	17,34	6,274 »	6,281 »
75,5	16,89	6,111 »	6,116 »
89,2	16,21	5,865 »	5,864 »
92,5	16,05	5,807 »	5,803 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,5037 - 0,01838\,t$$

che fornisce:

a^2 a 175,5 = 4,278 mm. N = 14,5

T = 408°

20) *Dimetilresorcina.* $C_6H_4(OCH_3)_2$

Dal sale potassico della resorcina con ioduro di metile.

Bolle 214°-215° $B_0 = 759,4$.

Il volume molecolare fu determinato calcolando la formola dei volumi dai dati seguenti:

$D_4^0 = 1,0803$ $D_4^{55,8} = 1,0317$ $D_4^{79,2} = 1,0104$ $D_4^{135,5} = 0,9566$

Resi dalla formola:

$$Vt = 1 + 0{,}00078206\,t + 0{,}0000009995\,t^2 + 0{,}000000002008\,t^3$$

mediante la quale si calcola:

$$D_{215} = 0{,}8752 \qquad \frac{M}{D} = 157{,}13$$

t	hc	a_2	a^2 calcolato
10,6	20,98	7,591 mm.	7,591 mm.
72,0	18,08	6,541 »	6,541 »
87,0	17,37	6,284 »	6,285 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7{,}7718 - 0{,}01709\,t$$

che fornisce: a^2 a $215^\circ = 4{,}097$ mm $N = 13{,}0$

$T = 454^\circ$.

21) *Furfurol. Aldeide piromucica.* $C_5H_4O_2$

Avendo questa sostanza fornito dei risultati che parevano eccezionali, fu studiata con due metodi diversi. Bolle 160°-160°,5 $B_0 = 753{,}4$.

Volume molecolare: 95,52 (Schiff):

1) Osservazione diretta all'ebollizione col tubo aperto a costante 0,7032

a freddo $t = 7$.

$h = 11{,}20$ $hc = 11{,}11$

a caldo

$h = 7{,}47$ $hc = 7{,}40$

$a^2 = 5{,}205$ $N = 27{,}2$

2) Per interpolazione:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
13	21,63	7,826 mm.	7,826 mm.
49,5	19,82	7,171 »	7,173 »
68,5	18,88	6,831 »	6,833 »
76,0	18,51	6,697 »	6,699 »
111,5	16,72	6.050 »	6,063 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 8{,}059 - 0{,}0179\,t$$

che fornisce: a^2 a $160^\circ = 5{,}195$ mm. $N = 27{,}2$.

$T = 450^\circ$.

22) *Aldeide valerica.* $C^5H^{10}O$

Bolle 92°,5-93° $B_o = 762{,}1$

Volume molecolare = 118,99 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	17,22	6,230 mm.	6,230 mm.
47,5	15,23	5,510 »	5,500 »
53,5	14,83	5,366 »	5,382 »
68,0	14,09	5,097 »	5,099 »
78,7	13,54	4,886 »	4,890 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6,425 - 0,0195\,t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 93^\circ = 4,611 \qquad N = 19,3$$

$$T = 329^\circ.$$

23) *Cuminol. Aldeide cuminica.* $C_{10}H_{12}O$

Purificato col composto col bisolfito bolle 237°-237°,5. $B_0 = 758,3$

Volume molecolare = 187,29 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8,8	20,08	7,265 mm.	7,265 mm.
48,4	18,43	6,668 »	6,669 »
70,5	17,51	6,335 »	6,336 »
94,5	16,50	5,970 »	5,975 »
125,5	15,23	5,510 »	5,509 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,397 - 0,01505\,t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 237^\circ = 3,830 \text{ mm.} \qquad N = 10,2$$

$$T = 491^\circ.$$

24) *Carvol.* $C_{10}H_{14}O$

Preparato secondo Varrentrapp (*Handwörterbuch der Chemie*, vol, 4, p. 686) trattando quella parte dell'olio di Carum Carvi, che bolle sopra 185° con solfoidrato ammoniaco alcoolico, ricristallizzando dall'alcool il solfidrato di Carvol e dopo decomponendolo con potassa alcoolica diluita.

Rendita buona. Bolle costante 227°,5-228° $B_0 = 763,2$

Volume molecolare:

$$V_4 = 7,6935$$

$$P = 6,0517$$

$$D_4^{227.5} = 0,7866$$

$$\frac{M}{D} = 190,26$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10,5	20,80	7,526 mm.	7,525 mm.
45,7	19,23	6,957 »	6,957 »
75,2	17,92	6,484 »	6,483 »
91,5	17,19	6,221 »	6,220 »
114	16,21	5,865 »	5,859 »
137,5	15,11	5.468 »	5,479 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 7,6947 - 0,01611\,t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 227^\circ,5 = 4,029 \text{ mm.} \qquad N = 10,6$$

$$T = 477^\circ.$$

25) *Pinacolina. Chetone pseudobutilmetilico.* $CH_3 - CO - C(CH_3)_3$

Ottenuto riscaldando il pinacone ($C_6H_{14}O$) con acido solforico diluito con ugual volume d'acqua. Rendita buonissima (Fittig, Annalen di Liebig, vol. 114, p. 56).

Costituzione dimostrata da Butlerow (Annalen, vol. 174, p. 125).

Bolle 105°-105°,5 $B_0 = 758{,}7$ mm.

Volume molecolare:

$$V_4 = 8{,}3047 \text{ cm.}^3$$
$$P = 5{,}9940 \text{ gr.}$$
$$D_4^{105,5} = 0{,}7217$$
$$\frac{M}{D} = 138{,}25$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8,6	17,31	6,263 mm.	6,263 mm.
43,4	15,32	5,543 »	5,546 »
60,2	14,38	5,203 »	5,200 »
79,0	13,30	4,812 »	4,813 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 6{,}440 - 0{,}0206\, t$$

che fornisce:

a^2 a 105,°5 = 4,267 $N = 15{,}4$

$T = 312°$.

26) *Cloruro isobutilico.* C_4H_9Cl

Bolle 68°-68°,2 B° = 761,0

Volume molecolare:

$$V_4 = 7{,}7055 \text{ cm}^3.$$
$$P = 6{,}2210 \text{ gr.}$$
$$D_4^{68} = 0{,}8073$$
$$\frac{M}{D} = 114{,}26$$

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 8{,}2°$		*a caldo*	
$h = 7{,}66$	$hc = 7{,}57$	$hc = 5{,}93$	$hc = 5{,}87$
		$a^2 = 4{,}127$ mm.	$N = 18{,}06$

27) *Cloruro isoamilico.* $C_5H_{11}Cl$

Bolle 99°,5-99,7° $B_0 = 758{,}4$

Volume molecolare:

$$V_4 = 7{,}6987$$
$$P = 6{,}0840$$
$$D_4^{99,5} = 0{,}7903$$
$$\frac{M}{D} = 134{,}40$$

Capillarità: Tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 8{,}2°$		*a caldo*	
$h = 8{,}15$	$hc = 8{,}06$	$h = 5{,}80$	$hc = 5{,}72$
		$a^2 = 4{,}022$	$N = 14{,}9$

28) *Clorobenzina.* C_6H_5C

di Kahlbaum. Bolle 131°,5 — 132° $B_0 = 763{,}5$

Volume molecolare = 114,28 (Schiff):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	17,59	6,364 mm.	6,364 mm.
47,5	15,76	5,702 »	5,702 »
64.6	14,94	5,405 »	5,400 »
86,7	13,86	5,014 »	5,010 »
107,5	12,84	4,649 »	4,643 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 6{,}540 - 0{,}01765\,t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 132° = 4{,}211 \text{ mm.} \qquad N\ 18{,}4$$

$$T = 370°.$$

29) *Clorotoluene.* $C_6H_4Cl - CH_3$

di Kahlbaum quasi tutto paracomposto. Bolle 159°,5-160° $B_0 = 763{,}5$

Volume molecolare: 134,91 (Schiff):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
11,8	17,85	6,458 mm.	6,458 mm.
50,0	16,05	5,81 »	5,82 »
78,5	14,81	5,36 »	5,35 »
81	14,70	5,31 »	5,30 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 6{,}655 - 0{,}0167\,t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 159°{,}5 = 3{,}992 \qquad N = 14{,}8$$

$$T = 398°.$$

30) *Cloruro di benzile.* $C_6H_5CH_2Cl$

Distillando un kilo di prodotto puro commerciale in gran parte passò costante tra 177°,5-178°5 $B_0 = 763{,}5$.

Avendo dato risultati che parevano eccezionali, furono fatte due serie di osservazioni con campioni diversi e rideterminato anche il volume molecolare:

$V_4 = 8{,}2947$ cm³
$P = 7{,}8310$ gr.
$D_4^{178} = 0{,}9453$
$\frac{M}{D} = 133{,}45$

Due anni fa trovai:
$\frac{M}{D} = 133{,}45$ e $133{,}47$

Capillarità:

I[a] serie

t	hc	a^2	a^2 calcolato
7,5	19,77	7,153 mm.	7,153 mm.
72,0	16,70	6,042 »	6,040 »
80,0	16,28	5,900 »	5,901 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7,283 - 0,01727\, t$$

che fornisce:

a^2 a 178°,5 = 4,201 mm. N = 15,7

T = 421°.

II[a] serie

t	hc	a^2	a^2 calcolato
11,0	19,63	7,102 mm.	7,102 mm.
48,0	17,88	6,469 »	6,469 »
77,5	16,49	5,967 »	5,965 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7,290 - 0,0171\, t$$

che fornisce:

a^2 a 178,5 = 4,238 mm. N = 15,8

T = 426°.

31) *Bicloruro di propilene.* $C_3H_6Cl_2$

Bolle 97,5-98,5 B_0=760,3

Volume molecolare:

V_4 = 7,7150

P = 8,0780

D = 1,0470

$\frac{M}{D}$ = 107,59

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo t = 8

h = 7,55 hc = 7,46

a caldo

h = 5,58 hc = 5,53

a^2 = 3,881 N = 18,03

32) *Percloroetilene.* C_2Cl_4

Bolle 120°-121° B_0 = 756,5 mm.

Volume molecolare = 114,20 (Schiff).

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo t = 8,2

h = 5,93 hc = 5,84

a caldo

h = 4,12 hc = 4,06

a^2 = 2,855 N = 13,4

33) *Tricloroetane asimmetrico.* $CH_2Cl - CHCl_2$

Bolle 114°-114°,3 $B^o = 759,8$

Volume molecolare = 102,77 (Schiff).

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 7,1$		*a caldo*	
$h = 7.09$	$hc = 7.00$	$h = 4,97$	$hc = 4,92$
		$a^2 = 3,459$	$N = 16,8$

34) *Epicloridrina.* C_3H_5OCl

Preparato secondo il metodo di Reboul. Bolle 116°,5 $B_0 = 763,6$

Volume molecolare = 87,12 (Schiff).

Capillarità: venne determinata con due metodi diversi.

1) Tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 7,2$		*a caldo*	
$h = 9,40$	$hc = 9,31$	$h = 6,65$	$hc = 6,57$
		$a^2 = 4,620$	$N = 26,5$

2) Per interpolazione: tubo chiuso a costante 0,36181:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
7,3	18,32	6,628 mm.	6,628 mm.
35,0	16,97	6,138 »	6,130 »
44	16,51	5,973 »	5,964 »
49,5	16,21	5,865 »	5,880 »
79,0	14,73	5,329 »	5,33 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 6,760 - 0,0181t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 116,5 = 4,652 \qquad N = 26,7$$
$$T = 373.$$

35) *Cloralio.* $CCl_3—COH$

Preparato di fresco dall'idrato e ridistillato subito bolle costantemente a 96°,5 $B_0 = 754,6$ mm.

Volume molecolare = 106,37 (Thorpe):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10,5	11,54	4,175 mm.	4,175 mm.
47,5	10,18	3,683 »	3,680 »
66,5	9,45	3,419 »	3,424 »
78,5	9,03	3,267 »	3,264 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4,316 - 0,0134t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 96,5 = 3,021 \text{ mm.} \qquad N = 14,1$$
$$T = 322°.$$

36) *Etere monocloroacetico.* $CH_2Cl-COOC_2H_5$

Bolle 144°,3-144°,8 $B_0 = 753,7$
Volume molecolare = 123,09 (Schiff)
Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 7$		*a caldo*	
$h = 8,23$	$hc = 8,15$	$h = 5,24$	$hc = 5,18$
		$a^2 = 3,529$ mm.	N = 14,4

37) *Etere dicloroacetico.* $CHCl_2 - COOC_2H_5$

Bolle 157°,6 $B_0 = 754,9$
Volume molecolare = 143,44 (Schiff)
Capillarità: tubo a costante 0,7032:

a freddo $t = 7,3$		*a caldo*	
$h = 7,46$	$hc = 7,37$	$h = 4,52$	$hc = 4,46$
		$a^2 = 3,143$ mm.	N = 10,9

38) *Etere tricloroacetico.* $CCl_3 - COOC_2H_5$

Bolle 166,°8 $B_0 = 753,7$
Volume molecolare: 163,86 (Schiff)
Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 7,4$		*a caldo*	
$h = 6,82$	$hc = 6,73$	$h = 3,98$	$hc = 3,91$
		$a^2 = 2,749$ mm.	N = 8,38

39) *Cloruro di benzoile.* C_6H_5COCl

Bolle 194,°5-195° $B_0 = 754,6$
Volume molecolare = 134,7 (Kopp)
Capillarità: tubo chiuso a costante 0,36181:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,8	18,64	6,744 mm.	6,744 mm.
45,5	17,16	6,208 »	6,209 »
69,5	16,17	5,850 »	5,849 »
81,5	15,65	5,662 »	5,669 »
110,5	14,45	5,228 »	5,234 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 6,891 - 0,0150t$$

che fornisce: a^2 a 194,5 = 3,966 mm. N = 14,7

T = 459°.

40) *Cloruro di benzilidene.* $C_6H_5 - CHCl_2$

Di Kahlbaum. Bolle con grande costanza 203°,5-204° $B_0 = 756,2$
Volume molecolare determinato calcolando la formola dei volumi dai dati seguenti:

$D_4^0 = 1,2699$ $D_4^{55,8} = 1,2122$ $D_4^{79,2} = 1,1877$ $D_4^{135,5} = 1,1257$

resi dalla formola:

$$V_t = 1 + 0{,}000825243t + 0{,}00000022636t^2 + 0{,}000000004873t^3$$

che fornisce:

$$D_4^{204} = 1{,}0407 \quad \frac{M}{D} = 154{,}25$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
11,5	17,39	6,292 mm.	6,292 mm.
48,5	16,14	5,839 »	5,840 »
76,5	15,20	5,499 »	5,499 »
93,0	14,63	5,293 »	5,297 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 6{,}432 - 0{,}0122t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 203{,}5 = 3{,}950 \text{ mm.} \qquad N = 12{,}8$$

$$T = 527°.$$

41) *Bromo.* Br_2

Bromo puro del commercio perfettamente disseccato fu distillato e frazionato in un apparecchio interamente di vetro senza congiunture in altro materiale. Bolle a 60° $B_0 = 762{,}3$.

Volume molecolare = 53,45 (Thorpe):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	7,84	2,836 mm.	2,836 mm.
46,5	6,95	2,514 »	2,512 »
51,0	6,84	2,474 »	2,473 »
56,0	6,70	2,425 »	2,428 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 2{,}9254 - 0{,}00888t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 60 = 2{,}3926 \qquad N = 22{,}3$$

$$T = 329°.$$

42) *Bromuro etilico.* C_2H_5Br

Tutti i bromuri alcoolici qui studiati provvengono dagli alcool rispettivi per l'azione del bromo e del fosforo rosso e dopo le solite purificazioni mostrano tutti un punto di ebollizione perfettamente costante.

Bolle 38,°4 $B_0 = 762{,}4$ mm.

Volume molecolare:

$$V_4 = 8{,}2639$$

$$P = 11{,}6790$$

$$D_4^{38 \cdot 4} = 1{,}4134$$

$$\frac{M}{D} = 77{,}07$$

Capillarità: tubo chiuso a costante 0,36181:

a freddo $t = 10{,}1$		*a caldo*	
$h = 9{,}95$	$hc = 9{,}78$	$h = 8{,}87$	$hc = 8{,}70$
$a^2 = 3{,}538$ mm.		$a^2 = 3{,}148$ mm.	$N = 20{,}44$

Formola generale:

$$a^2 = 3{,}677 - 0{,}01381t$$
$$T = 265^\circ.$$

43) *Bromuro propilico.* C_3H_7Br

Bolle 71,°0 $B_0 = 762{,}3$

Volume molecolare = 97,0 (Zander):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	11,17	4,041 mm.	4,041 mm.
45,2	9,78	3,538 »	3,539 »
68,5	8,86	3,205 »	3,206 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4{,}184 - 0{,}01428t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 71 = 3{,}170 \text{ mm.} \qquad N = 16{,}3$$
$$T = 293^\circ.$$

44) *Bromuro isopropilico.* C_3H_7Br

Bolle 60°,5 $B_0 = 763{,}8$

Volume molecolare = 99,0 (Zander):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10,5	10,64	3,849 mm.	3,849 mm.
26,0	10,02	3,625 »	3,625 »
38,3	9,54	3,452 »	3,447 »
52,5	8,98	3,252 »	3,241 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4{,}002 - 0{,}0145t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 60{,}5 = 3{,}125 \text{ mm.} \qquad N = 15{,}8$$
$$T = 275^\circ.$$

45) *Bromuro isobutilico.* C_4H_9Br

Bolle 90°,5-91° $B_0 = 758{,}4$ mm.

Volume molecolare:

$$V_4 = 7{,}7359 \text{ cm}^3$$
$$P = 8{,}8623 \text{ gr.}$$
$$D_4^{91} = 1{,}1456$$
$$\frac{M}{D} = 118{,}39$$

t	he	a^2	a^2 calcolato
10,1	11,73	4,244 mm.	4,244 mm.
48,0	10,25	3,708 »	3,710 »
69,5	9,42	3,408 »	3,407 »
81,5	8,95	3,241 »	3,237 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4,386 - 0,0141t$$

che fornisce:

a^2 a $91 = 3,103$ mm. N = 13,1
T = 311°.

46) *Bromuro isoamilico.* $C_5H_{11}Br$

Bolle 118°,5 $B_0 = 756,3$
Volume molecolare:

$$V_4 = 7,6020 \text{ cm}^3$$
$$P = 8,2720 \text{ gr.}$$
$$D_4^{118\cdot5} = 1,0881 \text{ »}$$
$$\frac{M}{D} = 138,63$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
15,1	12,30	4,45 mm.	4,45 mm.
47	11,15	4,03 »	4,02 »
69,5	11,32	3,73 »	3,72 »
87,5	9,64	3,48 »	3,48 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4,650 - 0,0134t$$

che fornisce:

a^2 a $118,5 = 3,060$ N = 11,0
T = 347°.

47) *Bromuro allilico.* C_3H_5Br

Bolle 70°-70°,5 $B_0 = 755,5$
Volume molecolare = 90,5 (Zander):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8	11,53	4,17 mm.	4,17 mm.
37,5	10,35	3,74 »	3,73 »
43,5	11,10	3,65 »	3,64 »
55,0	9,68	3,47 »	3,472 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4,2869 - 0,0148t$$

che fornisce:

a^2 a $70 = 3,251$ mm. N = 18,0
T = 289°.

48) *Bromobenzina.* C_6H_5Br

Bolle 155°,5-156° $B_0 = 759,7$ mm.
Volume molecolare:

$V_4 = 7,7123$ cm³
$P = 10,0880$ gr.
$D_4^{156} = 1,3080$ »
$\frac{M}{D} = 119,88$

Weger, Annalen di Liebig, v. 221, p. 1 trovò:

$$\frac{M}{D} = 119,80$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8	14,42	5,217 mm.	5,217 mm.
43,5	13,13	4,750 »	4,738 »
46,2	13,00	4,704 »	4,702 »
70,0	12,13	4,389 »	4,380 »
72,5	12,03	4,350 »	4,347 »
102,5	10,89	3,941 »	3,941 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 5,325 - 0,0135t$$

che fornisce:

a^2 a $156 = 3,219$ $N = 13,4$
$T = 394°$.

49) *Bromotoluene, orto.* $C_6H_4BrCH_3$

Bolle 182°-182°,5 $B_0 = 761,8$
Volume molecolare:

$V_4 = 8,3057$ cm³
$P = 9,9926$ gr.
$D_4^{182} = 1,2031$
$\frac{M}{D} = 141,95$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,5	14,83	5,365 mm.	5,365 mm.
48,2	13,45	4,866 »	4,865 »
78,0	12,39	4,482 »	4,481 »
112,2	11,15	4,044 »	4,040 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 5,487 - 0,0129t$$

che fornisce:

a^2 a $182,5 = 3,133$ mm. $N = 11,0$
$T = 425°$.

50) *Bromuro di etilene.* $C_2H_4Br_2$

Di Kahlbaum. Punto di fusione 7°,6-7°,8. Bolle 130°,3 $B_0 = 759,5$

$$V_4 = 7,6797$$
$$P = 14,7810$$
$$D_4^{130} = 1,9246$$
$$\frac{M}{D} = 97,65$$

Pierre trova: 97,70 Thorpe: 97,06

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8,7	10,55	3,817 mm.	3,817 mm.
51,5	9,41	3,404 »	3,407 »
70,0	8,92	3,227 »	3,230 »
75,5	8,78	3,176 »	3,178 »
83,5	8,58	3,104 »	3,101 »
110,0	7,87	2,847 »	2,848 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,900 - 0,00957t$$

che fornisce:

a^2 a 130,3 = 2,654 mm. N = 13,6

T = 407°.

51) *Bromuro di propilene.* $C_3H_6Br_2$

Bolle 141°,5-142° $B_0 = 759,4$ mm.

Volume molecolare = 118,4 (Zander):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10	10,48	3,792 mm.	3,792 mm.
63,5	9,08	3,285 »	3,283 »
71,7	8,86	3,206 »	3,205 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,8869 - 0,00950t$$

che fornisce:

a^2 a 141,5 = 2,543 N = 10,7

T = 409°.

52) *Ioduro metilico.* CH_3I

I ioduri alcoolici qui menzionati sono preparati per l'azione dell'iodio e del fosforo amorfo sugli alcool corrispondenti. Bolle 43°,5-43°,8 $B_0 = 756,5$ mm.

Volume molecolare = 68,27 (Pierre)

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 2,5$
$h = 4,29$ $hc = 4,21$

a caldo
$h = 3,68$ $hc = 3,60$
$a^2 = 2,532$ N = 18,5

53) *Ioduro etilico.* $C_2 H_5 I$

Bolle 72°,2 $B_0 = 758,3$

Volume molecolare: $V_4 = 7,7055$ cm³

$P = 13,9520$ gr.

$D_4^{72} = 1,18106$

$\frac{M}{D} = 86,12$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
7,2	8,86	3,205 mm.	3,206 mm.
39,5	7,93	2,869 »	2,873 »
68,5	7,11	2,570 »	2,575 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,2805 - 0,0103t$$

che fornisce:

a^2 a 72,3 = 2,539 N = 14,7

T = 316°.

54) *Ioduro propilico.* $C_3 H_7 I$

Bolle 102°,5 $B_0 = 757,4$ mm.

Volume molecolare = 107,1 (Zander):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
14	9,67	3,499 mm.	3,499 mm.
40	8,92	3,227 »	3,227 »
70	8,06	2,916 »	2,914 »
85,3	7,63	2,760 »	2,754 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,645 - 0,01045t$$

che fornisce:

a^2 a 102,5° = 2,574 mm. N = 12,0

T = 348°.

55) *Ioduro isopropilico.* $C_3 H_7 I$

Bolle 89° $B_0 = 755,6$

Volume molecolare = 108,3 (Zander):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
7	9,36	3,386 mm.	3,386 mm.
49,5	8,13	2,941 »	2,942 »
70,0	7,54	2,728 »	2,727 »
77,0	7,34	2,655 »	2,654 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,4596 - 0,01045t$$

che fornisce:

a^2 a 89° = 2,529 mm. N = 11,7

T = 331°.

56) *Ioduro allilico.* $C_3 H_5 I$

Bolle 101°,5-102° $B_0 = 758,5$ mm.
Volume molecolare = 101,0 (Zander):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
11,1	10,02	3,625 mm.	3,625 mm.
43,5	9,03	3,267 »	3,269 »
45,3	8,98	3,249 »	3,249 »
66,5	8,33	3,013 »	3,016 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,747 - 0,0110t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 102 = 2,625 \qquad N = 13,0$$
$$T = 340°.$$

57) *Ioduro isobutilico.* $C_4 H_9 I$

Bolle 119°,5-120° $B_0 = 760,7$
Volume molecolare:

$$V_4 = 8,3249$$
$$P = 11,9340$$
$$D_4^{119,5} = 1,4335$$
$$\frac{M}{D} = 128,28$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
6,5	10,28	3,719 mm.	3,719 mm.
48,5	9,09	3,289 »	3,286 »
70,2	8,47	3,064 »	3,062 »
74,5	8,34	3,018 »	2,017 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,786 - 0,01032t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 119,5 = 2,553 \qquad N = 9,9$$
$$T = 366°.$$

58) *Ioduro isoamilico.* $C_5 H_{11} I$

Bolle 148°-148°,5 $B_0 = 755,3$
Volume molecolare:

$$V_4 = 7,7205$$
$$P = 10,1130$$
$$D_4^{148} = 1,3098$$
$$\frac{M}{D} = 151,08$$

t	hc	a^3	a^2 calcolato
5	11,10	4,016 mm.	4,016 mm.
39,5	10,06	3,642 »	3,644 »
67,0	9,25	3,346 »	3,350 »
88,5	8,60	3,111 »	3,110 »
113,5	7,86	2,840 »	2,844 »
135	7,24	2,620 »	2,612 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4,070 - 0,0108t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 148 = 2,472 \text{ mm.} \qquad N = 8,2$$

$$T = 377°.$$

59) *Iodobenzina.* C_6H_5I

Preparata da Kahlbaum. Bolle 187°,5-188° $B_0 = 754,5$

Questa sostanza come anche alcune poche altre, bollenti ad alta temperatura, non danno a bassa temperatura dei valori per a^2 esprimibili con una retta. L'abbassamento è irregolare ed ha l'aspetto come se una viscosità del liquido ne impedisse i movimenti. A temperature più elevate poi il valore di $\frac{dh}{dt}$ diventa costante.

Volume molecolare determinato stabilendo la formola dei volumi coi dati seguenti:

$$D_4^0 = 1,8578 \qquad D_4^{11} = 1,8403 \qquad D_4^{55,8} = 1,7732 \qquad D_4^{79,2} = 1,7374$$

$$D_4^{135,5} = 1,6486$$

espressi dalla formola:

$$V_t = 1 + 0,00081959t + 0,0000004697t^2 + 0,0000000029025t^3$$

colla quale si calcola:

$$D_4^{188} = 1,5612 \qquad \frac{M}{D} = 130,55$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
110	9,71	3,513 mm.	3,513 mm.
117,5	9,48	3,429 »	3,429 »
134,0	8,99	3,252 »	3,245 »
158,5	8,23	2,977 »	2,970 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 3,625 - 0,0112\delta \qquad (\delta = t - 100)$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 188° = 2,639 \text{ mm.} \qquad N = 10,1$$

$$T = 424°.$$

60) *Propilamina normale.* $C_3H_7N_2$

Le ammoniache sostituite qui citate sono tutte preparate da Kahlbaum e mostravano un punto di ebollizione assai costante. Furono tutte conservate per qualche

tempo sopra la potassa fusa e nel momento della distillazione (per quelle che lo comportano) fu aggiunto un pezzetto di sodio metallico nel matraccino a frazionamento.

Bolle 49°,3-49°,8 $B_0 = 755,5$

Volume molecolare:

	I	II
V_4	$= 7,7091$ cm³	7,7000 cm³
P	$= 5,3051$ gr.	5,3007 gr.
$D_4^{49,5}$	$= 0,6882$	0,6884
$\frac{M}{D}$	$= 85,61$	85,60

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032 (all'ebollizione):

a freddo $t = 11,5$ | *a caldo*
$h = 9,34$ $hc = 9,35$ | $h = 8,18$ $hc = 8,10$
| $a^2 = 5,696$ N = 33,3.

61) *Allilamina.* $C_3 H_5 NH_2$

Bolle 56°-56°,5 $B_0 = 756,2$

Volume molecolare:

	I	II
V_4	$= 7,6844$ cm³	7,6734 cm³
P	$= 5,5796$ gr.	5,5709 gr.
D_4^{56}	$= 0,7261$	0,7260
$\frac{M}{D}$	$= 78,38$	78,38

Capillarità: lo stesso tubo e così per quelli che seguono:

a freddo $t = 11,0$ | *a caldo*
$h = 9,73$ $hc = 9,65$ | $h = 8,47$ $hc = 8,40$
| $a^2 = 5,907$ N = 37,7

62) *Isobutilamina.* $C_4 H_9 HN_2$

Bolle 67°,7 $B_0 = 755,7$

Volume molecolare:

$V_4 = 7,7343$ cm³
P $= 5,3100$ gr.
$D_4^{67,7} = 0,6865$
$\frac{M}{D} = 106,16$

Capillarità:

a freddo $t = 12,3$ | *a caldo*
$h = 9,15$ $hc = 9,06$ | $h = 7,49$ $hc = 7,42$
| $a^2 = 5,218$ mm. N = 24,6

63) *Amilamina.* $C_5H_{11}NH_2$

Bolle 94°,8-95° $B_0 = 754,2$
Volume molecolare:

$V_4 = 7,7070$ cm³
$P = 5,2790$ gr.
$D_4^{95} = 0,6848$
$\frac{M}{D} = 126,84$

Capillarità:

a freddo $t = 11,6$		*a caldo*	
$h = 9,30$	$hc = 9,20$	$h = 7,10$	$hc = 7,02$
		$a^2 = 4,936$ mm.	$N = 19,4$

64) *Dietilamina.* $C_4H_{10}NH$

Dalla nitrosodietilina. Bolle 55°,5-56° $B_0 = 757,8$
Volume molecolare:

	I	II	III con prodotto diverso
V_4	= 7,7170 cm³	7,7170 cm³	7,7043 cm³
P	= 5,1585 gr.	5,1597 gr.	5,1500
D_4^{56}	= 0,6684	0,6686	0,6684
$\frac{M}{D}$	= 109,05	109,02	109,05

Capillarità:

a freddo $t = 10,2$		*a caldo*	
$h = 8,70$	$h = 8,63$	$h = 7,17$	$h = 7,09$
		$a^2 = 4,986$ mm.	$N = 22,9$

65) *Trietilamina.* $(C_2H_5)_3N$

Bolle 88°,8-89° $B_0 = 758,3$
Volume molecolare:

	I	II
V_4	= 7,7381 cm³	7,6451 cm³
P	= 5,1230 gr.	5,0625 gr.
D_4^{89}	= 0,6620	0,6622
$\frac{M}{D}$	= 153,82	153,77

Capillarità:

a freddo $t = 10,7$		*a caldo*	
$h = 8,62$	$hc = 8,53$	$h = 6,05$	$hc = 5,98$
		$a^2 = 4,205$ mm	$N = 13,7$

66) *Piridina.* C_5H_5N

Bolle 116°-116°,2 $B_0 = 759{,}5$

Volume molecolare:

	I	II
V_4	= 7,6705 cm³	7,6512 cm³
P	= 6,7700 gr.	6,7506 gr.
D_4^{116}	= 0,8826	0,8823
$\frac{M}{D}$	= 89,34	89,38

Capillarità:

a freddo $t = 10{,}0$

$h = 11{,}20$ $hc = 11{,}12$

a caldo

$h = 7{,}96$ $hc = 7{,}89$

$a^2 = 5{,}549$ $N = 31{,}1$

67) *Piperidina.* $C_5H_{11}N$

Bolle 104°,5-105° $B_0 = 755{,}7$. Si unisce con grande rapidità coll'anidride carbonica dell'aria.

Volume molecolare:

	I	II	III con altro campione 3 mesi più tardi
V_4	= 7,7200 cm³	7,6730 cm³	7,6986 cm³
P	= 6,0230 gr.	5,9980 gr.	6,0126 gr.
D_4^{105}	= 0,7801	0,7791	0,7810
$\frac{M}{D}$	= 108,76	108,90	108,64

Capillarità: col tubo chiuso a costante 0,36181:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10,8	20,35	7,363 mm.	7,363 mm.
65,8	17,01	6,155 »	6,154 »
73,5	16,54	5,984 »	5,985 »
82,5	15,98	5,782 »	5,786 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7{,}600 - 0{,}02198t$$

che fornisce: a^2 a $105 = 5{,}293$ mm. $N = 24{,}4$

68) *Anilina.* $C_6H_5NH_2$

Bolle 183°,1 $B_0 = 758{,}2$

Volume molecolare:

	I	II
V_4	= 7,7120	7,6972
P	= 6,7480	6,7367
D_4^{183}	= 0,8750	0,8752
$\frac{M}{D}$	= 106,08	106,05

Kopp trova 106,00

Thorpe trova 106,37

Capillarità: tubo chiuso a costante 0,36181:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
6,5	26,30	9,53 mm.	9,53 mm.
44,5	23,89	8,644 »	8,64 »
64,5	22,60	8,177 »	8,175 »
85,2	21,20	7,670 »	7,692 »
90,5	20,97	7,569 »	7,568 »
101	20,25	7,327 »	7,322 »
115	19,30	6,983 »	6,994 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 9,6835 - 0,02338t$$

che fornisce:

a^2 a $183 = 5,405$ mm. $\qquad N = 25,5$

$T = 414°$.

69) *Chinolina.* C_9H_7N

Ottenuta per sintesi. Bolle 234°-234°,5 $B_0 = 758,6$

Volume molecolare:

$V_4 = 7,7179$

$P = 7,1090$

$D_4^{234} = 0,9211$

$\frac{M}{D} = 139,75$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8,1	24,01	8,687 mm.	8,687 mm.
48,5	22,10	7,996 »	7,999 »
74,5	20,91	7,565 »	7,557 »
82,5	20,51	7,420 »	7,420 »
134,5	18,07	6,533 »	6,536 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 8,8248 - 0,01702t$$

che fornisce:

a^2 a $234,5 = 4,833 \qquad N = 17,2$

$T = 518°$.

70) *Nitrometane.* CH_3NO_2

Ottenuto per l'azione del nitrito potassico sul monoclor-acetato potassico.
Bolle 101°-101°,5 $B_0 = 764,7$

Volume molecolare:

	I	II
V_4	= 7,7143 cm³	7,6932 cm³
P	= 7,8975 gr.	7,8740 gr.
D_4^{101}	= 1,0237	1,0235
$\frac{M}{D}$	= 59,49	59,50

Capillarità fatta con due metodi:

1) tubo a costante 0,7032 all'ebollizione:

a freddo $t = 8$ | *a caldo*

$h = 9{,}77$ $hc = 9{,}70$ | $h = 7{,}25$ $hc = 7{,}19$

$a^2 = 5{,}056$ mm. $N = 42{,}5$

2) per interpolazione: tubo chiuso a costante 0,36181:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
11,6	18,93	6,85 mm.	6,85 mm.
46,5	17,02	6,16 »	6,16 »
61,5	16,23	5,87 »	5,87 »
86,4	14,83	5,37 »	5,38 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7{,}076 - 0{,}0196t$$

che fornisce:

a^2 a $101{,}5 = 5{,}087$ mm $N = 42{,}7$

$T = 361^\circ$.

71) *Nitroetane.* $C_2 H_5 NO_2$

di Kahlbaum. Bolle 114°,5-114°,8 $B_0 = 760{,}7$.

Volume molecolare:

	I	II
V_4	= 7,6895 cm³	7,7221 cm³
P	= 7,1750 gr.	7,1932 gr.
$D_4^{114,5}$	= 0,9330	0,9328
$\frac{M}{D}$	= 80,24	80,26

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 8{,}5$ | *a caldo*

$h = 9{,}07$ $hc = 9{,}00$ | $h = 6{,}57$ $hc = 6{,}51$

$a^2 = 4{,}578$ mm. $N = 28{,}5$

72) *Nitrobenzina.* $C_6 H_5 NO_2$

Bolle 208° $B_0 = 753{,}5$

Volume molecolare: 125,7 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
40	20,06	7,258 mm.	7,256 mm.
48,5	19,65	7,109 »	7,109 »
70,5	18,60	6,729 »	6,729 »
74,0	18,43	6,668 »	6,668 »
98,5	17,24	6,237 »	6,244 »
116,4	16,40	5,934 »	5,935 »
128,0	15,84	5,731 »	5,734 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7{,}256 - 0{,}0173\,\delta \qquad (\delta = t - 40^\circ)$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 208^\circ = 4{,}350 \text{ mm.} \qquad N = 17{,}3$$
$$T = 419^\circ.$$

73) *Cloropicrina.* $CCl_3\,NO_2$

Bolle 112°-112°,5 $B_0 = 763{,}5$
Volume molecolare = 110,49 (Thorpe):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,3	11,47	4,150 mm.	4,150 mm.
47,5	10,11	3,658 »	3,660 »
67,7	9,42	3,408 »	3,402 »
76,0	9,14	3,300 »	3,297 »
93,5	8,48	3,069 »	3,071 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4{,}268 - 0{,}0128t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 112 = 2{,}828 \qquad N = 12{,}7$$
$$T = 333^\circ.$$

74) *Nitrato etilico.* $C_2\,H_5\,NO_3$

Bolle 86°,5-87° $B_0 = 758{,}4$
Volume molecolare = 91,97 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
12,5	15,31	5,539 mm.	5,539 mm.
46,5	13,78	4,986 »	4,980 »
65,5	12,90	4,667 »	4,674 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 5{,}730 - 0{,}01613t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 87 = 4{,}330 \qquad N = 23{,}5$$
$$T = 355^\circ.$$

75) *Nitrato isoamilico.* $C_5\,H_{11}\,NO_3$

Bolle 147°,2-147°,4 $B_0 = 757{,}8$
Volume molecolare:

$$V_4 = 8{,}2964$$
$$P = 7{,}2162$$
$$D_4^{147} = 0{,}8698$$
$$\frac{M}{D} = 152{,}59$$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,9	15,96	5,774 mm.	5,774 mm.
48,5	14,28	5,167 »	5,166 »
69,2	13,37	4,837 »	4,840 »
80,7	12,87	4,656 »	4,659 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 5,9304 - 0,01575t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 147,2 = 3,612 \qquad N = 11,8$$
$$T = 376^\circ.$$

76) *Acetonitrile.* CH_3CN

Tutti i cianuri e solfocianuri qui citati sono preparati da Kahlbaum. Alcuni di essi contenevano come impurità piccole traccie di isocianuri che furono tolti agitando il prodotto con acido cloridrico diluito.

Bolle 81°,2-81°,4 $B_0 = 757,3$

Volume molecolare:

	I	II
V_4	$= 7,6798$ cm³	7,6906 cm³
P	$= 5,4970$ gr.	5,5011 gr.
$D_4^{81,2}$	$= 0,7157$	0,7153
$\frac{M}{D}$	$= 57,21$	57,25

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 7,4$

$h = 11,20$ $hc = 11,11$

a caldo

$h = 8,67$ $hc = 8,60$

$a^2 = 6,047$ mm. $N = 52,8$

77) *Propionitrile.* C_2H_5CN

Bolle 97°-97°,2 $B_0 = 757,1$

Volume molecolare:

$V_4 = 7,7511$

$P = 5,4380$

$D_4^{97} = 0,7015$ Thorpe trova 78,35

$\frac{M}{D} = 78,28$

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 12$

$h = 10,90$ $hc = 10,81$

a caldo

$h = 7,83$ $hc = 7,75$

$a^2 = 5,453$ $N = 34,8$

78) *Isobutilcianuro.* $C_4 H_9 CN$

Bolle 129°,3-129°,5 $B_0 = 764,3$
Volume molecolare:

$V_4 = 7,6926$ cm³
$P = 5,3245$ gr.
$D_4^{129,3} = 0,6921$
$\frac{M}{D} = 119,70$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
6,0	19,42	7,026 mm.	7,028 mm.
33,0	18,15	6,567 »	6,56 »
54,5	17,11	6,190 »	6,189 »
82,5	15,82	5,726 »	5,710 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7,131 - 0,0173t$$

che fornisce:

a^2 a 129,3 = 4,900 mm. N = 20,4
T = 412°.

79) *Capronitrile.* $C_5 H_{11} CN$

Bolle 154° $B_0 = 762,1$

$V_4 = 7,6692$
$P = 5,2618$
$D_4^{154} = 0.6861$
$\frac{M}{D} = 141,10$

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8,7	19,19	6,94 mm.	6,94 mm.
37,5	17,93	6,48 »	6,48 »
58,0	17,04	6,16 »	6,16 »
80,2	16,00	5,79 »	5,81 »
113,5	14,66	5,30 »	5,287 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7,080 - 0,0158t$$

che fornisce:

a^2 a 154 = 4,647 mm. N = 16,4
T = 448°.

80) *Benzonitrile.* $C_6 H_5 CN$

Bolle 190°-190°,5 $B_0 = 759,4$
Volume molecolare = 121,6 (Kopp):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
4,5	22,85	8,267 mm.	8,266 mm.
42	31,05	7,616 »	7,610 »
65,0	19,93	7,210 »	7,201 »
83,8	18,98	6,867 »	6,870 »
115,0	17,47	6,320 »	6,321 »
126,5	16,94	6,129 »	6,119 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 8,345 - 0,0176t$$

che fornisce:

a^2 a 190 = 5,000 N = 20,6
T = 474°.

81) *Solfuro di carbonio.* CS_2

Bolle 46°,5 $B_0 = 766,5$
Volume molecolare:

	I	II	
V_4	= 7,6789 cm³	7,6778 cm³	
P	= 9,3943 gr.	9,3936 gr.	Thorpe trova 62,11
D_4^{47}	= 1,2233	1,2234	
$\frac{M}{D}$	= 62,06	62,06	

Capillarità: tubo aperto a costante 0,7032:

a freddo $t = 12,5$
$h = 7,85$ $hc = 7,77$
$a^2 = 5,464$ mm.

a caldo
$h = 6,82$ 6,75
$a^2 = 4,747$ mm. N = 38,3

$$\frac{dh}{dt} = 0,0211 \qquad T = 271°,5.$$

Mentre trovarono: Sajotschewsky T = 271°,8.
Cagniard de la Tour T = 275°,0.

82) *Olio di senape. Allilsolfocarbimide.* $C_3 H_5 NCS$

Bolle 151°,3 $B_0 = 764,2$
Volume molecolare:

	I	II	
V_4	= 7,7359 cm³	7,6965 cm³	
P	= 6,7605 gr.	6,7279 gr.	Kopp trova 113,15
D_4^{151}	= 0,8739	0,8741	
$\frac{D}{M}$	= 113,13	113,11	

Capillarità:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
11,5	19,65	7,109 mm.	7,109 mm.
33,7	18,66	6,751 »	6,741 »
43,0	18,18	6,578 »	6,580 »
45,5	18,09	6,545 »	6,545 »
72,5	16,84	6,093 »	6,097 »
90	16,05	5,807 »	5,806 »
117,5	14,77	5,343 »	5,350 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7,300 - 0,0166t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 151 = 4,793 \qquad N = 21,1$$

$$T = 439°.$$

83) *Fenilsolfocarbimide.* $C_6 H_5 NCS$

Bolle 219°,8 $B_0 = 748,8$

Volume molecolare:

$$V_4 = 7,6717 \text{ cm}^3$$

$$P = 7,2100 \text{ gr.}$$

$$D_4^{219} = 0,9398$$

$$\frac{M}{D} = 143,40$$

Capillarità:

t	hc	a^2	a^2 calcolato
63	18,94	6,853 mm.	6,851 mm.
73,2	18,50	6,693 »	6,688 »
83,5	18,03	6,523 »	6,523 »
113,5	16,75	6,060 »	6,049 »
120,0	16,43	5,944 »	5,939 »

Valori resi dalla formola:

$$a^2 = 7,059 - 0,0160\delta \qquad (\delta = t - 50°)$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 219,8 = 4,339 \text{ mm.} \qquad N = 15,1$$

$$T = 491°.$$

84) *Solfocianato metilico.* $CNSCH_3$

Bolle 132°,5-133° $B_0 = 760,5$

Volume molecolare = 78,90 (Pierre):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,2	20,55	7,435 mm.	7,435 mm.
48,5	18,53	6,704 »	6,704 »
60,0	17,95	6,495 »	6,490 »
73,5	17,23	6,234 »	6,239 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7,606 - 0,0186t$$

che fornisce:

a^2 a 133 = 5,132 mm. N = 32,5

T = 408°.

85) *Solfocianato etilico.* $CNSC_2H_5$

Bolle 143°,5-144° B_0 = 758,4

Volume molecolare = 100,07 (Buff):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
12,1	19,42	7,026 mm.	7,026 mm.
48,3	17,78	6,433 »	6,412 »
60,5	17,15	6,205 »	6,203 »
67,0	16,83	6,089 »	6,092 »
76,0	16,41	5,937 »	5,939 »
93,5	15,61	5,648 »	5,642 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 7,232 - 0,0170t$$

che fornisce:

a^2 a 143,5 = 4,792 mm N = 24,0

T = 425°.

86) *Solfuro etilico.* $(C_2H_5)_2S$

Bolle 91°-91°,5 B_0 = 757,7

Volume molecolare: 121,82 (Pierre):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,8	17,78	6,433 mm.	6,432 mm.
59,0	14,81	5,358 »	5,355 »
66,5	14,36	5,195 »	5,191 »
84,5	13,26	4,798 »	4,797 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 6,647 - 0,0219t$$

che fornisce:

a^2 a 91,5 = 4,644 N = 19,0

T = 303°.

87) *Tricloruro di fosforo.* PCl_3

Ottenuto trattando con fosforo bianco il tricloruro del commercio e dopo frazionando per 2 volte.

Passò quasi tutta la massa tra 75°,4, 75°,6 B_0 = 757,4

Volume molecolare: 93,34 (Thorpe):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
10,5	10,80	3,907 mm.	3,907 mm.
48,0	9,42	3,408 »	3,393 »
70,0	8,59	3,107 »	3,090 »

Valori resi dalla formola:

$$a^2 = 4,050 - 0,0137t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 75,4 = 3,017 \qquad N = 16,1$$
$$T = 295°.$$

88) *Ossicloruro di fosforo.* $POCl_3$

Bolle 107°,5-108° $B_0 = 758,2$
Volume molecolare = 101,37 (Thorpe):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
8	11,18	4,045 mm.	4,045 mm.
47,6	9,98	3,610 »	3,610 »
48,4	9,96	3,603 »	3,601 »
74,5	9,12	3,300 »	3,314 »
81,8	8,92	3,227 »	3,233 »
85,0	8,84	3,198 »	3,198 »

Risultati espressi dalla formola:

$$a^2 = 4,133 - 0,0110t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 107,5 = 2,951 \qquad N = 14,5$$
$$T = 375°.$$

89) *Ossietilcloruro fosforoso.* $P\begin{smallmatrix}OC_2H_5\\Cl_2\end{smallmatrix}$

Ottenuto facendo gocciolare lentamente l'alcool assolutissimo nel tricloruro fosforoso tenuto freddo (quantità equimolecolari), e rettificando il prodotto più volte. A ogni distillazione si decompone un poco depositando del fosforo rosso.

Bolle 116°,5-117°. $B_0 = 758,6$
Volume molecolare = 128,60 (Thorpe):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,1	12,79	4,627 mm.	4,627 mm.
46,7	11,38	4,117 »	4,118 »
51,3	11,21	4,056 »	4,055 »
60,0	10,88	3,936 »	3,937 »
72,5	10,41	3,766 »	3,767 »

Risultati resi dalla formola:

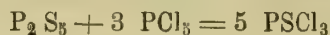
$$a^2 = 4,751 - 0,01357t$$

che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 116,5 = 3,170 \text{ mm} \qquad N = 12,4$$
$$T = 350°.$$

90) *Solfocloruro di fosforo.* $P\begin{smallmatrix}S\\Cl_3\end{smallmatrix}$

Ottenuto per l'azione del pentasolfuro di fosforo sopra il pentacloruro secondo l'equazione:

$$P_2S_5 + 3\ PCl_5 = 5\ PSCl_3$$

Rendita molto soddisfacente di prodotto subito puro. Lavato con acqua e seccato col cloruro di calcio, bolle costantemente a 124°,5-125° $B_0 = 754,6$.

Volume molecolare = 116,11 (Thorpe):

t	hc	a^2	a^2 calcolato
9,0	12,00	4,341 mm.	4,341 mm.
45,7	10,77	3,896 »	3,901 »
61,7	10,26	3,712 »	3,710 »
65,8	10,17	3,661 »	3,660 »
72,0	9,91	3,585 »	3,586 »

Risultati resi dalla formola:

$$a^2 = 4,4496 - 0,01199t$$

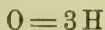
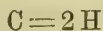
che fornisce:

$$a^2 \text{ a } 125 = 2,952 \qquad N = 12,7$$

$$T = 371^\circ.$$

Sarà superfluo discutere qui estesamente l'influenza che su questi risultati possono esercitare le inevitabili cause d'errore. Sebbene i metodi e gli istrumenti siano diversi, e per quanto creda, più esatti di quelli impiegati l'anno passato, ciò non ostante credo che si possa accettare all'incirca come errori massimi probabili, quelli ammessi nell'ultima Memoria nella quale, facendo la peggiore ipotesi, il cumulo degli errori sulla costante N risultò di 0,45 unità.

Come già dissi lo scopo principale della presente Memoria è quello di determinare gli equivalenti capillari (in H) di una serie di corpi semplici e di indagare se questi equivalenti siano invariabili per ogni elemento e se siano suscettibili di variazioni corrispondenti a variazioni della funzione chimica degli elementi nell'interno delle molecole. Mediante le due equivalenze:

$$C = 2H$$
$$O = 3H$$

ottenute confrontando le formole di sostanze fornenti valori di N uguali o almeno vicinissimi, abbiamo a suo tempo potuto stabilire una unica curva che esprimeva con esattezza i risultati di quasi tutte le mie numerose osservazioni di allora.

Ora, dopo avere studiato un nuovo materiale sperimentale assai più numeroso che non fosse il primo, posso aggiungere che questa curva esprime con la stessa esattezza anche tutti i nuovi risultati sperimentali, dimodochè io credo che la si possa considerare come l'espressione generale della dipendenza dei fenomeni di capillarità dalla natura e dalla costituzione delle sostanze.

Per trovare il numero di atomi d'idrogeno equivalenti (relativamente alla costante N) ad un atomo di un dato elemento io ho da prima seguìto il metodo dei confronti impiegato anche l'anno passato per scoprire le prime equivalenze di capillarità, ma essendo questo modo di procedere assai lungo e prolisso, tanto che mi sembra poco conveniente per una Memoria che pur dovrebbe restringersi in limiti possibilmente ristretti, noi seguiremo qui il metodo inverso per determinare i diversi equivalenti capillari.

Sia per esempio da determinarsi l'equivalente del iodio mentre conosciamo quello del carbonio?

Mediante il valore di N, fornito per esempio dal ioduro di etile C_2H_5I rileviamo dalla curva il numero di H corrispondente, sottraendo da questo l'equivalente del C_2H_5 espresso in H. La differenza sarà l'equivalente (in H) dell'atomo di iodio.

Per riprova poi si eseguisce la stessa operazione con un numero possibilmente grande di composti contenenti il iodio.

Riguardo alla curva generale ho da aggiungere ancora poche parole. Feci osservare nella prima Memoria su questo argomento, come per l'ultimo tratto della curva da H_{15} fino H_9 io non avessi allora che sole due osservazioni dirette e che perciò non era possibile che entro questi limiti la curva fosse tracciata esattamente. Di fatti nel calcolo di essa io esclusi questa porzione e stabilii l'equazione:

$$N = \frac{e^{6,48293-0,016763H}}{H}$$

solo per il rimanente. Ora, mediante il nuovo materiale sperimentale, ho potuto tracciare con più precisione quest'ultimo tratto il quale, come del resto era da aspettarsi è anch'esso benissimo reso dalla formola generale sopra scritta.

Per agevolarne la lettura, unisco a questa Memoria un quadro che per tutti i singoli valori di H fornisce i corrispondenti valori di N dedotti dalla formola generale.

Anzi tutto per riconfermare nuovamente le equivalenze fondamentali

$$C = 2H$$
$$O = 3H$$

del resto già confermate a sufficienza da tutto il primo materiale sperimentale, citerò alcuni nuovi esempî:

Terpene di limone $C_{10}H_{16}$, fornì $N = 10,1$ al quale sulla curva corrisponde. 36H
e colle equivalenze si calcola: $C_{10}H_{16} = 20 + 16 = 36H$

Anidride acetica $C_4H_6O_3$, fornì $N = 19,1$ corrispondente a 23H
mentre si calcola: $C_4H_6O_3 = 8 + 6 + 9 = 23H$

Etere metilamilico $C_6H_{14}O$, fornì $N = 13,8$ corrispondente a 29H
$C_6H_{14}O = 12 + 14 + 3 = 29H$

Ossalato etilico $C_6H_{10}O_4$, fornì $N = 10,7$ corrispondente a 34H
$C_6H_{10}O_4 = 12 + 10 + 12 = 34H$

Benzoato metilico $C_8H_8O_2$, fornì $N = 13,1$ corrispondente a 30H
$C_8H_8O_2 = 16 + 8 + 6 = 30H$

Benzoato etilico $C_9H_{10}O_2$, fornì $N = 10,6$ corrispondente a 34H
$C_9H_{10}O_2 = 18 + 10 + 6 = 34H$

Etere acetacetico $C_6H_{10}O_3$, fornì N 12,8 corrispondente a 31H
$C_6H_{10}O_3 = 12 + 10 + 9 = 31H$

Fenetol $C_8H_{10}O$, fornì $N = 13,8$ corrispondente a 29H
$C_8H_{10}O = 16 + 10 + 3 = 29H$

Aldeide valerica $C_5H_{10}O$, fornì $N = 19,3$ corrispondente a 23H
$C_5H_{10}O = 10 + 10 + 3 = 23H$

Aldeide cuminica $C_{10}H_{12}O$, fornì $N = 10,2$ corrispondente a 35H

$C_{10}H_{12}O = 20 + 12 + 3 = 35H$

Acetone metilpseudobutilico $C_6H_{12}O$, fornì $N = 15,4$ corrispondente a . . 27H

$C_6H_{12}O = 12 + 12 + 3 = 27H$

Aggiungendo questi esempî a quelli riportati nella prima Memoria, abbiamo più di 70 sostanze diversissime nelle quali le equivalenze sopra dette si verificano perfettamente. Si potrebbe da questo essere indotti a credere ch'esse siano realmente generali e non subiscano mai delle modificazioni; ma pure non è così.

Esistono delle serie omologhe intere e certe classi di corpi a costituzione analoga e caratteristica, nelle quali l'equivalente del carbonio è $= 3H$ oppure perfino H semplicemente.

Occupiamoci del carbonio, che di tutti gli elementi fornisce i risultati più complessi e più difficili ad interpretarsi.

Finora abbiamo visto che:

negli idrocarburi di tutti i tipi
» Alcool primaî e secondarî
» Eteri semplici e misti
» Eteri degli acidi della serie grassa ed aromatica monobasici e bibasici coi più svariati gruppi alcoolici
» Eteri a tipo speciale come l'acetale ed il fenetol ecc.
» Aldeidi della serie grassa ed aromatica
» Acetoni semplici e misti

sempre $C = 2H$ e $O = 3H$

Consideriamo ora gli acidi liberi della serie grassa:

Acido acetico $C_2H_4O_2$, fornì $N = 30,6$ corrispondente a 16H

ma $C_2H_4O_2 = 4 + 4 + 6 = 14H$

Differenza 2H in meno.

In questo caso dunque, impiegando le solite equivalenze capillari, non giungiamo allo stesso numero di H che secondo la formola generale corrisponde al valore di N trovato sperimentalmente, ma ad un numero assai minore.

Acido propionico $C_3H_6O_2$, fornì $N = 21,7$ corrispondente a 21H

mentre $C_3H_6O_2 = 6 + 6 + 6 = 18H$

Differenza 3H

Acido butirrico $C_4H_8O_2$, fornì $N = 16,4$ corrispondente a 26H

mentre $C_4H_8O_2 = 8 + 8 + 6 = 22H$

Differenza 4H

Acido isobutirrico $C_4H_8O_2$, fornì $N = 15,9$ corrispondente a 26H

mentre $C_4H_8O_2 = 8 + 8 + 6 = 22H$

Differenza 4H

Acido valerianico $C_5H_{10}O_2$, fornì $N = 12,6$ corrispondente a 31H

mentre $C_5H_{10}O_2 = 10 + 10 + 6 = 26H$

Differenza 5H

Troviamo dunque, impiegando la solita equivalenza:

$C = 2H$ per $C_2H_4O_2$ . . . . 2H in meno
» $C_3H_6O_2$ . . . . 3H »
» $C_4H_8O_2$ . . . . 4H »
» $C_4H_8O_2$ . . . . 4H »
» $C_5H_{10}O_2$ . . . . 5H »

Ossia: l'equivalenza $C = 2H$ ci dà regolarmente tanti atomi d'idrogeno di meno, *quanti sono gli atomi di carbonio dell'acido.* Pare perciò fuori dubbio che nella serie omologa degli acidi liberi sia valevole l'equivalenza

$$C = 3H.$$

Abbiamo già visto nella prima Memoria ed anche nella presente che gli eteri metilici degli acidi organici fin qui studiati e similmente certi eteri composti come l'etere metilamilico ed il fenetol soddisfano benissimo all'uguaglianza

$$C = 2H.$$

Ma esistono certi atomi di carbonio liberi, non concatenati direttamente con altri e in solo contatto con ossigeno, i quali posseggono una influenza minore sulle costanti capillari che non 2 atomi d'idrogeno. Essendo assai difficile il definire a parole la natura di questi atomi di carbonio, darò qui degli esempi sottolineando sempre l'atomo di carbonio che pare che varii di equivalente.

Acido formico . . . . $H—\underline{C}OOH$
Formiato metilico . . . . . $H—\underline{C}OOCH_3$
Dimetilacetal . . . . $CH_3—CH(O\underline{C}H_3)(O\underline{C}H_3)$
Anisol . . . . $C_6H_5—O—\underline{C}H_3$
Cresolmetilato . . . . $CH_3—C_6H_4—O—\underline{C}H_3$
Dimetilresorcina . . . . . . $C_6H_4(O—\underline{C}H_3)(O—\underline{C}H_3)$

Studiamone i risultati sperimentali supponendo valide le solite equivalenze capillari:

Acido formico CO_2H_2, fornì $N = 64,3$ corrispondente a 9H
mentre $CO_2H_2 = 2 + 6 + 2$ = 10H
Differenza 1H in più

Formiato metilico $C_2H_4O_2$, fornì $N = 39,6$ corrispondente a . . . 13H
mentre $C_2H_4O_2 = 4 + 4 + 6$ = 14H
Differenza 1H in più

Dimetilacetal $C_4H_{10}O_2$, fornì $N = 19,4$ corrispondente a 23H
mentre $C_4H_{10}O_2 = 8 + 10 + 6$ = 24H
Differenza 1H in più

Anisol C_7H_8O, fornì $N=18,0$ corrispondente a 24H
mentre $C_7H_8O=14+8+3$ = 25H

Differenza 1H in più

Paracresolato metilico $C_8H_{10}O$, fornì $N=14,5$ corrispondente a . . 28H
mentre $C_8H_{10}O=16+10+3$ = 29H

Differenza 1H in più

Dimetilresorcina $C_8H_{10}O_2$, fornì $N=13,0$ corrispondente a . . . 30H
mentre $C_8H_{10}O_2=16+10+6$ = 32H

Differenza 2H in più

Si vede che quanti sono gli atomi di carbonio in condizioni simili e sottolineati tanti sono gli atomi d'idrogeno in troppo, forniti dalla solita equivalenza $C=2H$. Pare dunque che in questi casi singolari di atomi di carbonio isolati non concatenati con altri ed in contatto con ossigeno si abbia l'equivalenza

$$C=H.$$

Bisogna però per giustificare quanto dico ch' io aggiunga alcune parole. Il formiato metilico ed il dimetilacetal contengono apparentemente ognuno due atomi di carbonio in condizioni simmetriche ed uguali, mentre non ne ho sottolineato che uno ed anche lo sperimento non ci dà che la differenza di un solo atomo d'idrogeno per ognuna delle due sostanze.

Per il formiato metilico faccio ricordare che il carbonio del metile non può appartenere a quella forma speciale di carboni, perchè in tutti gli eteri metilici di tutti gli acidi, che pure seguono benissimo le solite equivalenze, esso è in identiche condizioni come qui senza mostrare alcuna anomalia.

Quello che c' è di caratteristico nella molecola del formiato metilico è il carbonio isolato dell'acido formico, che come abbiamo visto mostra la sua natura speciale anche nell'acido libero.

In quanto poi al dimetilacetal non mi pare che i due gruppi (OCH_3) debbano necessariamente considerarsi come identici. Si può immaginare il dimetilacetal come l'etere metilico del prodotto di addizione dell'alcool metilico all'aldeide:

$$CH_3-CH\begin{matrix}-OCH_3\\-OH\end{matrix}$$

Uno dei due metili sarebbe così in contatto coll'ossigeno proveniente dall'aldeide, l'altro coll'ossigeno alcoolico.

Non mi pare impossibile che questa diversa provenienza degli atomi d'ossigeno possa provocare la differenza nei valori capillari dei due metili.

Quale però sia la causa di questa anomalia relativamente alle costanti capillari, che in certe circostanze mostrano certi atomi di carbonio isolati, non concatenati con altri della stessa specie, io non lo saprei asserire nè vorrai fare alcuna ipotesi che, qualunque fosse, sarebbe prematura. L'unica cosa che si potrebbe asserire colla probabilità di non errare è che gli eteri metilici dei fenoli appartengono a quello speciale gruppo di sostanze nei quali i carboni distaccati dalla catena principale hanno l'equivalente capillare: $C=H.$

Possiamo dunque concludere:

$C = 2H$ nella quasi totalità dei casi,

$C = 3H$ negli acidi liberi della serie grassa a più atomi di carbonio,

$C = H$ per il caso dei fenati metilici e di certi carboni isolati da altri.

Prima ch' io passi oltre conviene ch' io richiami qui il comportamento speciale, già accennato nella passata Memoria, che mostrano le sostanze contenenti delle lacune (così detti legami doppi) e che sono state possibilmente evitate nella presente Memoria.

Amilene C_5H_{10} (1 lacuna), fornì l'anno passato $N = 22{,}0$ corrisp. a 21H
mentre $C_5H_{10} = 10 + 10 =$ 20H
Differenza 1H in meno

Diallile C_6H_{10} (2 lacune), fornì $N = 18{,}3$ corrispondente a. . . . 24H
mentre $C_6H_{10} = 12 + 10 =$ 22H
Differenza 2H in meno

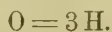
Aggiungo ancora:

Acetato di allile $C_5H_8O_2$ (1 lacuna), fornì $N = 16{,}9$ corrispondente a 25H
mentre $C_5H_8O_2 = 10 + 8 + 6 =$ 24H
Differenza 1H in meno

Si vede che riguardo alle equivalenze generali una lacuna può aumentare l'equivalente in H di 1, e due lacune di 2 unità. Ma questo fatto non è generale ed io riguardo l'influenza delle lacune sulle costanti capillari come argomento finora troppo poco elaborato per fare qualunque siasi conclusione.

Dell'ossigeno.

Dal materiale sperimentale fin qui discusso abbiamo visto che
negli alcool primari e secondari,
» acidi liberi,
» eteri di acidi mono e bibasici coi più diversi gruppi alcoolici,
» eteri propriamente detti,
» acetoni semplici e misti,
» aldeidi della serie grassa ed aromatica, sempre ed in tutte le condizioni

$$O = 3H.$$

Non vi è che una sola e specialissima forma di concatenazione dell'ossigeno nella quale il suo valore o equivalente capillare pare che sia un altro:

Quando un atomo di ossigeno è contemporaneamente legato a due atomi di carbonio i quali alla loro volta sono legati tra loro (ossigeno a cavallo) l'equivalente dell'ossigeno è zero.

Disgraziatamente le sostanze contenenti tali atomi di ossigeno sono rarissime e la loro preparazione tanto difficile ch' io non ho potuto raccogliere che 3 sol esempi.

Epicloridrina (') C_3H_5OCl

C_3H_5ClO fornì N = 26,7 corrispondente a 18H

$C_3H_5Cl = 6 + 5 + 7 = 18H$

O = 0H

Carvol $C_{10}H_{14}O$

$C_{10}H_{14}O$ fornì N = 10,6 corrispondente a 34H

$C_{10}H_{14} = 20 + 14 = 34H$

O = 0H

Furfurol $C_5H_4O_2$

$C_5H_4O_2$ fornì N = 27,2 corrispondente a 18H

$C_5H_4O = 10 + 4 + 3 = 17H$

O = 1H

È vero che in quest'ultimo caso abbiamo O = H, ma bisogna ricordarsi che nel furfurol esiste ancora una lacuna, la quale come ora si è detto può aumentare l'equivalente in H di una sostanza di una unità come qui difatti avviene.

Non so se con questi pochi esempî si voglia considerare come stabilita l'equivalenza

O = zero H

per i cosidetti atomi di ossigeno a cavallo, ma pare che qui si abbia una proprietà caratteristica di simili atomi d'ossigeno.

Del cloro.

Nella precedente Memoria si era giunti alla conclusione :

che nel cloroformio CCl_3H

» tetracloruro di carbonio CCl4

» cloruro propilico C_3H_7Cl

» cloruro di etilidene $CH_3 — CHCl_2$

vale l'uguaglianza

Cl = 7 H.

Citerò alcuni nuovi esempî per convalidare questo fatto:

Cloruro isobutilico C_4H_9Cl, fornì N = 18,1 corrispondente a. 24H

$C_4H_9 = 8 + 9 = 17H$

Cl = 7H

Cloruro isoamilico $C_5H_{11}Cl$, fornì N = 14,9 corrispondente a 28H

$C_5H_{11} = 10 + 11 = 21H$

Cl = 7H

Clorobenzina C_6H_5Cl, fornì N = 18,4 corrispondente a 24H

$C_6H_5 = 12 + 5 = 17H$

Cl = 7H

(') Sappiamo dalla prima Memoria che Cl = 7H.

Clorotoluene $C_6 H_4 Cl CH$, fornì $N = 14,8$ corrispondente a 28H

$C_7 H_7 = 14 + 7 \quad = \quad 21H$

$Cl = 7H$

Etere monocloroacetico $C_4 H_7 Cl O_2$, fornì $N = 14,4$ corrispondente a . . . 28H

$C_4 H_7 O_2 = 8 + 7 + 6 \quad = \quad 21H$

$Cl = 7H$

Etere dicloroacetico $C_4 H_6 Cl_2 O_2$, fornì $N = 10,9$ corrispondente a 34H

$C_4 H_6 O_2 = 8 + 6 + 6 \quad = \quad 20H$

$2Cl = 14H$

$Cl = 7H$

Etere tricloroacetico $C_4 H_5 Cl_3 O_2$, fornì $N = 8,4$ corrispondente a 40H

$C_4 H_5 O_2 = 8 + 5 + 6 \quad = \quad 19H$

$3Cl = 21H$

$Cl = 7H$

Cloralio $C_2 Cl_3 OH$, fornì $N = 14,1$ corrispondente a 29H

$C_2 OH = 4 + 3 + 1 \quad = \quad 8H$

$3Cl = 21H$

$Cl = 7H$

Questi dodici esempî basteranno per confermare definitivamente l'equivalenza:

$$Cl = 7H$$

ma nell'introduzione a questa Memoria dissi come la differenza tra i valori di N per il cloruro di etilidene e quello di etilene mi avesse già indotto l'anno passato a credere minore l'equivalente del cloro, quando più atomi di questo sono distribuiti sopra più carbonî uniti tra loro.

Farò vedere come questa previsione si è verificata.

L'anno passato trovai:

Cloruro di etilene $CH_2 Cl - CH_2 Cl$, fornì $N = 24,6$ corrispondente a . . . 19H

$C_2 H_4 = 4 + 4 \quad = \quad 8H$

$2Cl = 11H$

$Cl = 5,5H$

Posso aggiungere ora:

Tricloretane $CHCl_2 - CH_2 Cl$, fornì $N = 16,8$ corrispondente a 25H

$C_2 H_3 = 4 + 3 \quad = \quad 7H$

$3Cl = 18H$

$Cl = 6H$

Bicloruro di propilene $C_3 H_6 Cl_2$, fornì $N = 18,0$ corrispondente a 24H

$C_3 H_6 = 6 + 6 \quad = \quad 12H$

$2Cl = 12H$

$Cl = 6H$

Percloroetilene C_2Cl_4, fornì $N = 13,4$ corrispondente a 30H
$C_2 = 4 \quad = \quad 4H$
$4Cl = 26H$
$Cl = 6,5H$

Ossia in media per l'atomo di cloro in queste condizioni abbiamo l'equivalenza:

$$Cl = 6H.$$

Bisogna ch'io aggiunga che esiste ancora un'altra posizione speciale per il cloro che gli conferisce l'equivalente

$$Cl = 6H.$$

Questo si osserva quando questo elemento si trova in un gruppo laterale a uno principale, ossia in una catena laterale del nucleo benzinico.

Eccone gli esempî:

Cloruro di benzile $C_6H_5CH_2Cl$, fornì $N = 15,7$ corrispondente a 27H
$C_7H_7 = 14 + 7 \quad = \quad 21H$
$Cl = 6H$

mentre il clorotoluene $C_6H_4ClCH_3$ isomero al cloruro di benzile segue la regola generale $Cl = 7H$.

Cloruro di benzoile C_6H_5—$COCl$, fornì $N = 14,7$ corrispondente a . . . 28H
$C_7H_5O = 14 + 5 + 3 \quad = \quad 22H$
$Cl = 6H$

Cloruro di benzilidene $C_6H_5CHCl_2$, fornì $N = 12,8$ corrispondente a . . 31H
$C_7H_6 = 14 + 6 \quad = \quad 20H$
$2Cl = 11H$
$Cl = 5,5H$

Possiamo dunque concludere:

$Cl = 7H$ Regola generale

$Cl = 6H$ quando più atomi di cloro sono distribuiti su varî carboni, oppure quando il cloro si trova in un gruppo laterale della benzina.

Del bromo.

Bromuro etilico C_2H_5Br, fornì $N = 20,5$ corrispondente a 22H
$C_2H_5 = 4 + 5 \quad = \quad 9H$
$Br = 13H$

Bromuro propilico C_3H_7Br, fornì $N = 16,3$ corrispondente a 26H
$C_3H_7 = 6 + 7 \quad = \quad 13H$
$Br = 13H$

Bromuro isopropilico C_3H_7Br, fornì $N = 15,8$ corrispondente a 26H
$C_3H_7 = 6 + 7 \quad = \quad 13H$
$Br = 13H$

Bromuro allilico C_3H_5Br, fornì $N=18$ corrispondente a 24H
$C_3H_5=6+5$ = 11H
$Br=13H$

Bromuro isobutilico C_4H_9Br, fornì $N=13,1$ corrispondente a 30H
$C_4H_9=8+9$ = 17H
$Br=13H$

Bromuro isoamilico $C_5H_{11}Br$, fornì $N=11,0$ corrispondente a 34H
$C_5H_{11}=10+11$ = 21H
$Br=13H$

Bromobenzina C_6H_5Br, fornì $N=13,4$ corrispondente a 30H
$C_6H_5=12+5$ = 17H
$Br=13H$

Bromotoluene C_6H_7Br, fornì $N=11,0$ corrispondente a 34H
$C_7H_7=14+7$ = 21H
$Br=13H$

Dopo questo non si potrà dubitare dell'esattezza dell'equivalenza

$$Br=13H$$

per l'atomo di bromo nelle condizioni qui rappresentate, ma come per il cloro, così anche per il bromo l'equivalente capillare cambia e diminuisce quando vi siano più atomi distribuiti sopra carboni diversi legati tra loro e, cosa singolare, a questa specie deve annoverarsi anche il bromo libero.

Bromuro di propilene $C_3H_6Br_2$, fornì $N=10,7$ corrispondente a . . . 34H
$C_3H_6=6+6$ = 12H
$2Br=22H$
$Br=11H$

Bromuro di etilene $C_2H_4Br_2$, fornì $N=13,6$ corrispondente a 29H
$C_2H_4=4+4$ = 8H
$2Br=21H$
$Br=10,5H$

Bromo libero Br_2, fornì $N=22,3$ corrispondente a 21H
$Br=10,5H$

La diminuzione dell'equivalente capillare dell'atomo di bromo di questa specie, rispettivamente all'equivalente maggiore ($Br=13H$) e circa la stessa come l'analoga diminuzione dell'equivalente del cloro rispettivamente all'equivalente normale $=7H$.

Dell' Iodio.

Ioduro metilico CH_3I, fornì $N=18,5$ corrispondente a 24H
$CH_3=2+3$ = 5H
$I=19H$

Ioduro etilico C_2H_5I, fornì $N = 14,7$ corrispondente a 28H
$C_2H_5 = 4 + 5$ = 9H

$I = 19H$

Ioduro propilico C_3H_7I, fornì $N = 12,0$ corrispondente a 32H
$C_3H_7 = 6 + 7$ = 13H

$I = 19H$

Ioduro isopropilico C_3H_7I, fornì $N = 11,7$ corrispondente a 32H
$C_3H_7 = 6 + 7$ = 13H

$I = 19H$

Ioduro allilico C_3H_5I, fornì $N = 13,0$ corrispondente a 30H
$C_3H_5 = 6 + 5$ = 11H

$I = 19H$

Ioduro isobutilico C_4H_9I, fornì $N = 9,9$ corrispondente a 36H
$C_4H_9 = 8 + 9$ = 17H

$I = 19H$

Ioduro isoamilico $C_5H_{11}I$, fornì $N = 8,2$ corrispondente a 40H
$C_5H_{11} = 10 + 11$ = 21H

$I = 19H$

Iodobenzina C_6H_5I, fornì $N = 10,2$ corrispondente a 36H
$C_6H_5 = 12 + 5$ = 17H

$I = 19H$

Con questi risultati credo definitivamente stabilito l'equivalente capillare dell'iodio

$$I = 19H.$$

Dell'azoto.

Lo studio di questo elemento è assai meno semplice di quello dei tre antecedenti giacchè esso forma un considerevole numero di composti svariatissimi per tipo, per costituzione e per proprietà.

Divideremo questo paragrafo come segue:

1) Amine primarie secondarie e terziarie,
2) Nitrocomposti ed eteri nitrici,
3) Cianuri.

I solfociamuri e gli olii di senape o solfocarbimidi loro isomeri, contenendo l'azoto nella forma cianica come ciò risulta anche dall'uguaglianza dei loro volumi molecolari (Buff, Berichte di Berlino I, p. 205), mostrano anche lo stesso equivalente capillare per l'azoto come i cianuri semplici.

Queste due classi di composti solforati saranno studiate a proposito dello zolfo.

I. Ammoniache sostituite.

1) *Primarie.*

Propilamina $C_3 H_7 NH_2$, fornì $N = 33,4$ corrispondente a 15H
$C_3 H_9 = 6 + 9 =$ 15H
$N = 0H$

Isobutilamina $C_4 H_9 NH_2$, fornì $N = 24,6$ corrispondente a 19H
$C_4 H_{11} = 8 + 11 =$ 19H
$N = 0H$

Amilamina $C_5 H_{11} NH_2$, fornì $N = 19,4$ corrispondente a 23H
$C_5 H_3 = 10 + 13 =$ 23H
$N = 0H$

Allilamina $C_3 H_5 NH_2$, fornì $N = 37,7$ corrispondente a 13,5H
$C_3 H_7 = 6 + 7 =$ 13,0H
$N = 0,5H$

Anilina $C_6 H_5 NH_2$, fornì $N = 25,5$ corrispondente a 19H
$C_6 H_7 = 12 + 7 =$ 19H
$N = 0H$

Questi risultati non lasciano dubbio alcuno che nelle basi primarie l'azoto agisce coll'equivalenza capillare $N = \text{zero}\, H$.

Ossia, l'azoto in esse è senza alcuna influenza sulla costante capillare N al punto di ebollizione.

Se anche l'allilamina invece di fornire il valore zero, fornisce 0,5 H ciò non ci può sorprendere nè fare dubitare dell'esattezza della conclusione tirata, giacchè essa contiene una lacuna nel gruppo allilico e come abbiamo visto questa può produrre un lieve aumento nell'equivalente in H della molecola intera.

2) *Basi secondarie e terziarie.*

Qui potrebbe facilmente introdursi una incertezza nella discussione dei risultati sperimentali, incertezza derivante dal fatto che non si saprebbe dire se delle basi a nucleo chiuso, come la piridina, la chinolina ed altre siano da considerarsi come basi secondarie o come terziarie. Io credo piuttosto ch'esse non sono affatto confrontabili colle basi a catene aperte.

Per questa ragione non metto in discussione i risultati ottenuti dallo studio delle basi di questo tipo speciale.

Dietilamina $(C_2 H_5)_2 NH$, fornì $N = 22,9$ corrispondente a 20H
$C_4 H_{11} = 8 + 11 =$ 19H
$N = 1H$

Trietilamina $(C_2 H_5)_3 N$, fornì $N = 13,7$ corrispondente a 29H
$C_6 H_{15} = 12 + 15 =$ 27H
$N = 2H$

Vediamo dunque che per queste basi bene classificabili l'equivalente capillare dell'azoto sale col salire del numero di atomi di carbonio ai quali esso è direttamente legato.

Aggiungo ora le basi piridiche dalle quali però come dissi, non vorrei trarre conclusione alcuna.

Piridina C_5H_5N, fornì $N = 31,1$ corrispondente a 16H
$C_5H_5 = 10 + 5 = 15H$
$N = 1H$

Piperidina $C_5H_{11}N$, fornì $N = 24,4$ corrispondente a 19,5H
$C_5H_{11} = 10 + 11 = 21\ H$
$N = -1,5H$

Chinolina C_6H_7N, fornì $N = 17,2$ corrispondente a 25H
$C_9H_7 = 18 + 7 = 25H$
$N = 0H$

II. Nitrocomposti ed eteri nitrici.

Nitrometane CH_3NO_2, fornì $N = 42,4$ corrispondente a 12,5H
$CH_3O_2 = 2 + 3 + 6 = 11,0H$
$N = 1,5H$

Nitroetane $C_2H_5NO_2$, fornì $N = 28,5$ corrispondente a 17H
$C_2H_5O_2 = 4 + 5 + 6 = 15H$
$N = 2H$

Cloropicrina CCl_3NO_2, fornì $N = 12,7$ corrispondente a 31H
$CCl_3O_2 = 2 + 21 + 6 = 29H$
$N = 2H$

Nitrobenzina $C_6H_5NO_2$, fornì $N = 17,3$ corrispondente a 25H
$C_6H_5O_2 = 12 + 5 + 6 = 23H$
$N = 2H$

Nitrato etilico $C_2H_5NO_3$, fornì $N = 23,5$ corrispondente a 20H
$C_2H_5O_3 = 4 + 5 + 9 = 18H$
$N = 2H$

Nitrato isoamilico $C_5H_{11}NO_3$, fornì $N = 11,8$ corrispondente a 32H
$C_5H_{11}O_3 = 10 + 11 + 9 = 30H$
$N = 2H$

Dopo questi risultati non vi può essere dubbio sull'equivalente capillare dell'azoto quando questo è legato a ossigeno. Esso è

$$N = 2H.$$

III. Cianuri.

Acetonitrile $CH_3—CN$, fornì $N = 52,9$ corrispondente a 10H
$C_2H_3 = 4 + 3 = 7H$
$N = 3H$

Propionitrile C_2H_5CN, fornì $N = 34,8$ corrispondente a 14H
$C_3H_5 = 6 + 5$ = 11H
$N = 3H$

Isobutilnitrile C_4H_9CN, fornì $N = 20,4$ corrispondente a 22H
$C_5H_9 = 10 + 9$ = 19H
$N = 3H$

Capronitrile $C_5H_{11}CN$, fornì $N = 16,4$ corrispondente a 26H
$C_6H_{11} = 12 + 11$ = 23H
$N = 3H$

Benzonitrile C_6H_5CN, fornì $N = 20,6$ corrispondente a 22H
$C_7H_5 = 14 + 5$ = 19H
$N = 3H$

Questi risultati decidono nettamente l'equivalente capillare dell'azoto contenuto nel gruppo del cianogene; esso è:

$$N = 3H.$$

Riassumiamo i risultati forniti da questo elemento:

$N = 0H$ nelle amine primarie
$N = 1H$ » » secondarie
$N = 2H$ » » terziarie
$N = 2H$ nei nitrocomposti ed eteri nitrici
$N = 3H$ nei cianuri.

Dello zolfo.

Solfuro di carbonio CS_2, fornì $N = 38,3$ corrispondente a 13H
$C =$ 2H
$2S = 11H$
$S = 5,5H$

In quello che segue sarà utile di variare un poco il metodo di confronto. Trattandosi qui di una frazione che nei valori di H corrispondenti ai varî valori di N può essere poco avvertibile, specialmente nella parte superiore della curva dove questa diventa quasi parallela all'asse delle ordinate, sarà più conveniente di confrontare i valori della costante N.

Computeremo dunque l'equivalente in H delle diverse sostanze solforate ammettendo $S = 5,5H$ come ora si è trovato, e confronteremo se il valore di N corrispondente sulla curva al numero di H così trovato, coincide, entro i limiti d'errore, col N ottenuto sperimentalmente.

Solfuro etilico $C_4H_{10}S$ fornì . . . . $N = 19,0$
$C_4H_{10}S = 8 + 10 + 5,5 = 23,5H$ corrispondente a . . . . . $N = 18,8$
dunque $S = 5,5H$.

Solfocianato metilico CH_3SCN fornì . . . . $N = 32,5$
$CH_3SCN = 4 + 3 + 3 + 5,5 = 15,5H$ corrispondente a . . . . $N = 32,4$
dunque $S = 5,5H$.

Solfocianato etilico C_2H_5SCN fornì . . . . $N = 24,0$

$C_3H_5SN = 6 + 5 + 3 + 5,5 = 19,5H$ corrispondente a . . . $N = 24,3$

dunque $S = 5,5H$.

Allilsolfocarbimide C_3H_5NCS fornì . . . . $N = 21,1$

$C_4H_5NS = 8 + 5 + 3 + 5,5 = 21,5H$ corrispondente a . . . $N = 21,2$

dunque $S = 5,5H$.

Fenilsolfocarbimide C_6H_5NCS fornì . . . . $N = 15,1$

$C_7H_5NS = 14 + 5 + 3 + 5,5 = 27,5H$ corrispondente a . . . $N = 14,9$

Dunque definitivamente l' equivalente capillare dello zolfo è

$S = 5,5H$.

Del fosforo.

Per questo elemento difficile a studiarsi perchè non forma che pochi composti atti ai saggi sperimentali, i quali pochi per di più mostrano delle proprietà che rendono assai scabrosa la ricerca, non posso dare che quattro soli esempî. Credo però ch'essi basteranno per decidere del valore numerico dell'equivalente capillare.

Dico così perchè analogamente all'azoto anche il fosforo cambia di equivalente secondo il numero di valenze che dobbiamo ammettere impegnate nella molecola.

Nei cianuri vi è una lacuna (forse anche due) tra il carbonio e l'azoto ed il numero di valenze dell'azoto messevi in azione è minore che non nelle ammoniache sostituite. Nei cianuri $N = 3H$ mentre nelle ammoniache l'equivalente dell'azoto è minore. Similmente anche il fosforo trivalente ha un equivalente capillare maggiore di quello pentavalente.

1) *Fosforo trivalente* (Tricloruro fosforoso) PCl_3, fornì $N=16,1$ corrispondente a $26H$

$Cl_3 = 21H$

$P^{III} = 5H$

Ossietilclorurofosforoso $POC_2H_5Cl_2$, fornì $N=12,4$ corrispondente a . . . $31H$

$OC_2H_5Cl_2 = 3 + 4 + 5 + 14 = 26H$

$P^{III} = 5H$

2) *Fosforo pentavalente* (Ossicloruro di fosforo) $POCl_3$, fornì $N=14,5$ corrisp. a $28H$

$OCl_3 = 3 + 21 = 24H$

$P^{V} = 4H$

Solfocloruro di fosforo $PSCl_3$ fornì . . . . $N=12,7$

essendo $P=4$, $S=5,5$ $Cl=7$ si calcola:

$PSCl_3 = 4 + 5,5 + 21 = 30,5H$ corrispondente a . . . . . $N=12,7$

Dunque anche qui: $P^{V} = 4H$.

Riassumendo i risultati della presente ricerca possiamo considerare come assai probabili le seguenti equivalenze capillari:

$C = 2H$ (negli acidi liberi $= 3H$)

$O = 3H$ (negli ossidi di alchileni $=$ zero H)

$Cl = 7H$ (quando più atomi sono distribuiti su varî carboni legati tra loro, o nelle catene laterali della benzina $= 6H$)

Br = 13H	» = 2H nei nitrogruppi
I = 19H	» = 3H nei cianuri
N = zeroH nelle amine primarie	S = 5,5H
» = 1H » » secondarie	P = 5H quando trivalente
» = 2H » » terziarie	= 4H quando pentavalente.

Non credo improbabile che vi sia un qualche nesso tra queste cifre ed i pesi atomici degli elementi, almeno l'osservazione seguente sembra indicarlo.

Nel gruppo degli alogeni cloro, bromo, iodio il peso atomico del bromo è quasi esattamente uguale alla media aritmetica tra i pesi atomici del cloro e dell'iodio e negli equivalenti capillari possiamo riscontrare lo stesso rapporto:

$$Cl = 7H \qquad Br = 13H \qquad I = 19H.$$

Credo che tenendo conto dei risultati della presente ricerca e coll'aiuto della curva generale:

$$N = \frac{e^{6,48293-0,016763H}}{H}$$

si possa per quasi tutti i composti liquidi appartenenti alla cosidetta chimica organica, calcolare dalla semplice formola chimica, con sufficiente approssimazione, le diverse costanti capillari, e che, d'altra parte, lo studio delle proprietà capillari possa riuscire un ausiliare importante nella ricerca della costituzione chimica delle sostanze.

Valori rappresentati dalla curva

$$N = \frac{e^{6,48293-0,016763H}}{H}$$

H.	N.	H.	N.
9	62,4	26	16,2
10	55,3	27	15,4
11	49,4	28	14,6
12	44,5	29	13,8
13	40,4	30	13,1
14	36,3	31	12,5
15	33,9	32	11,9
16	31,2	33	11,2
17	28,9	34	10,8
18	26,9	35	10,3
19	25,0	36	9,9
20	23,4	37	9,5
21	21,9	38	9,0
22	20,5	39	8,7
23	19,3	40	8,3
24	18,2	41	7,8
25	17,2	42	7,7

Volumi molecolari qui determinati.

	Sostanze		Vol. molecol.	Risultati di altri
1	Terpene di limone	$C_{10}H_{16}$	186,3	
2	Acido formico	CH_2O_2	41,08	Kopp: 41,00
3	Etere metilamilico	$CH_3OC_5H_{11}$	148,13	
4	Etere acetacetico	$C_6H_{10}O_3$	153,34	
5	Anisol	$C_6H_5OCH_3$	125,21	Schiff (1882): 125,18
6	Paracresolato metilico	$C_6H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{CH_3}{OCH_3}$	147,79	
7	Dimetilresorcina	$C_6H_4(OCH_3)_2$	157,13	
8	Carvol	$C_{10}H_{14}O$	190,26	
9	Pinacolina	$CH_3{-}CO{-}C_4H_9$	138,25	
10	Cloruro isobutilico	C_4H_9Cl	114,26	
11	Cloruro isoamilico	$C_5H_{11}Cl$	134,40	
12	Cloruro di benzile	$C_6H_5CH_2Cl$	133,45	Schiff (1882): 133,46
13	Bicloruro di propilene	$C_3H_6Cl_2$	107,59	
14	Cloruro di benzilidene	$C_6H_5CHCl_2$	154,25	
15	Bromuro etilico	C_2H_5Br	77.07	
16	Bromuro isobutilico	C_4H_9Br	118,39	
17	Bromuro isoamilico	$C_5H_{11}Br$	138,63	
18	Bromobenzina	C_6H_5Br	119,88	Weger: 119,8
19	Bromotoluene	$C_6H_4BrCH_3$	141,95	
20	Bromuro di etilene	$C_2H_4Br_2$	97,65	Pierre: 97,70; Thorpe: 97,06
21	Ioduro etilico	C_2H_5I	86,12	
22	Ioduro isobutilico	C_4H_9I	128,28	
23	Ioduro isoamilico	$C_5H_{11}I$	151,05	
24	Iodobenzina	C_6H_5I	130,55	
25	Propilamina	$C_3H_7NH_2$	85,61	
26	Allilamina	$C_3H_5NH_2$	78,38	
27	Isobutilamina	$C_4H_9NH_2$	106,16	
28	Amilamina	$C_5H_{11}NH_2$	126,84	
29	Anilina	$C_6H_5NH_2$	106,08	Kopp: 106,00; Thorpe: 106,37
30	Dietilamina	$(C_2H_5)_2NH$	109.05	
31	Trietilamina	$(C_2H_5)_3N$	153,82	
32	Piridina	C_5H_5N	89,35	
33	Piperidina	$C_5H_{11}N$	108,76	
34	Chinolina	C_9H_7N	139,75	
35	Nitrometane	CH_3NO_2	59,50	
36	Nitroetane	$C_2H\ NO_2$	80,25	
37	Nitrato amilico	$C_5H_{11}ONO_2$	152,59	
38	Acetonitrile	CH_3CN	57,23	
39	Propionitrile	C_2H_5CN	78.28	Thorpe: 78,35
40	Isobutilnitrile	C_4H_9CN	119,70	
41	Capronitrile	$C_5H_{11}CN$	141.10	
42	Solfuro di carbonio	CS_2	62.06	Thorpe: 62,11
43	Allilsolfocarbimide	$C_3H_5{-}NCS$	113,13	Kopp: 113,15
44	Fenilsolfocarbimide	C_6H_5NCS	143,40	

Costanti capillari.

	Sostanze		a^2	$N = \frac{a^2}{2v}$
1	Terpene di limone	$C_{10}H_{16}$	3,772mm	10,1
2	Acido formico	HCOOH	5,284	64,3
3	» acetico	$C_2H_4O_2$	3,872	30,6
4	» propionico	$C_3H_6O_2$	3,725	21,7
5	» butirrico	$C_4H_8O_2$	3,545	16,4
6	» isobutirrico	$C_4H_8O_2$	3,428	15,8
7	» valerianico	$C_5H_{10}O_2$	3,283	12,6
8	Anidride acetica	$C_4H_6O_3$	4,181	19,1
9	Formiato metilico	$C_2H_4O_2$	4,944	39,6
10	Acetato allilico	$C_5H_8O_2$	4,106	16,9
11	Dimetilacetal	$C_4H_{10}O_2$	4,303	19,4
12	Etere metilamilico	$CH_3OC_5H_{11}$	4,085	13,8
13	Ossalato etilico	$C_6H_{10}O_4$	3,562	10,7
14	Benzoato metilico	$C_8H_8O_2$	3,982	13,1
15	» etilico	$C_9H_{10}O_2$	3,709	10,6
16	Etere acetacetico	$C_6H_{10}O_3$	3,940	12,8
17	Anisol	C_7H_8O	4,554	18,0
18	Fenetol	$C_8H_{10}O$	4,120	13,8
19	Cresolato metilico	$C_6H_4CH_3(OCH_3)$	4,278	14,5
20	Dimetilresorcina	$C_6H_4-(OCH_3)_2$	4,097	13,0
21	Furfurol	C_4H_3O-COH	5,200	27,2
22	Aldeide valerica	$C_5H_{10}O$	4,611	19,3
23	Cuminol	$C_{10}H_{12}O$	3,830	10,2
24	Carvol	$C_{10}H_{14}O$	4,029	10,6
25	Pinacolina	$C_6H_{12}O$	4,267	15,4
26	Cloruro isobutilico	C_4H_9Cl	4,127	18,1
27	» isoamilico	$C_5H_{11}Cl$	4,022	14,9
28	Clorobenzina	C_6H_5Cl	4,211	18,4
29	» toluene	$C_6H_4CH_3Cl$	3,992	14,8
30	Cloruro di benzile	$C_6H_5CH_2Cl$	4,200	15,7
31	Bicloruro di propilene	$C_3H_6Cl_2$	3,881	18,0
32	Percloroetilene	C_2Cl_4	2,855	13,4
33	Tricloroetane	$C_2H_3Cl_3$	3,459	16,8
34	Epicloridrina	C_3H_5OCl	4,652	26,7
35	Cloralio	CCl_3-COH	3,021	14,1
36	Etere monocloracetico	$CH_2Cl-COOCH_2H_5$	3,529	14,4
37	» dicloroacetico	$CHCl_2-COOCH_2H_5$	3,143	10,9
38	» tricloroacetico	$CCl_3-COOCH_2H_5$	2,749	8,4
39	Cloruro di benzoile	C_6H_5COCl	3,966	14,7
40	» di benzilidene	$C_6H_5CHCl_2$	3,950	12,8
41	Bromo	Br_2	2,393	22,3
42	Bromuro etilico	C_2H_5Br	3,148	20,5
43	» propilico	C_3H_7Br	3,170	16,3
44	» isopropilico	C_3H_7Br	3,125	15,8
45	» allilico	C_3H_5Br	3,251	18,0
46	» isobutilico	C_4H_9Br	3,103	13,1
47	» isoamilico	$C_5H_{11}Br$	3,060	11,0

	Sostanze		a^2	$N = \frac{a^2}{2v}$
48	Bromobenzina	C_6H_5Br	3,219mm	13,4
49	» toluene	$C_6H_4BrCH_3$	3,133	11,0
50	Bromuro di etilene	$C_2H_4Br_2$	2,654	13,6
51	» di propilene	$C_3H_6Br_2$	2,543	10,7
52	Ioduro metilico	CH_3I	2,532	18,5
53	» etilico	C_2H_5I	2,539	14,7
54	» propilico	C_3H_7I	2,574	12,0
55	» isopropilico	C_3H_7I	2,529	11,7
56	» allilico	C_3H_5I	2,625	13,0
57	» isobutilico	C_4H_9I	2,553	9,9
58	» isoamilico	$C_5H_{11}I$	2,472	8,2
59	Iodobenzina	C_6H_5I	2,674	10,2
60	Propilamina	$C_3H_7NH_2$	5,696	33,4
61	Allilamina	$C_3H_5NH_2$	5,907	37,8
62	Isobutilamina	$C_4H_9NH_2$	5,218	24,6
63	Amilamina	$C_5H_{11}NH_2$	4,936	19,4
64	Dietilamina	$(C_2H_5)_2NH$	4,986	22,9
65	Trietilamina	$(C_2H_5)_3N$	4,205	13,7
66	Anilina	$C_6H_5NH_2$	5,405	25,5
67	Piridina	C_5H_5N	5,549	31,1
68	Piperidina	$C_5H_{11}N$	5,303	24,4
69	Chinolina	C_9H_7N	4,833	17,2
70	Nitrometane	CH_3NO_2	5,087	42,4
71	» etane	$C_2H_5NO_2$	4,578	28,5
72	» benzina	$C_6H_5NO_2$	4,350	17,3
73	Cloropicrina	CCl_3NO_2	2,828	12,7
74	Nitrato etilico	$C_2H_5 - ONO_2$	4,330	23,5
75	» amilico	$C_5H_{11}ONO_2$	3,612	11,8
76	Acetonitrile	CH_3CN	6,047	52,8
77	Propionitrile	C_2H_5CN	5,453	34,8
78	Isobutilnitrile	C_4H_9CN	4,900	20,4
79	Capronitrile	$C_5H_{11}CN$	4,647	16,4
80	Benzonitrile	C_6H_5CN	5,000	20,6
81	Solfuro di carbonio	CS_2	4,747	38,3
82	Allilsolfocarbimide	C_3H_5NCS	4,793	21,1
83	Fenilsolfocarbimide	C_6H_5NCS	4,339	15,1
84	Solfocianato metilico	CH_3SCN	5,132	32,5
85	» etilico	C_2H_5SCN	4,792	24,0
86	Solfuro etilico	$(C_2H_5)_2S$	4,644	19,0
87	Tricloruro di fosforo	PCl_3	3,017	16,1
88	Ossicloruro di fosforo	$POCl_3$	2,951	14,5
89	Ossietilcloruro fosforoso	$P\genfrac{}{}{0pt}{}{OC_2H_5}{Cl_2}$	3,170	12,4
90	Solfocloruro di fosforo	$PSCl_3$	2,952	12,7

Sulle forme cristalline della Calcite di Andreasberg (Hartz)

Memoria del dott. FRANCESCO SANSONI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 15 giugno 1884.

(Con tre tavole)

INTRODUZIONE

Nessun' altra specie minerale offrì agli studiosi della mineralogia di ogni tempo, così vasto campo d' indagini, quanto la calcite. Senza parlare di altri, già Plinio ([1]) ed Agricola ([2]) ricordano nelle loro opere questa specie minerale, considerandone il primo, fra le altre cose la straordinaria abbondanza, soffermandosi il secondo sul carattere della sfaldatura. Nel 1670 Erasmo Bartolino avvertì nei cristalli romboedrici e trasparenti dello spato d' Islanda il fenomeno della doppia rifrazione ([3]): e più tardi Huyghens approfondite ed estese le indagini del Bartolino, oltre alle mirabili deduzioni, di cui non è qui il luogo di parlare, prende occasione di accennare ad un regolare assettamento delle piccole particelle costituenti il cristallo, allo scopo di spiegarsi la perfetta regolarità dei cristalli stessi ([4]).

Però fu sullo scorcio del secolo passato, che i caratteri geometrici della calcite, le sue forme cristalline così straordinariamente molteplici, attrassero l'attenzione degli studiosi. Linneo ([5]) dà particolareggiate descrizioni di non poche forme sì semplici che combinate rilevando le varie accidentalità delle facce, e descrivendo specialmente nelle forme combinate la figura offerta dalle diverse facce a seconda del loro vario sviluppo. Bergmann per altro quasi contemporaneamente, in molteplici scritti con maggiore rigore scientifico illustrò questa specie minerale ([6]). Egli oltre a varie esattissime descrizioni di cristalli, accenna decisamente alle particelle primitive, che dice riunite insieme secondo determinate leggi, talmentechè più tardi Romé de l'Isle ([7]) non dubitò di affermare aver potuto Hauy dietro il concetto di Bergmann più facilmente enunciare, che *« i cristalli di calcare avevano tutti un « noyau » affatto*

([1]) Plinius, *Hist. nat.* 36, 13.

([2]) *De natura Fossilium* 1546, pag. 701.

([3]) *Experimenta Crystalli Islandici disdiaclastici* (Hafniae, 1670).

([4]) *De lumine* Cap. V; *De miranda refractionae crystal. Island.* pag. 70. Amstelodamii, 1728.

([5]) *Sistem. natur.* 1768, pag. 48 e seg.

([6]) *De Formis crystallorum praesertim a spatho ortis* etc. (Memorie dell'Accademia delle scienze di Upsala, vol. I, 1773).

([7]) *Cristallographie ou description de form. prop. à tous les cor. du règn. min.* Vol. I, pag. 502. Paris, 1783.

simile ai cristalli dello spato d' Islanda ». Da Bergmann può dirsi che cominci adunque un operoso risveglio in tutto il campo della mineralogia ([1]).

Senonchè le prime e più attendibili notizie circa i caratteri geometrici della calcite si hanno da Romé de l'Isle (loc. cit. vol. I, pag. 490 e seg.). Esso ricorda come certamente provenienti dall'Hartz ed è a ritenersi che egli parli di Andreasberg, 9 varietà costituite da forme semplici e combinate. Le forme semplici sono le seguenti:

$$\infty R, \; 0R, \; -{}^1/_2 R, \; -2R, \; \infty P2$$ ([2])

Descrive assai minutamente le singole combinazioni, nonchè le figure diverse che acquistano le facce allorchè varie forme si associano fra di loro: dà inoltre i valori angolari di alcuni spigoli. Dopo di lui, Bournon ([3]) in tre estesi volumi, trattò diffusamente del calcare in generale, Di questa voluminosa monografia, racchiudente gran copia di osservazioni, la quale nonostante i tempi è condotta con poco rigore scientifico, fece severa critica il Wackernagel ([4]). Più tardi Zippe confermò tali critiche specialmente per ciò che si riferisce alle determinazioni cristallografiche. Senza entrare qui nel merito di tal lavoro, è a ritenersi, che varie forme trovate dal Bournon furono, o per scarsità di dati o per poca cura di osservazione, falsamente determinate;

([1]) Essendosi l'autore imposto il còmpito di trattare nella presente Memoria esclusivamente: *delle forme cristalline della calcite di Andreasberg* (Hartz), così nella breve rassegna bibliografica che segue, verrà citato quel tanto che si riferisce alla cristallografia della calcite di questa località. Giova altresì premettere, che alcuni autori specialmente non recenti sogliono citare più spesso semplicemente *Hartz* come luogo di provenienza di esemplari da essi descritti, invece di specificare *Andreasberg* celebre distretto metallifero nell'Hartz, fra gli altri più ferace in splendide cristallizzazioni del nostro minerale. L'autore poi giovandosi delle figure e descrizioni citate dagli autori, e più che di ogni altra cosa di opportuni confronti instituiti su di una grande quantità di esemplari, fu in grado bene spesso di determinare con sicurezza se un dato cristallo o gruppo, provenisse da Andreasberg, piuttosto che da altra località (Clausthal, Iberg ecc.) dell'Hartz stesso. Riguardo ai campioni dall'autore direttamente osservati, nei quali pure era indicata la provenienza generale Hartz, fecesi appello per la determinazione della località, non potendo giovarsi di altro, a quella abituale esperienza che ognuno facile acquista, allorchè si occupi per non poco tempo di una stessa specie minerale. Del resto i direttori e conservatori dei musei di mineralogia sanno benissimo, che i gruppi e le druse calcitiche di Andreasberg, tuttochè svariatissime rispetto alla forma cristallina, pure tenuto conto dei minerali concomitanti, della roccia su cui poggiano, nonchè della *facies* speciale della ganga, portano seco un'impronta particolare, una tale peculiarità di caratteri, da esser difficile confonderli con altri. Di quegli esemplari ove per mancanza di etichetta, poteva sorgere dubbio circa la provenienza, si preferì non tenerne alcun conto.

([2]) Devesi qui avvertire che l'autore ha preferito usare due modi di notazione cristallografica oggidì adoperati dalla maggior parte dei mineralogisti. La notazione di Naumann che sarà da qui innanzi adottata nel testo offre specialmente per il sistema romboedrico il vantaggio di far vedere subito il complesso della forma espressa, per la relazione esistente (quando trattasi di scalenoedri), fra questi ed il romboedro che possiede gli stessi spigoli laterali a zig-zag espresso dal coefficiente m; mentre il coefficiente n indica alla sua volta la distanza (a partire dall'origine degli assi) a cui l'asse principale viene incontrato dalle facce scalenoedriche. L'altra notazione Miller-Bravais riposa sul noto principio, per il quale una faccia è indicata dal simbolo generale $m\ n\ p$, esprimente i valori reciproci, dei numeri che contrassegnano le vere distanze parametrali. Quanto al numero e disposizione degli assi si veda l'avvertenza nella pagina interna della copertina di ogni fascicolo del Giornale: Zeitscrift für Krystal. von P. Groth.

([3]) *Traité de la chaux carbon.* Londra, 1808.

([4]) Archiv für di gesam. Naturl. von Karsten, Bd. IX, Heft 2.

quindi neppure può stabilirsi con certezza quante forme o meglio quante varietà egli indichi come provenienti da Andreasberg: per altro tenuto conto di quanto è detto nelle descrizioni, di quello che può rilevarsi dalle figure, si può arguire che delle 670 (circa) figure contenute nell'atlante, 54 almeno possono riferirsi ad esemplari provenienti da Andreasberg. E qui giova notare che più figure spesso sono impiegate a dinotare la combinazione delle stesse forme aventi facce in varia guisa sviluppate. Le forme cristalline semplici che egli aggiunse a queste prime conosciute sono:

$$13R, 4R, -{}^{3}/_{10}R, -{}^{4}/_{5}R, -{}^{3}/_{2}R, -{}^{13}/_{8}R, -{}^{11}/_{4}R, -5R, -14R, R^{5}/_{3}, R3, R9, \infty R9.$$

Come si vede prevalgono la forme romboedriche: la relativa scarsità degli scalenoedri, devesi attribuire al fatto, che essi sogliono presentare minore sviluppo rispetto alle forme prismatiche, e quindi dovevano riuscire in allora più difficilmente determinabili.

Ma ad Hauy [1] spetta il maggior merito, circa la determinazione cristallografica di ogni specie minerale. E per la calcite di Andreasberg egli dà 28 disegni di forme sì semplici che combinate. Le nuove forme semplici aggiunte da Hauy sono:

$$-R, {}^{2}/_{3}P2, {}^{1}/_{4}R3, {}^{2}/_{5}R2, {}^{4}/_{7}R^{3}/_{2}, R^{3}/_{2}, R5, R^{11}/_{3}, 4P2, 6P2, -2R2, \infty R2.$$

Mohs, a varie riprese ebbe occasione di menzionare il nostro giacimento, e così osserva giustamente [2] che fra le molte località da cui proviene questo minerale, nessuno per la varietà dei cristalli, e la relativa abbondanza nella ganga, può confrontarsi con Andreasberg. Si diffonde eziandio sui caratteri offerti dalle diverse facce. In seguito in altri suoi lavori [3] poco aggiunse per ciò che si riferisce alla cristallografia. Al quale effetto invece molto contribuì il Levy [4]. Egli descrisse ben 71 varietà di calcite proveniente dall'Hartz: alcune di esse sono tolte dalle opere di Bournon ed Hauy. Alle forme semplici già citate, Levy aggiunse le seguenti:

$${}^{5}/_{2}R, -{}^{1}/_{5}R, -{}^{7}/_{5}R, -{}^{7}/_{2}R, -8R;$$

$$R^{7}/_{5}, R11, {}^{16}/_{7}R2, {}^{4}/_{3}P2, -{}^{8}/_{7}R2, -{}^{4}/_{5}R3, -{}^{4}/_{3}R^{5}/_{2}.$$

Delle lievi mende, del resto inevitabili in un' opera di tale mole, per ciò che concerne il nostro minerale, scrissero principalmente Weiss [5], Zippe [6], Irby [7].

Hausmann nel suo trattato [8] considera con riguardo speciale la calcite dell'Hartz descrivendo i modi i più comuni di presentarsi delle facce nelle diverse forme, distinguendo i più costanti aggruppamenti: enumera benanco molte combinazioni, e nota come sicure 3 leggi diverse di geminazioni. Ricorda le seguenti forme semplici:

$$-{}^{1}/_{4}R, -{}^{1}/_{3}R; {}^{1}/_{10}R7, {}^{5}/_{8}R^{7}/_{5}, R4, R12, -{}^{1}/_{5}R7, -{}^{1}/_{2}R3, -2R3.$$

Non si può pertanto asserire che queste forme siano state osservate e direttamente determinate dall' autore succitato, mancando nell'opera di lui la constatazione

[1] *Traité de minéralogie*, 2ª edit. Paris, 1822.

[2] *Des Herrn Fried. von der Null Miner. Kabinet*-Wien, 1804, pag. 31-96.

[3] *Grundriss der Mineralogie*, pag. 99. Wien, 1824, ed. *Leichtfs. Anfangsgr. der Natur. der Min.* Wien, 1835.

[4] *Description d'une collect. de min. formée par H. Heuland.* London, 1837.

[5] Abhandl. der Berl. Akad. 1840, pag. 137.

[6] *Uebersicht der Krystall. Gestalt. des rhomb. Kalkhal.* Denkschrif. der Wien. Akad. 1851.

[7] *On the crystallograph. of Calcit.* Bonn, 1878.

[8] *Handbuch der Mineral.* Zweit. Theil. 2° Bd. Göttingen, 1847.

del fatto; come pure non è indicato assolutamente Andreasberg, come indubitata ed esclusiva provenienza.

La prima più estesa, ed importante monografia, fu data da Zippe nel 1851 (v. loc. cit.) Questo valente cristallografo, fondandosi sulla dottrina del Mohs circa alla derivazione delle serie dei romboedri, secondo la quale per ogni romboedro esistente, se ne rende possibile un secondo che tronca gli spigoli del primo, stabilì diverse serie, fra cui una principale, e varie accessorie. I romboedri appartenenti alla serie principale, hanno per coefficiente nel simbolo di Naumann, i numeri semplici interi, 1, 2, 4, 8, 16 ecc.: alle altre serie appartengono romboedri con coefficienti espressi da numeri frazionarî.

E così riguardo agli scalenoedri derivò da ognuno di essi 3 diversi romboedri, di cui uno possiede gli stessi spigoli laterali, e gli altri due troncano gli spigoli culminanti: stabiliti questi rapporti di derivazione, ammise tutte le forme, da lui e da altri trovate, che vi si coordinavano: sebbene non sempre le misure angolari concordassero strettamente coi valori forniti dal calcolo. L'opera del Zippe per altro non contiene molte speciali determinazioni cristallografiche, potendosi piuttosto considerare come un pregevole riassunto dei lavori per lo avanti conosciuti in proposito. Delle 93 figure disegnate alla fine della precitata Memoria, 19 si riferiscono indubbiamente alla nostra località. La maggior parte di queste poi, come pure molte delle combinazioni distribuite nei gruppi, sono tolte dall' opera del Levy, di Hausmann, e da appunti inediti di Haidinger. Alle forme già cognite si aggiunsero:

$$-{}^{8}/_{7}R,\ -{}^{5}/_{2}R,\ {}^{1}/_{2}R^{5}/_{3},\ {}^{7}/_{10}R^{9}/_{7},\ -2R^{5}/_{3},\ -{}^{1}/_{2}\,R5$$

e queste due ultime, tolte da appunti di Haidinger.

Hochstetter in una sua Memoria [1] sul sistema cristallino della calcite, si diffuse precipuamente in considerazioni di relazione fra il sistema monometrico, e il sistema romboedrico: onde è che tale lavoro d'indole strettamente cristallografica potrebbe sotto un certo aspetto considerarsi come un adeguato complemento alla Memoria del Zippe. Non si trova quivi fatta menzione alcuna del nostro giacimento.

In opere di minor mole, ma di non poco interesse, trovansi descritte varie determinazioni di altre forme semplici: così Monteiro fece [2] conoscere per il primo lo scalenoedro R 7. Naumann determinò le tre forme semplici $-{}^{6}/_{5}\,R$, $-{}^{2}/_{3}\,R\,{}^{7}/_{3}$, $-R\,{}^{7}/_{3}$. Wimmer descrisse [3] una interessante combinazione, molto probabilmente proveniente dalla miniera Sanson, determinando due forme semplici nuove per la località: cioè $-{}^{5}/_{4}\,R$, $-{}^{8}/_{7}\,R\,{}^{3}/_{2}$.

Sella ebbe occasione [4] di studiare cristalli semplici e geminati del nostro giacimento, determinandovi il nuovo scalenaedro ${}^{1}/_{3}\,R\,{}^{6}/_{3}$. Sarebbe stato desiderabile

(1) *Das Krystal. system des rhomb. Kalkhal.* Wien, Akad. der Wissenschaf. 1852.

(2) Annales des Min. 1820. Tom. V. *Mémoire sur un nou. problèm. cristallogr.*

(3) Zeitschrift für die gesamt. Naturwiss. III, 334 ed. Bericht ueber die dritte gener. Versamml. d. Clausth. naturwiss. Vereins. Maía, 1854.

(4) *Quadro delle form. cristall. dell'arg. ros. quarzo e calcare.* Torino, 1856 e « *Studi sulla Mineralogia Sarda* ». Memorie della r. Accad. delle scienze di Torino, parte II, tom. XVII, pag. 316, fig. 41.

che l'egregio cristallografo avesse accompagnato alcuna di queste sue determinazioni con qualche dettaglio, sia relativo all'estensione ed apparenza delle facce, sia riguardo agli spigoli misurati. Peters, ricorda ([1]) prismi splendidissimi di calcite, associati ad altre forme semplici assai rare, delle quali minutamente descrisse l'apparenza.

Le combinazioni le più complicate e difficili a decifrarsi, furono bene descritte e sviluppate da Hessenberg ([2]) e vom Rath ([3]) i quali del resto grazie all'esattezza delle determinazioni da essi eseguite, congiunta ad una straordinaria attività scientifica, fecero conoscere grandissima parte delle forme cristalline di molti minerali.

Hessenberg accuratamente descrisse varie combinazioni, rilevando i caratteri delle varie facce, ed aggiunse le forme seguenti:

$$-\,{}^{11}/_{7}R,\ -\,25R;\ {}^{1}/_{5}R^{11}/_{3},\ {}^{2}/_{3}R^{4}/_{3},\ R^{4}/_{3},\ R^{9}/_{5},\ R^{16}/_{3},\ -\,{}^{5}/_{4}R^{17}/_{11},\ -\,8R5,\ -\,{}^{1}/_{3}R15.$$

G. vom Rath annovera le seguenti nuove forme:

$$5R,\ -\,{}^{9}/_{2}R,\ R^{19}/_{3},\ {}^{16}/_{3}P2,\ -\,{}^{36}/_{35}R2$$

Recentemente Irby (loc. cit.) passò in rassegna tutte le forme fin allora conosciute, sottoponendo a nuove misure alcuni cristalli già studiati da Hessenberg, ed eliminando tutte quelle forme le quali non gli sembravano determinate con sufficiente esattezza. Per ciò che si riferisce all'apparenza fisica delle facce, al modo di comportarsi di esse, e al predominio di certe zone, oltre ai lavori già citati di Mohs e Hausmann, scrisse diffusamente Scharff ([4]). Se poco attendibili per altro sono le determinazioni cristallografiche effettuate da questo autore non corredate di alcun dettaglio, sorprende invece la fedele accuratezza e precisione, con cui sono disegnati e descritti molti esemplari di calcite, sì del nostro che di altri giacimenti, riguardo in special modo allo sviluppo ed all'accrescimento dei cristalli. Notizie riguardanti il nostro minerale trovansi sparse in ogni manuale, oltre che nelle opere citate: e queste verranno man mano segnalate nel corso della Memoria quando se ne presenti l'occasione.

CAPO I.

Cenni sul giacimento geologico, e sul materiale studiato.

È indubitato che la natura geologica e litologica di un terreno ha non poca influenza sulla natura, forma e portamento dei minerali cristallizzati ivi contenuti; tanto più poi se questo terreno resulti litologicamente svariato, per condizioni originarie di deposito. Se poi si aggiungano degli spostamenti, delle intrusioni di nuovi materiali, intervenute a diversi periodi con minor o maggior intensità, si avrà sotto un certo riguardo la ragione della svariata moltiplicità delle ganghe del distretto

([1]) *Ueber Kalzit u. die rhomböedrischen Karbon spathe* in Allg. N. Jahrbuch f. Mineralogie 1861.

([2]) *Mineralogische Notizen.* Abhandl. der Senckenberg. naturfors. Gesellschaft. Frankf. a/M, II Hef. pag. 10, fig. 4. — Neue Folge, IX Heft, pag. 13, fig. 4, 5. — Id. id. pag. 17, fig. 8, 9. n. 3. Zweite Fortsetzung, pag. 12, fig. 21. — Neue Folge, IX Heft, pag. 20, fig. 11, 12,

([3]) Poggend. Ann. vol. 132, pag. 520 e seg.

([4]) Scharff F. N. Jahrbuch. für Mineral. 1860-1862. *Ueber den inneren Zusammenhang der Krystallsyst. des Kalkspaths.* Frankfurt a/M, 1876.

metallifero di Andreasberg. Ciò posto, non è forse inopportuno riassumere brevemente alcunchè risguardante la geologia del nostro giacimento. Non pochi lavori geologici e geognostici si hanno su questa interessante località: e l'indole di questa memoria non permette di farne uno estratto adeguato; onde converrà limitarsi a riassumere brevemente quanto di più recente è stato pubblicato in proposito. Un esteso ed accurato lavoro fu publicato dal Credner (¹) il quale oltre alla originalità di osservazioni nuove, dà altresì un riepilogo di quanto sin allora era noto sull'argomento.

Secondo Credner dunque la massa principale e più superficiale contenente le ganghe del nostro giacimento, consta di schisto argilloso sovrastante a roccie diabasiche: nelle regioni più profonde stanno schisti siliciferi che si credono originati da antiche sorgenti silicifere, e inoltre quarziti di color grigio-chiaro finamente granulari. Non è raro riscontrare qua e là un graduato passaggio fra questi tipi di rocce. Esse sono attraversate dai filoni metalliferi, che si distendono poco orizzontalmente, inoltrandosi in cambio assai in profondità. La ganga predominante in ciascun filone è indubbiamente calcitica; in piccola quantità associasi il quarzo per lo più in piccolissimi individui. Le druse più rimarchevoli per nitidezza e splendore trovansi raramente a grande profondità: limitansi alla parte superiore, e mediana. Molte sono le miniere del distretto metallifero di Andreasberg: certo è, che quella che offre il tipo del giacimento, e che direi quasi in sè le altre tutte riassume si è la miniera di Sanson, da cui provenne la maggior parte delle splendide cristallizzazioni che adornano anche i più modesti musei. I minerali ivi e nelle altre miniere, più comuni a riscontrarsi sono i seguenti: argento, rame, antimonio, arsenico, antimonite, galena, blenda, discrasite, argentite, bournonite, stefanite, polibasite, tetraedrite, smaltite, cobaltite, calcopirite, miargirite, pirargirite, realgar, orpimento, pirite, pirrotite ecc. e quindi quarzo, barite, fluorite, witherite, stilbite, desmina, armotomo, cabasite, natrolite, analcime, granato, talco, axinite e qualche altro meno comune a rinvenirsi.

Elemento essenziale alla ganga di molte delle miniere di Andreasberg, si è un impasto di materiali detritici resultanti da frantumi di quarzo, calcite, e gli altri minerali proprî al giacimento tenuti insieme e quasi cementati da calcite. Come suole accadere nella maggior parte dei filoni metalliferi, varia anche qui la quantità relativa dei minerali, come pure varia l'aspetto dell' intera ganga secondo la profondità più specialmente. Credner appoggiandosi alla natura mineralogica dei filoni stessi, nonchè al loro andamento, e alla loro reciproca influenza concluse non esservi in tutti contemporaneità di formazione.

Breithaupt (²) distingue poi nelle ganghe di Andreasberg una qualità di calcite di più antica e una di più recente formazione; ambedue con caratteri differenti: la prima bianco lattea o grigio-chiara, e più spesso di un giallo miele che offre le forme R 3, R, ∞ R, O R in grossi cristalli con poche forme di difficile determinazione, attesa la imperfezione dei cristalli. Le facce generalmente opache, sono ricoperte da sostanze estranee e tengono sopra addossati strati di calcite più giovane che si distingue

(¹) *Geognostische Beschreib. der Bergwer. von S. Andreasberg.* Zeitschrift der deuts. Geolog. Gesellsch. Bd. XVII, pag. 163, 1865.

(²) *Paragenesis der Mineralien*-Frieberg. 1849.

dalla prima per la diversa colorazione e trasparenza. Questa calcite più recente poi, è chiara limpida, presenta il maggior numero di faccette, occupa per lo più le regioni superficiali superiori, ed a differenza dell'antica, i cristalli di rado si elevano dal calcare compatto; sono cristalli isolati che rivestono l'interno delle druse, riposando bene spesso sull'impasto detritico summentovato. È accompagnata sovente dalle zeoliti surriferite con le quali s'intreccia in varia guisa. Anche per il quarzo si riconoscono due diversi periodi di formazione corrispondenti a quelli della calcite. Questa distinzione di due periodi di formazione constatata nel nostro minerale, è così importante che fu applicata alla distinzione dei modi di origine, e di riempimento dei varî filoni. Tale differenza nelle due qualità, resta, nonostante la concomitanza, che talora si osserva specialmente nelle regioni più profonde. Quanto all'oriigine delle due differenti formazioni Credner ammette l'ipotesi che sorgenti minerali provenienti dall'interno all'esterno, seco traendo in soluzione i solfuri dei diversi metalli, abbiano dato luogo ad un primo deposito, di cui è carattere costante la calcite di prima formazione superiormente descritta. Alla seconda formazione di calcite che sarebbe stata accompagnata dalle zeoliti, avrebbero contribuito sorgenti che sgorgarono negl'interstizî non ancora ripieni sciogliendo in parte la calcite preesistente, ripristinandola stante la natura della nuova soluzione, in cristalli limpidi trasparenti così ricchi di facce. Per l'abbondanza e varietà dei solfuri metallici, e la presenza degli altri molteplici minerali, e il conseguente loro diverso comportamento, in presenza di una soluzione dotata di energica attività chimica, che giunse secondo Credner a corrodere il quarzo, si comprenderebbe fino ad un certo punto, quale diversità di condizioni specialmente parageneticlie debba aver presieduto a questa seconda formazione, avvenuta però lentamente, del nostro minerale. E sotto questo punto di vista ci si renderebbe ragione della mancanza di uniformità di tipo, che è l'impronta caratteristica dei cristalli nel nostro giacimento. E tale tendenza alla variabilità va tanto oltre che esemplari provenienti dalla stessa miniera scavati ad uguali profondità mostrano diverse cristallizzazioni, e talora, però più raramente si ha diversità di abito in cristalli appartenenti alla stessa drusa, nel qual caso suole andare di pari passo una diversità di dimensioni, e di qualche altro carattere inerente alla superficie delle facce. Di qui derivò la necessità d'instituire le osservazioni su molto materiale. E a questo effetto l'A. studiò a lungo il copioso materiale nella collezione universitaria di Strasburgo (Alsazia) giovandosi al tempo stesso dei validi e autorevoli consigli del venerato maestro prof. P. Groth, al quale l'A. è lieto oggi di rendere pubblicamente le più sentite testimonianze di gratitudine. Si ebbe poi l'opportunità di visitare varie altre collezioni sì private che pubbliche ([1]), ottenendo bene spesso in prestito a scopo di studio degli scelti esemplari. I campioni esaminati, e accertati provenienti da

([1]) È mio dovere rendere qui pubblicamente omaggio di gratitudine ai sig. direttori e conservatori dei Musei mineralogici per la squisita lîberalità con la quale misero a mia disposizione il materiale necessario al mio studio. Mi compiaccio in ordine a ciò di ricordare i nomi de sig. Websky, Weiss, Arzruni in Berlino, Klein in Gottinga, Ulrich in Hannover, Fritsch in Halle, Dunker in Marburgo, Streng in Giessen, Knop in Carlsruhe, Fischer in Friburgo i/B, Geinitz in Dresda, Groddeck in Clausthal, Weissbach in Freiberg, Laspeyres in Aquisgrana. G. V. Rath, Lasaulx, Hintze, in Bonn, Descloiseaux, Mallard, Friedel, Bertrand in Parigi. Fletcher del Museo di Kensington a Londra, A. Renard a Bruxelles.

Andreasberg ascendono al n. di 2500 circa, e i cristalli misurati al n. 722. E quanto a questi ultimi, deve premettersi come nella determinazione delle nuove forme si procedè colla massima circospezione. Prima di stabilire una nuova faccia si procurò di constatarne, ove fu possibile l'esistenza su varî cristalli, misurando nello stesso cristallo lo stesso angolo preso su spigoli omologhi, non reputando sufficiente, come vogliono alcuni, alla determinazione di una nuova faccia, l'essere essa simmetricamente disposta rispetto alle faccette contigue, che nell'insieme occupano con la prima, una porzione del cristallo intero, mentre la nuova faccia manca altrove. Per certe forme e sono frequenti più che non si creda nella calcite del nostro giacimento, in cui i valori angolari offrivano limiti oscillanti fra più di due gradi non fu tenuto alcun conto. E siccome ciò avveniva in causa della curvatura e striatura delle facce per la massima parte, così non deve intendersi che siano rimaste escluse dal nostro studio quelle facce che presentavano tali accidentalità; poichè se così fosse avvenuto ben poche forme cristalline sarebbero a registrarsi per il nostro giacimento, essendo le accidentalità delle facce, fra cui in primo luogo la curvatura un fenomene comune a presentarsl. È noto pertanto come avvenga per le facce curve, quasi sempre, ciò che si verifica per le facce striate, cioè che anche la curvatura va parallelamente all'asse di una data zona, e come conseguentemente vi siano direzioni in cui anche le facce curve offrono immagini riflesse meno slargate, in cui è più facile determinarne la posizione dell' immagine rispetto al reticolo del cannocchiale di osservazione. Del resto laddove per qualcuna delle suindicate accidentalità si ebbero 2 o più immagini riflesse per una stessa faccia, più che all'intensità di splendore di esse immagini, si badò alla costanza di posizione, avuto riguardo precipuamente al collegamento delle zone. Procedendo in tal guisa, si offerse più di una volta il caso, in cui una data forma cristallina, influenzata sempre più sulla sua superficie da curvature o altro, non adempisse alle leggi fondamentali cristallografiche e della razionalità degl' indici, nè del collegamento delle zone, per quanto si tenesse conto con opportuni raffronti delle diverse immagini dalle facce stesse riflesse. Tali forme aventi un simbolo relativamente complicato furono solo ammesse dubitativamente, augurando che altri con migliore materiale possa definitivamente pronunziarsi in proposito. Ma giammai tal caso intervenne, allorchè si trattò di facce piane riflettenti immagini semplici ben distinte; che in tali circostanze i risultati confermarono sempre più la costanza e verità delle leggi surriferite.

Rari dunque sono i cristalli del nostro giacimento che mostrano le loro faccette piane, uniformi di superficie, che anzi esse presentano ogni sorta di accidentalità: sia per essere più o meno regolarmente rigate, e striate, sia perchè offrono i più svariati disegni; e tutto ciò, senza che vi si possa sempre riconoscere, come nota giustamente Scharff, una regolare dipendenza di orientazione e cogli elementi cristallografici.

Si può quindi asserire che alla già menzionata variabilità di tipo va unita la massima discordanza nell'apparenza della superficie delle faccette: in ciò differendo il nostro da altri giacimenti consimili: cosicchè per es. le cristallizzazioni di calcite provenienti dal Derbyshire, Alston Moor, Devonshire mostrano uniformità di abito (tipo scalenoedrico (R3 predominante) accoppiata a nitore, ed uniformità di superficie delle singole faccette.

CAPO II.

Divisione dei cristalli in 8 tipi principali, e descrizione delle nuove e più notevoli combinazioni in essi comprese.

Non vi ha bisogno di un accurato esame nè di lunga pratica, per riconoscere a tutta prima che svariato oltremodo è l'abito e il tipo dei nostri cristalli più particolarmente, anzi esclusivamente in quelli riferibili alla seconda formazione. Zippe (loc. cit. 18) confermò il fatto già notato da Hausmann che, cioè il nostro giacimento tiene il primo posto sia per la moltiplicità delle forme semplici sia per il loro vario sviluppo ciò che contribuisce ad una variabilità di aspetto nei cristalli stessi; mentre sebbene varii l'aspetto delle druse e dei gruppi resta uniforme l'abito nei cristalli di Derbyshire, Pzibram, Freiberg, Schemnitz ecc.

In ordine a ciò, Breithaupt nella sua opera sulla paragenesi dei minerali, ritiene che meglio delle forme cristalline considerate geometricamente, l'abito e il tipo dei cristalli delle ganghe contrassegni la natura geologica e litologica di un giacimento; e che sia questo tipo, il miglior ausiliario per lo studio della paragenesi. E date le peculiari condizioni geognostiche del nostro giacimento, era naturale che non poca importanza si attribuisse all'abito dei cristalli, ed anzi si fondò essenzialmente su questo carattere ogni distinzione. E ciò parve tanto più conveniente, inquantochè l'osservazione ha mostrato com'era da attendersi, che ad un tipo determinato di cristalli vanno collegate:

1° la presenza o meno di certi minerali particolari al giacimento; nonchè la natura litologica della roccia su cui stanno gli stessi cristalli e ciò in rapporto alle condizioni paragenetiche;

2° che talune specie di facce preferiscono presentarsi in un tipo piuttosto che in un altro.

3° che le stesse facce presenti in diversi tipi mostrano caratteri diversi di sviluppo, di portamento e di superficie secondo che presentansi in un tipo piuttosto che in un altro.

Il Beudant [1] senza fare per altro allusioni al nostro giacimento, accenna ad una distinzione da farsi tenendo conto della forma predominante: e rispetto poi al nostro giacimento Scharff [2] stabilisce effettivamente due tipi principali: l'uno tabulare dato da ∞R, OR, l'altro da scalenoedri ottusi, aggiungendo che l'un tipo passa gradatamente all'altro.

Ritenendo in massima il concetto del Beudant, che debba cioè il tipo di un cristallo essere caratterizzato dalla forma sì semplice che combinata che in esso prevale, si giunse a stabilire 8 tipi, a cui sono base il predominio di 4 qualità o specie di facce solite a mostrarsi nel sistema romboedrico, e queste sono la base OR, i prismi ∞R, ∞P_2, i romboedri mR e gli scalenoedri mRn. Si tralasciò di considerare le piramidi di 2° ordine, perchè non di frequente si presentano nella nostra

[1] *Traité de Minéralogie.* Paris, 1832, t. II, p. 307.

[2] *Neues Jarhbuch für Min. Geo. Pal.* 1862.

specie, raramente poi trovansi isolate o predominanti in combinazioni; e perchè facilmente si coordinano ai tipi determinati dagli scalenoedri. I due primi tipi vengono determinati dallo sviluppo maggiore e predominante, in un caso della forma basale, nell'altro delle forme prismatiche. Nei romboedri e scalenoedri poi a seconda della loro acutezza, ossia del valore numerico del coefficiente m si fecero le tre distinzioni; di romboedri e scalenoedri ottusi, medî, acuti; non parve necessario tener conto della divisione nei romboedri e scalenoedri, di positivi e negativi (diretti e inversi). Potrebbe a taluno sembrare che queste classazioni, fossero affatto arbitrarie e troppo convenzionali, tenendo conto del solo sviluppo; potendo pensare che si avveri il caso di forme tali che stiano comodamente nell'uno e nell'altro tipo. Non può negarsi intanto come dei graduati passaggi esistano in realtà: ma essi sono più che altro, casi isolati. Intanto sta il fatto largamente comprovato dall'osservazione, come per qualsiasi specie minerale sempre più frequenti si presentano quelle forme il cui simbolo è assai semplice, e come un piccolo numero di esse sia solito a predominare nelle combinazioni. Ciò posto, alla determinazione dei limiti fra un tipo ed un altro, serve un piccol numero di forme semplici, la qual cosa apparirà più manifesta in appresso.

I tipi stabiliti secondo i suesposti principî sono i seguenti:

I. *Tipo tabulare* — Vi appartengono tutti quei cristalli in cui predomina la base $0R$.

II. *Tipo prismatico* — Comprende tutti i cristalli in cui un prisma qualunque esso sia, prevale sulle altre facce.

III. *Tipo romboedrico ottuso* — Dato dalla prevalenza di un romboedro ottuso positivo o negativo in cui il rapporto fra $a:c$ sia 1: 0.5; che è quanto dire il valore numerico del coefficiente m nel simbolo di Naumann non sia maggiore di $^1/_2$ od 0,5.

IV. *Tipo romboedrico medio* — Comprende tutti i romboedri positivi e negativi in cui il suddetto valore numerico di m sia compreso fra $^1/_2$ e 4.

V. *Tipo romboedrico acuto* — Offerto da quei cristalli in cui il valore di m è compreso fra 4 ed ∞: alle forme di questo tipo è dunque limite ∞R.

VI. *Tipo di scalenoedro ottuso* — Comprende gli scalenoedri positivi e negativi, il limite superiore dei quali rispetto all'acutezza è determinato dalla nota forma $R\,^5/_3$ e tutte le piramidi di 2° ordine in cui il limite superiore è dato da $^4/_3\,P\,2$.

VII. *Tipo di scalenoedro medio* — Vi si coordinano tutte le forme scalenoedriche di qualsiasi segno, comprese fra il limite superiore del tipo precedente, e il notissimo scalenoedro $R\,5$; e tutte le piramidi di 2° ordine comprese fra il limite suaccennato $^4/_3 P\,2$, e la forma $4\,P\,2$.

VIII. *Tipo di scalenoedro acuto* — Dato dalle forme scalenoedriche, positive o negative, e dalle piramidi di 2° ordine, comprese fra i limiti superiori indicati nel tipo precedente e la faccia $\infty P\,2$.

Ora quando si voglia in qualche modo stabilire quali tipi, e in qual guisa mostransi più facilmente disposti al passaggio dall'uno all'altro, si avverte subito che tal cosa non avviene nell'ordine secondo cui sono descritti.

Ma per la ragione altrove espressa, che cioè, a una data specie di facce più comuni a presentarsi e determinante il tipo, vanno di preferenza associate alcune

forme non solite a presentarsi in altri tipi. Si avvera il fatto che preferibilmente le variazioni di tipo, o i passaggi graduati dall'uno all'altro, avvengono in direzioni, in sensi determinati.

Tipo I.

È costituito dallo sviluppo predominante della faccia OR sulle altre. Frequentissima fra tutte la combinazione OR ∞R. Intorno ai cristalli in cui si osserva, giova fare una distinzione, a seconda che si tratta della antica, o della più recente formazione: poichè i cristalli spettanti alla prima, sogliono essere giallastri, subtrasparenti, dotati di lucentezza grassa nella maggior parte dei casi: assai grossi di dimensioni, con faccette aventi poca uniformità e nettezza nella loro superficie: non mostrano alcun reciproco allineamento secondo una direzione corrispondente a un elemento cristallografico qualunque, raramente accompagnati da solfuri metallici, giammai da zeoliti: riposano in varia guisa più o meno profondamente impiantati su calcare compatto o direttamente sovra lo schisto argilloso: non vi si associano faccette di altra natura, e tutto al più se mostrano qualche smussatura e troncamento di spigoli, è tale l'imperfezione delle nuove facciuzze da rendere impossibile ogni determinazione.

Sono invece trasparentissimi, talora leggermente opalini ed azzurrognoli i cristalli ugualmente conformati della seconda e più recente formazione; dotati di lucentezza vitrea, variabile di grado a seconda della qualità delle faccette: associate largamente a solfuri e alle zeoliti, ed offrono numerose combinazioni. Non è difficile riconoscere un prevalente allineamento, parallelo all'asse principale, in special modo nei cristalli azzurrognoli di piccole dimensioni e che riposano su calcare spatico; però sorgono per lo più sopra l'impasto detritico quarzoso caratteristico, più di rado direttamente sulla roccia verde. Frequente è poi per essi l'aggruppamento a pila, di cui è già notizia nel Forster ([1]). Per la unione frequente della forma ∞R alla predominante OR avviene che aumentando lo sviluppo della prima, si passa gradatamente al tipo prismatico. È poichè le altre forme romboedriche e scalenoedriche che vi si asssociano, di rado raggiungono una considerevole estensione, così, è raro e quasi eccezionale il passaggio di questo ad altri tipi.

Per le varie combinazioni illustrate dai diversi autori v. Quadro I pag. 513 e seg. Fra queste si ammise anche la combinazione descritta da Monteiro ([2]) quantunque ivi non sia espressamente dichiarata come certa la provenienza di Andreasberg; ma avendone ritrovati alcuni esemplari identicamente conformati e con lo stesso numero di facce, e provenienti con certezza da Andreasberg, non si dubitò di ammettere definitivamente tale combinazione.

I cristalli tabulari furono dai varî autori rimarcati come caratteristici per il nostro giacimento; a questi non suole andare unita una grande svarietà di combinazioni, poichè poche forme vi si associano. All'accennata frequentissima combinazione ∞R, OR accompagnasi, specialmente nei cristalli della seconda formazione il

([1]) Forster Catalog 1772, p. 3. *Spath calcaire du Hartz, qui paroit formé de segmens de prismes hexaèdres empilés en recouvrement les uns sur les autres.*

([2]) Annales des Mines, tom. V. *Mémoire sur un nouveau problème crystallographique.*

prisma $\infty P2$, sempre con facce subordinate in sviluppo, ristrette, e costantemente striate parallelamente agli spigoli laterali a zig-zag del romboedro primitivo ossia nel senso della cosidetta *zona principale*; per le numerose forme cristalline appartenenti a questa zona, specialmente negli altri tipi, tale striatura rivela evidentemente una spiccata tendenza al passaggio di queste prisma alle forme scalenoedriche appartenenti alla zona suddetta. In un solo esemplare esistente nel Museo mineralogico dell'Università di Strasburgo, si osservò la combinazione $\infty P2$, OR: sono cristalli giallastri, poco lucenti, evidentemente appartenenti alla formazione più antica: uniformi di superficie, sebbene leggermente appannate vi si mostrano le faccette $\infty P2$, e solo in alcuni individui più grossi si può mediante la lente, discernere una finissima striatura, che segue l'andamento di sopra notato, e che ha poca influenza sulla riflessione delle immagini: negli stessi individui si notano altresì traccie della forma ∞R rappresentate da striscette splendenti, sovra gli spigoli verticali di ∞ P2. Fu facile la determinazione di questo prisma avuto riguardo ai rapporti di posizione che le sue facce hanno con quelle del romboedro di sfaldatura.

I romboedri più comuni a presentarsi in questo tipo sono i seguenti: —2R,—$^1/_2$R, 4R: il primo di essi più di frequente in combinazione semplicemente con OR, in cristalli di svariata apparenza, raggiungendo uno sviluppo variabile; gli altri due in combinazioni più complicate, generalmente con minore sviluppo. Ognuna di queste tre forme mantiene invariata la propria apparenza caratteristica, che si conserva pressochè costantemente nei tipi rimanenti. Sono curve, più o meno scabre con varietà grande di rilievi e insenature le faccette del romboedro —2R così bene descritte e rappresentate da Scharff (loc. cit.) peraltro in alcuni nitidi cristallini strettamente tabulari, e provenienti dalla miniera di « Jacobsglück » si osservano facce nettissime, lucenti sebbene ristrette spettanti a queste forme combinate semplicemente con la dominante OR.

La forma 4R ha costantemente facce piane nitide, riflettenti immagini semplici, mentre il romboedro —$^1/_2$R presentasi striato lungo la diagonale minore delle sue facce, secondo la zona principale: ha una lucentezza speciale tendente alla sericea: di rado questa forma è determinabile per mezzo dei valori angolari. Altri romboedri oltre questi citati raramente si presentano e debbono considerarsi come eccezioni.

Le forme scalenoedriche più comunemente combinate in questo tipo sono quelle positive appartenenti alla zona principale: fra questi il più frequente R5, ed altri più acuti: rari i più ottusi della medesima zona: tali forme acute positive osservansi generalmente in quei grossi cristalli tabulari appartenenti alla seconda formazione e che sono accompagnati da molta galena in noduli compatti o in varia guisa disseminata. Rarissimi gli scalenoedri negativi in questo tipo: convien dire però che in alcuni individui si notano tracce di essi ma attesa la ristrettezza, e curvatura delle loro faccette, non sono in nessun modo suscettibili di una esatta determinazione. Le fig. 1, 2 tav. II rappresentano salvo il numero delle forme ivi figurate il modo di disposizione, e l'estensione relativa delle faccette, più comuni nelle combinazioni di questo tipo.

Segue la descrizione di alcune di esse non notate dagli autori: per queste procedesi dalle più semplici alle più complicate.

Combinazioni binarie o a 2 forme.

Sono le più frequenti con ristrettissima varietà di forme. Oltre ai due prismi si osservano associati alla base solo i due comuni romboedri negativi; giammai i positivi, e neppure alcun scalenoedro. Vi si connettono individui di formazione antica e recente.

Combinazioni ternarie o a 3 forme.

Queste constano di forme comuni eccettuato il romboedro $-{}^{3}/_{10}R$ determinato da Bournon: le forme romboedriche e prismatiche si associano in eguale proporzione: rari gli scalenoedri. Vi sono ugualmente rappresentate le due formazioni.

Combinazioni a 4 forme.

Prismi, romboedri, e scalenoedri compaiono quivi in giusta misura. I cristalli appartengono quasi esclusivamente alla seconda formazione.

N° 1. (Museo mineralogico universitario Strasburgo).

Cristalli bianco-giallastri, raccolti in gruppo, ed assai incassati su calcare compatto senza traccia di solfuri metallici, quindi è incerto a qual periodo di formazione appartengono: sub-trasparenti dotati di lucentezza grassa: larghi sulla base circa 7^{mm}, alti sul prisma $1{,}5^{mm}$.

Combinazione $0R, \infty R, R^{13}/_3, -{}^{1}/_{2}R$.

Apparenza delle facce.

∞R: con leggieri rigonfiamenti, dotato di lucentezza vitrea, mantiene uguale sviluppo in ogni parte del cristallo.

$0R$. Con superficie uniforme sebbene non completamente liscia: lucentezza madreperlacea, con leggero appannamento superficiale.

$R^{13}/_3$. Sviluppo inuguale nelle facce alterne per cui esse acquistano differente configurazione a seconda delle parti del cristallo: striature talora grossolane secondo la zona principale, lucentezza, tendente al sericeo.

$-{}^{1}/_{2}R$. Poco sviluppato, lucentezza, e striature conformi alla forma scalenoedrica.

Giova avvertire come in alcuni cristalli di maggiori dimensioni rendevasi evidente sulle faccette dello scalenoedro una striatura parallela allo spigolo di combinazione $\infty R : R^{13}/_3$ $(10\bar{1}1 : 8\,5\,\overline{13}\,3)$ la quale cosa di rado si osserva.

Lo scalenoedro non fu fin qui indicato per questa località, sebbene sia noto per altre; fu constatato in due cristalli, come le sue facce entravano esattamente nella zona principale.

Valori angolari (¹)

	Limiti delle misurazioni	Media	Valore calcolato	N.
$R : R^{13}/_3$ $(10\bar{1}1 : 85\overline{1}\overline{3}3)$	35°.42′ — 35°.54′	35°.49′	$35°.46\frac{3}{4}$	(4)
X	72 — 72. 32	72. 22	$72.\ 12\frac{1}{2}$	(3)

(¹) Per amore di brevità e chiarezza, seguendo i cristallografi tedeschi, vengono indicate con le lettere maiuscole X Y Z le tre qualità di spigoli esistenti in ogni scalenoedro: e rispettivamente con X gli spigoli culminanti acuti, con Y quelli culminanti ottusi, con Z quelli laterali a zig-zag. — In ogni rimboedro s' indicano con X e Z, rispettivamente gli spigoli culminanti, che fra loro sono uguali, e gli spigoli laterali. La lettera N si riferisce al numero degli angoli omologhi misurati su spigoli differenti. — Il rapporto parametrale adottato deriva dall'angolo del romboedro di sfaldatura in 105°.5′ — Sono omessi i valori angolari riferentisi a forme cristalline già note pel giacimento.

N° 2. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli regolarmente aggruppati a pila, di dimensioni poco variabili, larghi sulla base circa 5^{mm}, alti sul prisma circa 2^{mm}: biancastri con lucentezza vitrea appartenenti alla seconda formazione; riposano su calcare compatto.

Combinazioni OR, ∞ R, $R^{20}/_3, {}^1/_3 R^7/_3$.

Apparenza delle facce.

OR; piana, e nitida e riflettente immagini semplici per una porzione triangolare situata al centro, e circondata da sostanza opaca lattea.

∞R, molto lucente con rilievi che poco emergono dalla superficie.

R $^{20}/_3$. Nuovo scalenoedro con facce assai uniformi di superficie ma disugualmente sviluppate: in quelle maggiormente estese notasi una minuta striatura.

$^1/_3R^7/_3$. Scalenoedro ottuso della zona principale, che si presenta con faccette ristrettissime: in alcuni individui, dello stesso gruppo tale scalenoedro elevasi completo sulla base, quasi fosse dovuto ad una formazione successiva alla prima: non occupa completamente l'area basale.

Valori angolari

	Limiti		Media	Valore calcolato	N.
Z	= 22°.6′	— 22°.13′	22°.12′	22°.8′	(5)
X	= 49. 3	— 49 .25	49. 14	49. 16	(3)
$R:R^{20}/_3(10\bar{1}1:23\,17\,\bar{4}\bar{0}\,6)$	= 41. 26		41. 26	41. 29	(1)

Furono misurati 3 cristalli.

Il simbolo relativamente complicato di questa nuova forma, potrebbe sembrare poco conforme alla legge di razionalità degl'indici: non può pertanto restar dubbio sulla determinazione, giacchè ad onta della striatura si ebbero immagini riflesse costanti di posizione come resulta dai valori angolari.

N° 3. (Museo mineralogico Clausthal).

Aspetto e dimensioni dei cristalli, come al numero precedente, manca lo scalenoedro ottuso; la base OR si mostra uniformemente opaca.

Combinazioni OR, ∞R, $-{}^1/_2$R, $R^{17}/_3$.

App. delle facce.

Identica al numero precedente. Anche qui lo scalenoedro $R^{17}/_3$ è poco esteso, le faccette sono assai striate quindi danno immagini slargate, di cui è malagevole fissare la posizione. Questa forma cognita per altre località non fu fin qui osservata ad Andreasberg. Suole presentarsi in altro tipo.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$R^{17}/_3$	Z	24°.55′ — 26°.10′	25°.40′	25°.56′	(3)

Fu misurato l'unico cristallo disponibile.

Combinazioni a 5 forme.

Sono poco numerose, e vi prendono parte salvo eccezione, delle forme romboedriche e scalenoedriche comuni.

N° 4. Fig. 2, tav. II.

Combinazioni OR, ∞R, 4R, $-$2R, $-{}^1/_2$R.

Cristalli comuni, provenienti da varie miniere del distretto, per lo più dati da

seconda formazione con dimensioni variabili, trasparenti, cerulei accompagnati da galena e blenda in noduli racchiusi entro calcare compatto di un color grigio giallastro; in alcuni casi riposano essi cristalli su quarzo frantumato.

N° 5. Fig. 4, tav. II (Museo mineralogico Berlino). Cristalli uniformi di dimensioni; giallastri torbidi, poco lucenti, larghi 5^{mm}, lunghi 2^{mm}. In una geode insieme ad Armotomo: riposano sopra l'impasto caratteristico dato da quarzo frantumato ecc. già citato.

Combinazioni $0R, \infty P2, -2R, -10R^6/_5, R5$.

App. delle facce.

0R opaca lattea, solo alla parte centrale mostra qua e là qualche punto riflettente.

$\infty P2$ con facce lucentissime ma profondamente striate, che accennano, incurvandosi, al passaggio a scalenoedri della zona principale.

$-2R$ con faccette arrotondate e semiopache, per una uniforme e finissima punteggiatura estesa su tutta la superficie; questa forma è a ritenersi come determinata approssimativamente, e solo per le relazioni che ha col romboedro di sfaldatura.

R5 con facce curve, e opache ammesso solo approssimativamente.

$-10R^6/_5$. È una nuova forma scalenoedrica assai interessante: ha faccette assai bene sviluppate e piane sufficientemente, quantunque le immagini riflesse non fossero tutte ugualmente semplici, essendo talune alquanto slargate: queste ultime furono aggiustate mediante il canocchiale di osservazione che rimpiccolisce le immagini (¹) onde avere in cambio un'immagine più intensa, e più piccola, compresa cioè fra limiti più ristretti.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$-10R^6/_5$ Y)	$-\ 8°.30' - 8°.52'$	8°.45'	8°.36'	(3)
$R:-10R^6/_5\ (01\bar{1}\bar{1}:1\ 11\ \bar{1}\bar{2}\ 1)$	$-\ 49.\ 29 - 51\ .14$	50. 37	50. 13	(4)
$R:-10R^6/_5\ (\bar{1}101:\bar{1}\ 11\ \bar{1}\bar{2}\ 1)$	$-\ 67.\ 41 - 68.\ 15$	68. 5	68. 25	(3)
$R:-10R^6/_5\ (10\bar{1}1:1\ 11\ \bar{1}\bar{2}\ 1)$	$-\ 62.\ 41 - 62.\ 55$	62. 48	62. 53	(3)

Furono misurati due piccoli cristalli incompleti: sebbene le misurazioni oscillino fra limiti assai ampi, pure non può questa forma singolare riferirsi ad altra cognita. Oltre di che sembra, che tanto più sia da accettarsi, inquantochè come resulta dalla proiezione sferica, tav. I, essa giace sull'incontro di due zone a cui appartengono forme già cognite per la nostra località cioè alla zona $[11\bar{2}0:0\ 10\ \bar{1}\bar{0}\ 1]$ ed $[01\bar{1}0:10\bar{1}1]$ alla quale ultima appartengono diverse forme scalenoedriche.

N° 6. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli biancastri semiopachi, di dimensioni non uniformi: stanno su calcare compatto: offrono un diverso numero di faccette a seconda della mole: così i più piccoli constano solo delle forme $0R, -2R, -{}^1/_2R$; ove la forma $-2R$ ha facce limpide molto piane; i cristalli più grossi, coesistenti sullo stesso pezzo, ed aventi identica apparenza portano invece la combinazione

$$0R, \infty R, 13R, 4R, R5 -$$

(¹) Canocchiale δ secondo Websky, *Ueber Einrichtung und Gebrauch* der von R. Fuess in Berlin, *nach dem System Babinet gebauten Reflexions-Goniometer Modell* II°. Zeitschrift für Krystal. und Min. 1, pag. 545.

Tutte queste facce quanto all'apparenza nulla offrono di notevole, presentando i caratteri generali altrove notati.

N° 7. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli raccolti in geode, uniti col detrito caratteristico; biancastri, trasparenti sugli spigoli, opachi nell'interno: larghi sulla base 6^{mm}, alti sul prisma 4^{mm}.

Combinazioni OR, R12, ∞R, $R^{17}/_{3}$, R4.

App. delle facce.

OR completamente opaca, grossolanamente punteggiata.

∞R, lucente e non uniforme.

I tre scalenoedri portano faccette striate: fra l'uno e l'altro non è possibile ad occhio nudo discernere i limiti, sembrando passare insensibilmente l'uno nell'altro. Le molteplici immagini riflesse restano rigorosamente in zona: basandosi sopra la differente intensità, costanza di posizione si giunse ad ammettere le tre forme scalenoedriche suaccennate, già note per questa ed altre località.

Non si conoscono combinazioni a 6 forme.

Combinazioni a 7 forme.

Sono in piccol numero, ben caratterizzate: essendo tutte date dalla seconda formazione, e in cristalli di dimensioni uniformi con identica apparenza nelle facce Vi si associano varî solfuri, principalmente la galena e la blenda.

N° 8. Fig. 3, tav. II. (Museo mineralogico Clausthal).

Nettissimi cristalli provenienti dalla miniera di Jacobsglück: riposano su quarzo frantumato, con molte particelle di solfuri metallici. Notevoli per l'uniformità delle loro dimensioni; larghi alla base 10^{mm} alti sul prisma 2^{mm}. Lucentezza vitrea in tutta la superficie di essi, ad eccezione della base.

Combinazioni OR, ∞R, ∞P2, 4R, — 2R, —$^{1}/_{2}$.R, R6

App. delle facce.

OR, opaca, livida, scabra, punteggiata.

4R, ∞R, —2R. In medio sviluppo; dotate della massima lucentezza, ugualmente piane, con immagini riflesse semplici.

—$^{1}/_{2}$R, R6, ∞P2. Un poco meno sviluppate. Striate tutte secondo la zona principale, la prima assai profondamente, tanto da acquistare una spiccata lucentezza sericea; più leggermente le altre.

Sono interessanti in questa combinazione le faccette scalenoedriche della forma R6, non per anco osservate in alcuna località. Misurata ripetutamente la zona principale nei cristalli disponibili, ed aggiustando le immagini prodotte da due piccole faccette di sfaldatura, si verificò una deviazione appena sensibile, ma costante da essa zona delle immagini riflesse da R6. E stando quindi strettamente alle misure, prese sugli spigoli culminanti X, Y, che offrono rispettivamente valori assai concordi, senza portare in calcolo la zona si giunge al complicato simbolo $^{73}/_{72}$R$^{43}/_{7}$ (78475, 56502, $\overline{134977}$, 21672): e i valori calcolati di questa forma corrisponderebbero meglio colle medie delle misure per le due qualità di spigoli ricordati di sopra, mentre concordano meno cogli altri valori. Ammettendo invece che le facce in discorso entrino a far parte della zona si giunge al simbolo R6 ($75\bar{1}\bar{2}2$) di gran lunga più semplice.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R 6	X	69°.16′— 69°.20′	69°.18′	69°.33′½	(2)
	Y	48. 8 — 48. 22	48. 15	48. 6	(3)
	Z	24. 40 — 24. 46	24. 43	24. 6	(2)
R6:2R ($7\,5\,\bar{1}\bar{2}\,2:02\bar{2}1$)		— 36. 44	36. 44	37. 13	(1)
R6:4R ($7\,5\,\bar{1}\bar{2}\,2:40\bar{4}1$)		— 24. 18	24. 18	24. 10	(1)

Furono misurati 2 cristalli incompleti.

N° 9. (Museo universitario Strasburgo).

Analoghi ai precedenti, quanto alle dimensioni, allo sviluppo, ed apparenza delle singole faccette: è minore la lucentezza.

Combinazioni OR, ∞R, ∞P2, 4R, — 2R, — $^1/_2$R; $R^{19}/_3$.

Le facce dello scalenoedro $R^{19}/_3$ si mostrano esattamente nella zona principale.

Combinazioni con un maggior numero di forme sono a considerarsi come rare. Se ne conoscono solo due descritte rispettivamente da G. Vom Rath ed Hessenberg (v. Quadro I, pag. 513 e seg.).

Tipo II.

È senza dubbio il più frequente. Preferibilmente è il prisma ∞ R quello che serve di sostegno alla combinazione, e costituisce una eccezione la presenza di altra forma prismatica predominante: può ritenersi inoltre, che quanto alla frequenza i cristalli a tipo prismatico rappresentino la metà circa delle molte cristallizzazioni che provengono dal nostro giacimento.

La combinazione predominante si è ∞ R, OR conosciuta da lungo tempo come caratteristica [1] comune alle due formazioni, particolare poi della formazione più antica.

I cristalli che vi si riferiscono variano grandemente di dimensioni, partendo dall'essere aghiformi, raggiungendo talora qualche decimetro di larghezza sulla base.

Incontransi in questo tipo anche ricche combinazioni; e forse per questo offre maggiore ravvicinamento con gli altri tipi, onde suole passare gradatamente al tipo tabulare col quale non ha limiti decisi; passa poi ma più di rado ai tipi romboedrici e scalenoedrici.

Meno di frequente che nel tipo I incontrasi qui un aggruppamento regolare con una qualsiasi reciproca orientazione degli assi.

Alla forma predominante ∞ R si aggiungono oltre le forme romboedriche e scalenoedriche comuni, anche altre faccette meno comuni.

Il prisma ∞ R presentasi variamente influenzato nella superficie delle sue facce: esse sono nitide e piane in alcuni individui, e trasparenti; provenienti principalmente dalla miniera Sanson: in altri casi mostrano rilievi e insenature ecc. Le facce sogliono essere alternativamente più larghe e più strette mantenendo ciò nonostante identici gli altri caratteri fisici. Linneo constatò il primo questo fatto [2] dell'alternanza di

[1] Robert Jameson, *A system of Mineralogy*. Edimburgh, 1821, VII, pag. 489. Cromsted Min. *Crystalli spathosi hexagoni truncati* etc.

[2] *System natur. varie.* B fig. 6: *Crystallus truncata prismatis lateribus alternis angustioribus.*

sviluppo, che per Hauy dà luogo alla varietà alternante. Tutti gli autori parlano poi diffusamente di questo tipo; per le combinazioni che vi si coordinano v. Quadro I pag. 513 e seg.

Combinazioni binarie.

Avuto riguardo alla frequenza loro, possono riguardarsi come le più vere e copiose rappresentanti del giacimento.

Resultano costantemente dall'associazione di un prisma con la base o un romboedro: fra questi merita di essere ricordato il romboedro $-{}^{3}/_{2}$ R che nelle combinazioni prismatiche, e a tipo di romboedro medio binario offre una costante relazione paragenetica: i cristalli relativi riuniti in gruppi, accompagnano sempre il realgar, che giunge spesso a colorare in rosso giallastro i cristalli stessi. Non si ebbe giammai occasione di notare una combinazione binaria di questo tipo ove fosse associato uno scalenoedro. Così pure sono rari i romboedri positivi.

Combinazioni a 3 forme.

Anche per queste suole essere il complesso della cómbinazione offerto da forme romboedriche comuni, raramente vi si associano forme scalenoedriche.

N° 10. (Museo universitario Berlino).

Nitidi cristallini leggermente azzurrognoli trasparenti vitrei, associati a galena con quarzo frantumato e granuli di calcite; lunghi circa 4,5 mm., larghi sulla base 1, 5 mm.

Comb. ∞ R, $-{}^{1}/_{2}$ R, R ${}^{5}/_{3}$.

App. delle facce.

∞ R, limpido lucente con traccie di rilievi irregolari, $-{}^{1}/_{2}$ R con facce striate, e arrotondate, R ${}^{5}/_{3}$ con facce piane ristrette non striate, che danno semplici immagini riflesse.

N° 11. (Museo provinciale Hannover).

Cristalli nettissimi, riuniti in gruppo: dimensioni variabile da 6-9 mm. in lunghezza e 1-3 mm. in larghezza, lucenti, leggermente opalescenti con quarzo detritico ecc.

Comb. ∞ R, R 3, $-{}^{1}/_{2}$ R.

Caratteri delle facce come al numero precedente; la forma $-{}^{1}/_{2}$ R acquista maggiore estensione, onde in qualche cristallo scompare ogni traccia di facce scalenoedriche.

N° 12. (Museo universitario Berlino).

Poco lucenti, bianco-giallastri, torbidi, di variabili dimensioni, su calcite compatta.

Comb. ∞ R, OR, $-$ R ${}^{5}/_{3}$.

App. delle facce.

∞ R facce assai piane lievemente appannate La base OR è scabra punteggiata con aspetto livido; sono invece arrotondate e alquanto più lucenti le faccette dello scalenoedro $-$ R ${}^{5}/_{3}$.

N°. 13.

Analoghi a quelli del n. 11; provengono dalla miniera Felicitas.

Comb. ∞R,OR,R${}^{11}/_{3}$.

App. delle facce come n. 10 e 11.

Combinazioni a 4 forme.

Sono assai frequenti. Predominano le forme romboedriche, non nella proporzione veduta nelle combinazioni a 3 forme: fu posta fra queste anche una combinazione studiata da Wimmer (loc. cit.); e sebbene non si abbia avuto occasione di studiare l'esemplare originale, pure tenuto conto della specie di forme componenti la combinazione, nonchè della descrizione, non si dubitò riferirla a questo tipo.

N° 14. (Museo di Clausthal).

Sono piccoli per lo più, e nitidi individui dotati di lucentezza vitrea; lunghi sul prisma 2,5 mm., larghi sulla base 0,5 mm. e che offrono la combinazione ∞ R,0R, — $^1/_2$R, $R^5/_3$.

App. delle facce.

∞ R assai esteso con facce piane e lucenti : — $^1/_2$R, $R^5/_3$ con faccette profondamente striate : la determinazione di queste forme avvenne solo con qualche approssimazione. La base 0R con vario sviluppo nei varî individui del gruppo : per lo più lucida e opaca.

N° 15. (Museo universitario Strasburgo).

Cristalli limpidi vitrei, piuttosto frequenti indicati come provenienti dalla miniera Sanson, lunghi circa 3 mm., larghi 1,7 mm.: di dimensioni poco variabili.

Comb. ∞ R, — $^8/_7$ R_2, — $^8/_7$ R, — $^1/_2$R.

App. delle facce.

∞ R nettissimo nelle sue facce: $^8/_7$R pure lucente ma leggermente arrotondato e simile nell' aspetto allo scalenoedro — $^8/_7R_2$. Quest' ultimo è ad ogni modo ben determinabile, attesi i rapporti che lo legano ai due romboedri — $^8/_7$R, e R. Faccette striate scabre e semiopache quelle del romboedro — $^1/_2$R.

N° 16.

Nitidi cristalli di dimensioni uniformi lunghi circa 4 mm., larghi 2,5 mm. accompagnati da galena, e che risiedono su quarzo frantumato.

Comb. ∞ R, 4 R, R 4, 0 R.

App. delle facce.

∞ R con facce lucenti non piane: 0 R scabra opaca. 4 R con facce nettissime leggermente striate parallelamente agli spigoli di combinazione col prisma ∞ R. Le faccette R 4 si distinguono per la loro lucentezza grassa; trovasi questa forma citata in Hausmann senza indicazione precisa nè di località nè di tipo : del resto non fu da altri notata per Andreasberg. Furono misurati due cristalli, nei quali fu constatato esattamente che questa forma entrava a far parte della zona principale : per la striatura risultano immagini slargate di cui è difficile fissare la posizione : ammettesi nonostante, giacchè nessun' altra forma scalenoedrica conosciuta per questa località mostra valori angolari che meglio che in questa corrispondano colle misure, e perchè fu osservata con migliori caratteri in altre combinazioni.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R4:R $(53\bar{8}1:10\bar{1}1)$	33°.43′— 34°.12′	33°.56′	34°.28′½	(4)
R4:4R $(53\bar{8}1:40\bar{4}1)$	20. 36	20. 36	21. 7	(1)

Furono misurati due piccoli cristalli.

N° 17. (Museo provinciale Hannover).

Cristalli trasparenti lunghi sul prisma 5 mm. larghi circa 25 mm., assai uniformi di dimensioni; vi si riconoscono due diverse formazioni: vedesi attraverso la sostanza trasparente un granulo centrale opaco, in cui non si può con certezza riconoscere una forma qualsiasi.

Comb. $\infty P2, 4R, OR, R^{13}/_4$.

App. delle facce.

$\infty P2$. Predominante con facce striate secondo la zona principale, passando insensibilmente alla forma $R^{13}/_4$ che è possibile determinare nonostante le strie. Tale forma fu altrove osservata: non per anco nel nostro giacimento. Nettissime le faccette 4R. Sulla base OR disegnasi perfettamente l' accrescimento avvenuto parallelamente all' asse principale.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$R:R^{13}/_4\ (17\ 9\ \bar{2}\bar{6}\ 8)$	29°.55′— 30°.52′	30°.12′	30°.39½′	(4)
$R^{13}/_4$ Y	37. — 37. 50	37. 40	37. 28½	(3)

Cristalli misurati n. 2.

Combinazioni a 5 forme.

Sono molto frequenti: i romboedri vi prendono parte in ugual misura che gli scalenoedri.

N° 18.

Cristalli assai comuni, di varia dimensione ed apparenza, per lo più bianco-lattei, poco lucenti, riposano su calcare spatico: presentano in maggiore o minore sviluppo lo stesso numero di faccette, che sono tutte determinabili per mezzo delle zone.

Comb. $\infty R, -2R, R3, 4R, 0R$.

App. delle facce. Ognuna presenta i caratteri generali proprî, altrove descritti.

N° 19. (Museo universitario Strasburgo).

Limpidi cristalli associati a una certa quantità di galena lunghi circa 4^{mm}, larghi circa $1,5^{mm}$.

Comb. $\infty R, -R2, -R^5/_3, -{}^8/_7R, -{}^1/_2R$.

App. delle facce.

∞R con facce uniformi di superficie: sono tali anche quelle spettanti alla forma $-{}^8/_7R$ Il romboedro $-{}^1/_2R$ striato e arrotondato.

Le due forme scalenoedriche $-R2$, $-R^5/_3$ hanno facce assai curve, e in alcuni cristalli esse si fondono insieme. Tenuto conto per altro delle immagini riflesse date dalle faccette meglio sviluppate, si verrebbero a riconoscere come appartenenti ai due sopracitati scalenoedri, uno dei quali $-R2$, è nuovo: ed è quello maggiormente sviluppato.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$-R2$	Y	24°.6′— 24°.50′	24°.27′	24°.12′	(3)
	Z	66. 2 — 66. 45	66. 21½	66. 15½	(2)
$\infty R:-R2\ (10\bar{1}0:13\bar{4}2)$		32. 6 — 32. 18	32. 12	32. 12	(2)

Furono misurati due cristalli: non si pote' utilizzare il valore angolare dello

spigolo R: —R2 poichè appunto parallelamente a questo spigolo trovasi la massima curvatura, quindi ne derivano immagini incerte e slargate.

N° 20.

Combinazione assai frequente, offerta da cristalli di variabile aspetto, e dimensioni, che riposano su calcare spatico: le facce mostrano i caratteri speciali a ciascuna.

Comb. ∞R, 0R, 4R, —2R, R5.

N° 21. (Museo mineralogico Clausthal).

Comb. ∞R, 0R, $R^5/_3$, $^1/_2R^5/_3$, —$^1/_2$R.

Cristalli non molto grossi; lucenti, di dimensioni uniformi, lunghi 3^{mm}, larghi circa1^{mm}. ∞R con faccette lucenti assai piane: ristretta opaca, non lattea la base 0R: tutte le altre forme striate più o meno secondo la zona principale.

N° 22. Fig. 9, tav. II.

Cristalli uniformi di dimensioni, lunghi circa 7^{mm}, larghi 3^{mm}: sono bianchi semiopachi al centro, essendosi essi formati a diversi periodi: riposano su calcare spatico bianco-giallastro.

Comb. ∞R, ∞P2, $R^7/_2$, —$^1/_4$R15, —$^1/_2$R.

App. delle facce.

∞R con faccette assai sviluppate lucenti: all' esame goniometrico pel contegno delle immagini fanno riconoscere che esse sono leggermente curve: in medio sviluppo le faccette scalenoedriche $R^7/_2$ piane perfettamente e dotate di una lucentezza grassa: scabre e semiopache senza traccia di striatura le faccette romboedriche —$^1/_2$R. Sono invece subordinate nella maggior parte degl' individui, quantunque in alcuni appariscano come nel disegno, quelle del nuovo scalenoedro —$^1/_4$R15, al pari di quelle del prisma ∞P2 sono lucentissime.

I due scalenoedri di questa combinazione non furono per anco osservati in alcuna località.

Valori angolari $R^7/_2 = (9\ 5\ \overline{14}\ 4)$

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$R^7/_2$	X	73°.20′—74°.24′	73°.56′	74°.4′	(4)
	Y	38. 42 — 39. 34	39. 2	39. 8	(4)
	Z	40. 50 — 40. 56	40. 53	40. 54	(2)
$R^7/_2$:R $(9\ 5\ \overline{14}\ 4 : 10\overline{1}1)$		32. 9 — 32. 15	32. 12	32. 5½	(2)

Furono misurati due cristalli di diverse dimensioni, e in ambedue fu constatata la zona principale.

Per l' altro scalenoedro non si pote' effettuare che un piccol numero di misurazioni, per il poco sviluppo di alcune facce: e per queste in alcuni casi si ebbero immagini semplici, e di queste si tenne conto nel calcolo del nuovo simbolo: laddove le facce raggiungevano una maggiore estensione, e questo avveniva di preferenza nei cristalli più grossi, mostravasi anche una forte curvatura.

Valori angolari —$^1/_4$R15 $(7\ 8\ \overline{15}\ 4)$

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
—$^1/_4$R15	X	63°.12′—63°.22′	63°.15′	63°.34′	(3)
	Y	59. 16 — 59. 29	59. 22½	59. 25	(2)
—$^1/_4$R15:R $(10\overline{1}1 : 78\ \overline{15}4)$		39. 49	39. 49	39. 49	(1)

Cristalli misurati n. 2.

Osservasi come per lo spigolo X il valore trovato col calcolo, non è compreso fra i limiti dei valori misurati; ciò deriva in parte dalla conformazione delle faccette concorrenti in questi spigoli che offrono appunto la massima striatura parallelamente al medesimo.

N° 23. Fig. 8, tav. II. (Museo mineralogico Halle):

Nitidi cristallini leggermente colorati in giallastro, mantenendosi pur sempre trasparenti: associati in una elegante drusa: sono molto impiantati. Lunghi circa 4^{mm}, larghi $1,5^{mm}$.

Comb. $\infty R, -{}^8/_7R, 4R, -{}^8/_7R^5/_3$.

Nettissime le faccette spettanti a ∞R che si presentano alternativamente striate in senso trasversale: le strie vanno cioè parallelamente agli spigoli di combinazione $\infty R : 4R$. Le due forme negative quantunque assai sviluppate e lucentissime, presentano una leggiera curvatura, ciò che non impedisce per altro di constatare come tutte le immagini riflesse dalle faccette scalenoedriche si accordino con quelle delle faccette romboedriche per le zone che vanno parallelamente agli spigoli laterali del Romboedro in discorso, come è richiesto e indicato dai rispettivi simboli. Si ottengono poi per lo scalenoedro immagini ristrette, quando si aggiustino gli spigoli di combinazione dati dalle facce di questa forma colle contigue prismatiche, e di sfaldatura spettanti a R. È da notarsi pure, che le faccette scalenoedriche sono alternativamente estese in un modo disuguale: la base $0R$ per lo più assai piccola, nei cristalli più grossi raggiunge l'estensione indicata nel disegno. Le faccette del romboedro $4R$ sogliono essere poco sviluppate negli individui più piccoli, sono rappresentati da esili strisce lucentissime.

Valori angolari

	Limiti	Medie	Val. calcolato	N.
$\infty R - {}^8/_7R^5/_3$ $(10\bar{1}0 : 8\ 32\ \bar{4}\bar{0}\ 21)$	55°.16′ — 55°.20′	55°.18′	55°.44′	(2)
$\infty R - {}^8/_7R^5/_3$ $(01\bar{1}0 : 8\ 32\ \bar{4}\bar{0}\ 21)$	31. 40 — 32. 2	31. 51	32. 16	(2)
$-{}^8/_7R - {}^8/_7R^5/_3$ $(08\bar{8}7 : 8\ 32\ \bar{4}\bar{0}\ 21)$	13. 34 — 13. 58	13. 49	13. 58	(4)
$R - {}^8/_7R^5/_3$ $(10\bar{1}1 : 8\ 32\ \bar{4}\bar{0}\ 21)$	40. 50	40. 50	40. 39	(1)

Fu misurato l'unico cristallo disponibile, nel quale non furono misurati gli spigoli X, Y avvenendo secondo essi la massima curvatura.

N° 24.

Cristalli interessanti per il loro modo di accrescimento. Intorno a un nucleo centrale che emerge dalla estremità libera dei cristalli, il quale è rappresentato da uno scalenoedro ottuso della zona principale con facce nettissime e corrispondenti al comune $^2/_3R2$, si aggiunge nuova sostanza che riveste la forma prismatica ∞R; è mantenuta una perfetta orientazione fra le 2 formazioni, cosicchè due faccette di sfaldatura della sostanza involgente, trovansi esattamente in zona con le due faccette dello scalenoedro $^2/_3R2$ concorrenti nello spigolo culminante acuto. La combinazione qui riferita, vale solo per i cristalli della formazione secondaria. I cristalli hanno presso a poco uguali dimensioni lunghi circa 7^{mm}, larghi 3^{mm}. Riposano sopra l'impasto quarzoso calcare più volte citato.

Comb. $\infty R, \infty P2, -2R, -{}^6/_5R, {}^1/_4R8$.

App. delle facce.

Il prisma ∞ R ha facce lucenti e perfettamente piane; ∞ P 2, in qualche individuo possiede uguale sviluppo, che ∞ R; ha faccette striate non ugualmente in tutta la loro estensione: si hanno strie profonde e più rade verso la metà, sono invece più esili, e ravvicinate verso l' estremità.

Facce piane e ben distinte hanno i due romboedri negativi; striate e ristrettissime sono le faccette $^1/_4$R 3. Nei cristalli più grossi si avvertono poi tracce di scalenoedro negativo affatto indeterminabili.

N° 25. (Museo mineralogico Clausthal).

Piccoli lucenti cristalli, con una velatura giallo d'oro, d'ossido idrato di ferro.

Comb. ∞ R, — $^8/_7$R 2, — $^8/_7$R, — $^{11}/_7$R, — $^1/_2$R

App. delle facce.

∞ R facce lucenti leggermente curve come quelle delle forme negative — $^8/_7$R — $^8/_7$R 2: ristrettissime le faccette — $^{11}/_7$R: pure subordinate striate ineguali nei varî individui quelli del romboedro — $^1/_2$R. Sullo stesso esemplare in cristalli perfettamente simili si ha invece la combinazione.

∞ R, — $^1/_2$R, R, — $^8/_7$R 2, — $^8/_7$R, — 2 R. Fig. 5, tav. II.

N° 26. (Museo mineralogico Clausthal).

Sopra una drusa tappezzata di nitidi cristallini prismatici di dimensioni pressochè uguali, se ne hanno pochi altri più grossi: hanno la stessa forma sì gli uni che gli altri.

Comb. ∞ R, — $^1/_2$R, $\frac{1}{2}$ R$^5/_3$, $^2/_5$R 2, R.

App. delle facce.

∞ R come al numero precedente. I due scalenoedri positivi appartenenti alla zona principale, passano insensibilmente l'uno nell'altro e sono finamente striati. È molto sviluppato il romboedro — $^1/_2$R con faccette pure striate. Nettissima di superficie, e molto lucente la forma R, quantunque in vario sviluppo nelle diverse parti del cristallo. Oltre di queste avrebbesi indizio di una forma scalenoedrica acuta positiva, ma di cui è impossibile calcolare il simbolo stante la imperfezione delle facce.

N° 27. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli assai grossi subtrasparenti di aspetto singolare attesa la diversa trasparenza delle facce: di dimensioni variabili riposano sull' impasto detritico quarzoso.

Comb. ∞ P 2, — 2 R, O R, — 2 R 3, ∞ R.

App. delle facce.

∞ P 2. Con facce striate come sempre, però assai finamente onde acquistano una lucentezza sericea. In vicinanza dell' estremità libera del cristallo esse si arrotondano, tendendo ad uno scalenoedro più acuto. ∞ R dotato di una purissima lucentezza vitrea, onde è saliente la distinzione fra le due qualità di forme prismatiche: è assai poco sviluppato, e con lievi ondulazioni alla superficie. La forma — 2 R ha facce affatto opache scabre punteggiate. Sono poi ristrettissime le faccette — 2 R 3 nitide e piane: evidente anche ad occhio nudo la zona [$02\bar{2}1$, $24\bar{6}1$, $11\bar{2}0$]: la base OR ristretta e scabra.

N° 28. (Museo provinciale Hannover).

Sopra impasto detritico quarzoso stanno cristalli nitidi e lucenti di varia dimensione.

Comb. ∞ R, OR, — $^1/_2$ R, 4R, $^1/_3$ R $^7/_3$.

App. delle facce.

∞ R, — $^1/_2$ R, OR, 4R con i caratteri speciali propri. Lo scalenaedro $^1/_3$ R $^7/_3$ trovasi citato da Sella per questa località, senza indicazione del tipo.

Non è possibile per questa forma una determinazione esatta a causa della striatura delle sue faccette.

N° 29. (Museo universitario Berlino).

Nitidi cristallini assai piccoli trasparenti, dotati di lucentezza adamantina associati ad heulandite ed apofillite rosea. Combinazione assai frequente.

Comb. ∞ R, — 2R, — $^1/_2$ R, 4R, $^2/_5$ R2.

Le faccette tutte hanno i loro caratteri ordinarî, salvo una variabile estensione.

N° 30. (Museo universitario Berlino).

Analoghi sotto ogni rapporto a quelli descritti al n. 22 con la differenza che in cambio delle forme ∞ P_2, — $^1/_2$ R si ha OR, 10R.

Comb. ∞ R, OR, R $^7/_2$, 10R, $^1/_4$ R 15.

La nuova forma 10R non per anco osservata ha qui facce ristrettissime, nè presentasi sviluppata in ogni parte del cristallo, onde alla determinazione di essa servì solo l'angolo R: 10R. La base OR è opaca ristretta.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R$^7/_2$ (95$\bar{1}\bar{4}$ 4)	X	73°.29 — 73°.51′	73°.40′	74°.4′	(2)
	Y	39 — 39. 37	39. 25	39. 8	(3)
	Z	40. 44 — 40. 57	40. 49	40. 54	(3)
10R:R (10 0 $\bar{10}$ 1:10$\bar{1}$1)		39. 29 — 39. 37	39. 32	39. 36	(4)

Furono misurati due cristalli.

Lo scalenoedro — $^1/_4$ R15 offre qui immagini multiple incostanti di posizione. — Si ebbe per l'angolo — $^1/_4$ R15: R (78$\bar{1}\bar{5}$4: 10$\bar{1}$1) 39°.20′ — 40°.8′ Calcolato 39°.49′

N° 31. Fig. 14, tav. II. (Museo universitario Halle).

Cristalli analoghi a n. 28.

Comb. ∞ R, — $^1/_2$ R, R, 4R, — $^8/_7$ R $^3/_2$.

Le faccette romboedriche si presentano coi caratteri loro particolari. — Lo scalenoedro — $^8/_7$ R $^3/_2$ con facce assai estese, e determinato facilmente per i rapporti che lo legano al romboedro di sfaldatura, che ne tronca gli spigoli acuti culminanti.

N° 32. (Museo provinciale Hannover).

In vario sviluppo, con lucentezza particolare secondo le facce: riposano su quarzo detritico cementato.

Comb. ∞ R, — $^1/_2$ R, R17, 4R, R.

Lo scalenoedro R17 non fu per anco osservato per questa località. — Presentasi con facce per lo più ristrette disugualmente estese leggermente striate. Fu constatata con esattezza la zona principale.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R. 17	Y	54°. — 54°.10′	54°.5′	54°	(2)
R 17: R (9 8 $\bar{17}$ 1: 10$\bar{1}$1		47. 55 — 48. 11	48. 2	48. 9	(4)

Furono misurati due cristalli di varia dimensione.

N° 33.

Combinazione assai frequente offerta da nitidi cristalli, che riposano sopra quarzo detritico cementato da sostanza calcitica.

Comb. ∞ R, — $^1/_2$ R, R, $^5/_{11}$ R $^9/_5$, OR.

I cristalli nel loro insieme, come per l'apparenza delle faccette in nulla differiscono da quelli descritti al n. 28. — Presentasi qui in luogo della forma $^2/_5$ R2, lo scalenoedro della stessa zona $^5/_{11}$ R $^9/_5$, il quale fu osservato anche in altri esemplari.

Combinazioni a 6 forme.

N° 34. Fig. 12, tav. II. (Museo universitario Halle).

Nitidi cristallini con facce uniformemente estese lunghi circa 4^{mm}, larghi $1{,}5^{mm}$.

Comb. ∞ R, — $^1/_2$ R, OR, R, $^1/_4$ R3, $^{49}/_{13}$ R $^{13}/_7$.

App. delle facce.

∞ R dominante con facce assai piane: R limpido le cui facce danno immagini semplici: le forme $^1/_4$ R 3, — $^1/_2$ R hanno facce striate: la base OR più o meno ristretta sempre opaca. — È interessante la nuova forma $^{49}/_{13}$ R $^{13}/_7$ che presentasi con faccette ben distinte, che forniscono riflessi semplici.

I valori ottenuti farebbero ritenere questa forma identica a quella notata da Zepharovich (¹) in cristalli di calcite di Pzibram, ai quali assegnò il simbolo $^{19}/_{15}$ R $^{19}/_{10}$: Irby in seguito (loc. cit. pag. 42) senza eseguire misure di sorta sostituì l'altro $^{29}/_8$ R $^{55}/_{29}$: ma neppure per questo i valori calcolati si accordano bene colle misure. — Nel nostro caso invece di avere forme scalenoedriche isolate come erano i cristalli di Pzibram, sono tali faccette scalenoedriche subordinate: riferendosi alla media delle misure eseguite si calcola il simbolo $^{49}/_{13}$ R $^{13}/_7$ i cui valori angolari sono assai vicini a 4 R 2, non tanto per altro da potere ritenere che si tratti di questa forma, specialmente se si tenga conto dei limiti assai vicini, indicati dalle misurazioni.

Valori angolari

	Limiti	Media	$^{49}/_{13}R^{13}/_7$ Val. calc.	N.	$^{29}/_8R^{55}/_{29}$ Val. calc.	4R2 Val. calc.
X	92°46′—93°8′	92°57′	92°59¾′	(2)	92°7′	91°3½′
Y	25 —25.16	25.9	25.8¼	(3)	25.45½	27.31½
Z	38.52—39	38.56	38.53½	(2)	38.27½	35.52
$^{49}/_{13}R^{13}/_7$: R (70 21 $\bar{9}\bar{1}$13 : 10$\bar{1}$1)	37.46—37.49	37.47½	37.52½	(2)	—	—
$^{49}/_{13}R^{13}/_7$: ∞ R (70 21 $\bar{9}\bar{1}$13 : 10$\bar{1}$0)	15.32—15.38	15.35	15.37½	(2)	—	—

Furono misurati due cristalli incompleti.

N° 35. Fig. 10, tav. II.

Interessante combinazione offerta da cristalli di dimensioni non uniformi non molto lucenti impiantati sull'impasto detritico quarzoso ricomposto.

Comb. ∞ R, 4 R, — $^1/_2$ R, R, — $^4/_5$ R 3, — $^2/_3$ R 7.

App. delle facce.

∞ R Con facce uniformi di superficie, e semiopache, — $^1/_2$ R con facce opache

(¹) *Mineral. Mitth.* Sitzungsberichte d. Wiener Akademie, vol. 54, pag. 273.

e rotondeggianti, assai estese prive di striature; 4 R nitido di superficie e in medio sviluppo: R non sempre presente, e per ciò non rappresentato nel disegno.

Sono qui interessanti le due forme scalenoedriche. La forma — $^4/_5$ R 3 è assai comune nella calcite: presentasi qui con facce ristrettissime, e che mancano specialmente negl'individui più grossi: presenta sempre immagini nettissime. — Sono un poco più sviluppate le faccette — $^2/_3$ R 7, talora leggermente appannate: per queste si hanno immagini semplici, sebbene alquanto slargate. — Parrebbe a tutta prima che esistesse una zona fra le due facce di questa forma concorrente nello spigolo culminante acuto X e il romboedro 4 R, ma si ebbe al goniometro una costante e considerevole deviazione dalla zona stessa. — Questa forma non fu fin qui rinvenuta in alcuna combinazione nè di questa, nè di altra località.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
— $^2/_3$R 7	X	66°.19′— 67°.43′	66°.42′	66°.45′	(6)
	Y	48. 36 — 48. 58	48. 46	48. 54	(2)
	Z	30.48	30. 48	31. 18	(1)
4R — $^2/_3$R7 $(40\bar{4}1:68\bar{1}\bar{4}\,3)$		33. 17 — 34. 2	33. 41	33. 38	(3)
R — $^2/_3$R7 $(10\bar{1}1:68\bar{1}\bar{4}\,3)$		43. 19 — 43. 38	43. 28½	43	(2)

Furono misurati due cristalli di diversa dimensione: nonostante la poca concordanza che sembra esistere fra alcuni dei valori misurati con quelli dati dal calcolo, pure sembra doversi ammettere questa nuova forma perchè entra a far parte d'una zona in cui di frequente si riscontrano forme cristalline comuni: e questa è la zona $[01\bar{1}0:21\bar{3}1]$.

N° 36. Fig. 7, tav. II.

Cristalli assai lucenti lunghi circa 7^{mm}: alcuni assai più piccoli che portano un minor numero di faccette riposano su quarzo frantumato ricomposto, accompagnati da galena e calcopirite.

Comb. ∞ R, R $^5/_3$, — 15 R $^{17}/_{15}$, R 8, 4 R, $^1/_4$ R 3.

App. delle facce.

∞ R con facce assai nette; solo 3 alterne sono presenti; cioè quelle corrispondenti alla porzione positiva, essendo le altre tre supplantate per intero dalle faccette lucentissime della nuova forma — 15 R $^{17}/_{15}$ che offre immagini assai costanti di posizione sebbene un poco slargate per una lieve curvatura che interviene sulle facce. — In due cristalli per altro si ottennero valori assai concordanti fra loro.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
— 15 R$^{17}/_{15}$	X =	113°.23′	113°.23′	113°.39′½	(1)
	Y =	6.11 — 6.33	6. 24	6	(3)
—15R$^{17}/_{15}$: R $(1\,16\,\bar{1}\bar{7}\,1:10\bar{1}1)$		64. 45	64. 45	64. 49½	(1)
—15R$^{17}/_{15}$: R $(\bar{1}\,17\,\bar{1}\bar{6}\,1:10\bar{1}1)$		68. 44	68. 44	68. 47	(1)
—15R$^{17}/_{15}$:4R $(1\,16\,\bar{1}\bar{7}\,1:40\bar{4}1)$		56.9 — 57.12	56. 50	57. 10	(3)
—15R$^{17}/_{15}$:4R $(\bar{1}\,17\,\bar{1}\bar{6}\,1:40\bar{4}1)$		63. 8	63. 8	62. 59	(1)

Lo scalenoedro R 8 è pure nuovo. — Fu riscontrata esattissima la zona principale per mezzo di faccette di sfaldatura. — Tale forma poi ripetesi meglio sviluppata in una combinazione spettante ad altro tipo: qui le singole faccette sono poco sviluppate e presentansi leggermente striate.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$R^5/_3$:R8 $(4 1 \bar{5} 3 : 9\ \bar{7}\ \bar{16}\ 2)$	28°.28′— 29°.6′	28°.42′	28°.30′	(4)
R8 { X	50. 25 — 50. 35	50. 30	50. 52	(2)

Combinazioni a 7 forme.

Poche di queste sono note, e in queste predominano le forme romboedriche.

N° 37. (Museo universitario Halle).

Cristalli assai piccoli lunghi 5^{mm}, larghi 1^{mm} a lucentezza adamantina.

Comb. ∞ R, OR, R, — $^1/_2$ R, R $^9/_5$, R $^{17}/_3$, 4 R.

App. delle facce.

∞ R, con facce inugualmente sviluppate, leggermente ondulate alla superficie: 4 R, R, OR, $^1/_2$ R come negli esemplari precedenti; R $^9/_5$ molto striato, quindi non è ben definito: lo stesso dicasi dello scalenoedro R $^{17}/_3$ il quale è molto meno esteso del primo. — Questa forma scalenoedrica nuova per Andreasberg, fu già notata in una combinazione appartenente al 1° tipo. — Per lo spigolo Z si ebbero in 2 cristalli valori assai discordanti.

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$R^{17}/_3$Z {	28°.67′ — 25°.40′	26°.22′	25°.56′	(4)

Non potrebbe basarsi una determinazione su tali dati, e in questo caso ammettesi per l'analogia esistente fra le faccette scalenoedriche di questa combinazione e quella spettante al tipo 1° precedentemente accennata.

N° 38. (Museo universitario Berlino).

Piccoli cristalli bianco-grigi, lunghi circa 5^{mm}, larghi 25^{mm}, limpidi all'estremità libera, leggermente opachi in prossimità della base su cui siedono.

Comb. ∞ R, —$^6/_5$ R, — $^1/_2$ R, — $^8/_7$ R 2, R 4, 4R, O R.

App. delle facce.

∞ R con facce ugualmente estese, limpide, striate in senso trasversale, parallelamente cioè allo spigolo di combinazione con 4 R. Il romboedro — $^1/_2$ R scabro opaco, determinato approssimativamente: 4 R ristrettissimo lucente: — $^8/_7$ R 2,— $^6/_5$ R arrotondati leggermente e lucentissimi: OR ristretta triangolare opaca: R 4 con facce nette, già citato da Hausmann e che s'incontra di frequente specialmente nel tipo VII.

N° 39. Fig. 13, tav. II. (Museo universitario Halle).

Limpidi cristalli alcuni dei quali terminati alle due estremità: alti 3, 5^{mm}, larghi da 2 a 4^{mm}: alcuni di essi, specialmente gl'individui più grossi, potrebbero riferirsi al tipo I. — Poggiano confusamente ammassati sopra quarzo frantumato.

Comb. ∞ R, OR, — 2 R, $^4/_3$ P 2, — $^5/_4$ R 3, — $^1/_2$ R, R 12.

App. delle facce.

∞ R lucentissimo con facce piane; ∞ P 2, R 12, — $^1/_2$ R striati secondo la zona principale: assai estese le faccette $^4/_3$ P 2, e quelle del nuovo scalenoedro — $^5/_4$ R 3.

Sorprendente è poi la limpidezza e il nitore della base OR, come giammai fu riscontrato in questa località. — Oltre queste facce notansi tracce di scalenoedro negativo acutissimo, del quale non si pote' determinare con sicurezza il simbolo attesa la poca concordanza dei valori angolari: è certo però che questa forma apparteneva a quella serie di scalenoedri acuti negativi che hanno il loro limite in un romboedro negativo acutissimo. — Tale forma offerse come media di 4 misurazioni i seguenti valori nei due spigoli culminanti:

$$Y = 6.38$$
$$X = 108.42.$$

La nuova forma scalenoedrica — $^5/_4$ R 3 era invece assai bene caratterizzata con limiti decisi e netti, quantunque offrisse immagini riflesse alquanto slargate.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
— $^5/_4$ R 3	Y	35°.30′ — 36°	35°.52′	36°.28′	(4)
	X	77. 54 — 78.15	78. 2	77. 29	(3)
R : — $^5/_4$R3 $(1 0 \bar{1}\bar{1} : 5\ 10 \bar{1}\bar{5}\ 4)$		44 — 44.49	44. 31	44. 14	(3)

Furono misurati due piccoli cristalli.

Nonostante che i valori calcolati per questa nuova forma non si mostrino molto concordi colle misure eseguite, pure ammettesi questa nuova forma poichè oltre a possedere simbolo relativamente semplice, entra a far parte delle due zone assai frequenti $[11\bar{2}0 : 05\bar{5}4]$ ed $[21\bar{3}1 : 50\bar{5}2]$.

Combinazioni a 8 facce.

Sono assai rare ed appartengono a cristalli i quali per il loro modo di trovarsi assomigliano assai alle combinazioni complicate del tipo VI.

N° 40. Fig. 11, tav. II. (Museo mineralogico Clausthal).

Limpidi cristalli adamantini di dimensioni variabili da 2-6^{mm} di altezza, da 2-3^{mm} di larghezza: in alcuni essendo assai sviluppata la forma — 2 R, sembrano appartenere al tipo IV.

Comb. ∞R, — 2 R, R, — $^1/_2$ R, 4 R, R $^{11}/_8$, R $^5/_3$, OR. Tutte queste facce hanno i caratteri particolari già altrove accennati; così il romboedro — 2 R ha facce lucentissime arrotondate; la base OR, ristrettissima e lucente. I due scalenoedri positivi hanno identica apparenza: sono leggermente striati: immagini riflesse regolari offrono le faccette della nuova forma R $^{11}/_8$: per questo fu constatato che entrava esattamente a far parte della zona principale.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R $^{11}/_8$	Z	86°.50′ — 86°.58′	86°.55′	86°.58′	(3)
	Y	11. 7 — 11. 31	11. 19	11. 22	(2)

Furono misurati due piccolissimi cristalli.

N° 41. (Museo mineralogico Halle).

Analoghi ai precedenti.

Comb. ∞R, — $^{13}/_8$R, R, — $^1/_2$R, R$^5/_3$, R $^{11}/_8$, 4 R, R 5. Manca quivi ogni traccia di OR, e si aggiunge con facce ristrettissime lo scalenoedro R 5. — Nell' etichetta

relativa stava indicato invece di $-2R$ (il romboedro presente nel cristallo precedentemente descritto) il romboedro $-{}^{13}/_8 R$. — Essendo queste facce eccessivamente curve riesce impossibile constatare anche col goniometro di applicazione l'angolo che esse formano con le facce contigue: si lascia nonostante il simbolo $-{}^{13}/_8 R$ come approssimativo. — Il nuovo scalenoedro $R\,{}^{11}/_8$ presentasi qui meno ben definito, ed i valori relativi oscillano fra limiti più ampî.

Combinazioni a 9 facce.

Sembra che siano assai rare in questo tipo non trovando negli autori nessuna descrizione relativa. Fu osservata una sola combinazione.

N° 42. Fig. 6, tav. II. (Museo mineralogico Clausthal).

Nitidi cristalli opalescenti lunghi 6-10^{mm}, larghi 2-4^{mm}.

Comb. $\infty P2, R, -{}^{4}/_{3}R, -2R, 0R, 6P2, -2R3, \infty R, -{}^{1}/_{2}R$.

App. delle facce.

Domina il prisma di second'ordine; e contrariamente a ciò che d'ordinario suole verificarsi per questa forma, non si ha nel caso presente traccia di striatura. Avvicinandosi alle forme scalenoedriche le sue faccette si arrotondano sensibilmente acquistando in pari tempo maggiore lucentezza. — Con facce piane ed opache assolutamente presentasi il romboedro R, ordinariamente meno sviluppato di quello che apparisca dalla fig. 6. — Opache pure e leggermente curve sono le faccette spettanti ai due romboedri negativi $-2R, -{}^{4}/_{3}R$ la cui determinazione fu solo approssimativa.— ${}^{1}/_{2}R$ striato come sempre: 0R punteggiato e con immagini debolissime: $-\infty R$ ristretto e con lucentezza diversa da $\infty P2$. — Lo scalenoedro $-2R3$ sebbene con facce ristrette pure fornisce immagini semplici e costanti di posizione. — La piramide $6P2$ ha maggiore estensione passando insensibilmente al prisma $\infty P2$. — Rende difficile la determinazione di questa forma la curvatura delle facce $\infty P2$, e la non esistenza di alcuno spigolo fra queste forme e la piramide che come fu osservato l'una nell'altra gradatamente trapassano. — Anzi in un primo esame pareva ammissibile l'esistenza delle due zone $[11\bar{2}0\ 044\bar{3}]$ ed $[\bar{1}2\bar{1}0\ 24\bar{6}\bar{1}]$: fra le quali sarebbe stata compresa la forma che fu poi determinata come piramide di 2° ordine: ciò del resto fu riconosciuto erroneo, sebbene non considerevole fosse la differenza, deviando le immagini della fessura di Webski date dalle facce della piramide per ${}^{2}/_{3}$ circa della loro altezza dal filo orizzontale del cannocchiale di osservazione, allorchè le altre date dalle facce $-{}^{4}/_{3}R, \infty P2$ trovavansi aggiustate: Ed allora basandosi sulle medie dei valori angolari ottenuti, si giunse al simbolo $-{}^{1}/_{13}R78$ assai complicato. — Tradotto lo stesso simbolo nel così detto segno piramidale si ha che esso equivale a $6P\frac{156}{79}$ che come vedesi si avvicina assai alla piramide $6P2$ definitivamente ammessa, che del resto offre valori assai discordanti da quelli misurati.

Valori angolari

	Misurato	$-{}^{1}/_{13}R78$ Calcolato	6P2 Calcolato	N.
X	59°.36′— 59°.47′	59°.39′	58°.47′	(4)
Y	57. 55 — 58	57. 58 ½	58. 47	(4)
Z	21.55	21.40	22.5	(1)

Giova notare come delle due immagini offerte dalle faccie 6 P 2, si pote' in due casi verificare che l'una di esse trovavasi distintamente in zona [$11\bar{2}0:0001$] ciò che è richiesto per ogni piramide di 2° ordine. — Pare evidente che anche in questo come in altri casi abbiasi a riconoscere una forma oscillante vicinale, nata dal conflitto delle due principalissime leggi cristallografiche; della legge di razionalità degli indici da una parte e del collegamento zonale dall'altra; fatto questo già riconosciuto e discusso da Hessemberg. — Sembra del resto che ciò avvenga nella calcite bene spesso colle piramidi di 2° ordine che sono assai rare e tendono quasi sempre a trasformarsi in forme scalenoedriche appartenenti a zone degli spigoli orizzontali di comuni romboedri coesistenti nella combinazione

Tipo III.

Dato dal predominio di un romboedro acuto in cui *m* sia maggiore di 4. — È questo il tipo meno frequente, contando poche e non complicate combinazioni: collegasi al tipo II o prismatico a misura che, *m* si avvicina ad ∞: riesce pertanto sempre netta la distinzione fra i due, avuto riguardo non tanto al parallelismo degli spigoli evidente nel prisma, quanto all'apparenza uniforme che hanno le forme di questo tipo nelle loro facce. — Del resto è il meglio caratterizzato anche perchè non offre graduati passaggi ad altri tipi oltre quello accennato. Sono pochi effettivamente i romboedri conosciuti, e predominanti in cui il coefficiente *m* sia maggiore di 4. — In generale sono romboedri negativi, in cui *m* è maggiore di 10. Bournon ed Hauy specialmente citano frequente per questa località il romboedro — 14 R. — Ma se si pensi all'approssimazione che può raggiungersi nelle misure angolari col goniometro di applicazione, e come nelle forme romboedriche acute, siano sufficienti non gradi, ma minuti per avere una differenza di un'unità nel coefficiente *m*, è a dubitarsi che tali determinazioni siano sempre indiscutibili. — Costantemente poi sogliono avere tali forme, facce scabre o punteggiate, o in varia guisa accidentate da essere malagevole sempre una esatta determinazione. — Rarissimi sono i romboedri acuti isolati; si associano più di frequente ai romboedri negativi, rari gli scalenoedri e i prismi. — Quanto alle combinazioni date dagli autori per questo tipo, v. Quadro I pag. 513 e seg.

Forme isolate.

Non fu dato riscontrarne alcuna.

Combinazioni a 2 forme.

Sono le più frequenti, offerte esclusivamente dall'unione di romboedri negativi colla base, o in luogo di questa si hanno altri romboedri negativi più ottusi; non si osservò in queste combinazioni binarie alcuno scalenoedro o prisma.

N° 43. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli vitrei aghiformi confusamente aggruppati misti a galena.

Comb. — 10 R, OR.

App. delle facce.

Il romboedro — 10 R ha facce curve e con rilievi; furono misurati 2 cristalli, in cui si trovò che l'angolo R: — 10 R ($10\bar{1}1 : 10\ 0\ \bar{10}\ \bar{1}$) oscillava fra i limiti 51°.28—50°.47′ con una media di 51°.5′.— Corrisponde a questo romboedro la nuova forma

negativa che offre il valore di 51°.10′ 3/4. — Attesa la curvatura delle facce tendenti ad uno scalenoedro acuto negativo non fu possibile ottenere il valore angolare di altri spigoli. — Tale nuova forma merita esser confermata.

N° 44. (Museo mineralogico Clausthal).

Analoghi ai precedenti offrono invece la combinazione — 11 R, OR.

App. delle facce.

Sono longitudinalmente striate le facce del romboedro predominante, che per essere anche leggermente curve, non forniscono buoni riflessi. — Tale romboedro, noto per altre località, è nuovo per Andreasberg. — Furono misurati gli spigoli di combinazione col romboedro di sfaldatura e si ebbero valori oscillanti fra i limiti 50°.56′—49°.40′ mentre si calcola per lo stesso angolo 50°.39 1/4; la base OR semiopaca lattea.

N° 45. (Museo granducale Karlsruhe).

Nitidi cristallini di varia dimensione confusamente intrecciati; in vicinanza della base aumenta sensibilmente la curvatura, che è leggerissima nel resto del cristallo in alcuni esemplari.

Comb. — 13R, OR.

Il romboedro predominante è nuovo; furono misurati due cristalli di diversa dimensione.

Valori angolari

	Limiti	Calcolato	N.
R : —13R $(10\bar{1}1 : 13\,0\,\overline{13}\,\bar{1})$ =	49°.46′— 49°.57′	49°.51′	(6)

La base OR è opaca biancastra.

Combinazioni a 3 forme.

Intervengono qui pure quasi esclusivamente romboedri negativi: fu constatata una sola combinazione non citata dagli autori.

N° 46. (Museo della Scuola delle miniere Berlino).

Cristalli apparentemente prismatici.

Comb. 16R — 1/2 R, — 6/5 R, 13/3.

App. delle facce.

Il romboedro che fa da sostegno ha facce assai lucenti e scabre; sono assai piane invece e con riflessi semplici, laddove gli spigoli laterali a zig-zig formano l'angolo piano acuto, e da questo si trasse profitto per misurare l'incidenza con una faccetta di sfaldatura. — Scharff (1) fa menzione di questo romboedro ritrovato ad Andreasberg: —1/2 R assai ristretto ma con facce nettissime e contrariamente a quanto spesso verificasi mancante di strie. — Lo scalenoedro — 6/5 R 13/3 presentasi con facce ristrette, ma lucenti e piane, le quali sembrano smussare gli spigoli culminanti del romboedro acuto, e ciò per la curvatura che mostrano le facce di esso romboedro in vicinanza dell'angolo ottuso piano delle facce rombe. — Furono misurati due cristalli che offrirono tanto per il romboedro come per lo scalenoedro valori angolari assai concordi con quelli misurati.

(1) *Neues Jahrbuch* 1861.

Valori angolari

Angoli		Limiti	Media	Calcolato	N.
R: 16R	$(10\bar{1}1:16\,0\,\overline{16}\,1)$	41°.39′—41°.50′	41°.47′	41°.46′	(4)
$-{}^1/_2$R: $-{}^6/_5R^{13}/_3$	$(01\bar{1}2:10\,16\,\overline{26}\,5)$	52. 59—53. 30	53. 10	53. 31	(3)
R: $-{}^6/_5R^{13}/_3$	$(10\bar{1}1:10\,16\,\overline{26}\,5)$	45. 18—45. 55	45. 38	45. 46	(3)
$(-{}^6/_5R^{13}/_3)$	X	73. 8—74. 49	74. 25	73. 5	(4)

Solo le facce alterne (avendo un diverso sviluppo le contigue) forniscono immagini semplici: queste furono utilizzate negli spigoli che esse formano con i due romboedri R, $-{}^1/_2$R.

Combinazioni a 4 forme.

Sembra che siano assai rare, non avendone osservato alcuna. Così pure non si conoscono (all'infuori di una combinazione data dal Levy, V. 138, fig. 99), combinazioni con un maggior numero di forme spettanti a questo tipo.

Tipo IV.

È il tipo il più abbondante riguardo al numero delle combinazioni: a queste serve di sostegno un piccolo numero di romboedri cioè —2R, 4R più di frequente: più di rado R, $-{}^3/_2$R, $-{}^{13}/_8$R: all'infuori di queste forme è raro che se ne osservino altre predominanti. La faccia —2R quando serva di sostegno presentasi costantemente con facce arrotondate, scabre, talora pure lisce e lucentissime: la faccia 4R all'incontro è sempre piana lucente, e sempre appartenente alla formazione più giovane; mentre nelle combinazioni in cui predomina —2R, appartenente alla formazione più antica, sono i cristalli giallastri assai grossi, ineguali nella superficie delle loro facce men ricchi di faccette. È degno di rimarco il fatto che ad onta della frequenza dei due citati romboedri, e del loro sviluppo prevalente, mancano quasi totalmente, scalenoedri appartenenti alla zona degli spigoli laterali dei romboedri stessi, che pure sono frequenti nella calcite d'altre località, come Derbyshire, Agaete Gran Canaria ecc. Come nel tipo II predominano anche qui le combinazioni a 3 forme.

Forme isolate.

R. S'incontrano, sebbene non di frequente dei romboedri isolati R per lo più assai grossi con facce piane, ma non lucenti, quasi appannate: spesso vi si può riconoscere indizio di scalenoedri appartenenti alla zona principale, per uno smussamento negli spigoli laterali, affatto analogamente a ciò che interviene pei romboedri così detti primitivi della calcite di Porretta ove altresì gli spigoli culminanti sono modificati da faccette di scalenoedro spettante sempre alla stessa zona principale. Rari invero vengono a giorno ad Andreasberg dei veri e genuini romboedri R, poichè essi servono piuttosto come di nucleo ad altra sostanza calcitica, la quale addossandovisi, non mantiene l'antica forma aumentandone il volume, ma dà luogo per lo più a scalenoedri ottusi con facce striate secondo l'asse della zona principale, e arrotondate nel loro complesso tanto da rendere impossibile la loro determinazione. Il nucleo romboedrico interno in tal caso si fa manifesto per una certa colorazione azzurro-rossastra che assume, a differenza della sostanza susseguentemente depositata

che è trasparente: e questa in qualche caso si depositò parzialmente, lasciando allo scoperto alcuna faccia del romboedro R.

—R. Si distingue sotto ogni rapporto dalla forma precedente: suol presentarsi in cristalli assai più piccoli giallastri, semiopachi con facce scabre. Riposano costantemente sulla roccia verde, e si dimostrano appartenere alla formazione la più antica. In tutti gli esemplari esaminati si notò sempre la stessa provenienza dalla miniera *Felicitas*. Fu constatata questa forma semplice per mezzo dei rapporti che essa ha col romboedro di sfaldatura nonchè per misure approssimative.

Le altre forme che si trovano isolate sono —2R, —$^{11}/_{7}$R,4R.

Combinazioni a due forme.

Sono per lo più prismi, e romboedri più ottusi che si associano ai romboedri predominanti; in 2 soli casi si ebbero scalenoedri. Le combinazioni più frequenti sono date dall'unione —2R, ∞R ed —2R, R.

N° 47. (Museo universitario Berlino).

Piccoli cristallini giallastri, altezza sull'asse principale 4^{mm} circa.

Comb. — $^{5}/_{4}$R, ∞R.

App. delle facce.

Le faccette —$^{5}/_{4}$R sono arrotondate, e con rigonfiamenti: mentre le faccette ∞R sono assai piane e limpide.

Combinazioni a 3 forme.

Sono assai comuni. Pochi scalenoedri vi prendono parte, e fra questi per lo più quelli appartenenti alla zona principale.

N° 48.

Combinazione non molto frequente nonostante la semplicità dei simboli. Sono piccoli cristalli cerulei, trasparenti impiantati sull'impasto detritico comune.

Comb. R,—$^{1}/_{2}$R,4R.

La forma R ha facce un poco appannate; le altre coi caratteri loro proprî.

N° 49. Fig. 16, tav. III. (Museo di Hannover).

Cristalli uniformi, cerulei, trasparenti aggruppati a pila, impiantati su calcare spatico.

Comb. R,R16, ∞R.

App. delle facce.

R con faccette piane e lucenti in qualche caso leggermente punteggiate molto sviluppate: lucentissime le faccette scalenoedriche R16 hanno un vario sviluppo, e apparisce chiaro che esse sono dovute ad un secondo periodo di formazione, avvenuto intorno al romboedro ∞R assai ristretto nelle sue faccette, pure lucentissime. Lo scalenoedro non fu fin qui osservato: si riscontrò esattamente in varî individui che questa forma apparteneva alla zona principale.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R 16	X	63°.38′— 63°.58′	63°.48′	63°.52′	(2)
	Y	55. 30 — 55. 53	55. 47	55. 39	(3)
	Z	9. 11 — 9. 23	9. 18	9. 19 ½	(5)

N° 50.

Cristalli di piccole dimensioni dotati di lucentezza vitrea: riposano sull'impasto detritico quarzoso.

Comb. —$^9/_5$R,—$^{13}/_9$R,OR.

I due romboedri hanno uguale estensione ed apparenza: la base molto estesa, è madreperlacea biancastra.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
—$^9/_5$ R:R ($\bar{9}$095:10$\bar{1}$1)	105°.20′— 105°. 5′	105°. 8′	105°.13′½	(3)
—$^9/_5$R ⦃ X	97. 50 — 98. 6	98. 3	97. 59	(3)
—$^{13}/_9$ R:R ($\bar{13}$ 0 13 9:10$\bar{1}$1)	99. 2 — 99. 27	99. 19	99. 13	(3)
—$^{13}/_9$R ⦃ X	88. — 88. 38	88. 19	88. 17	(3)

N° 51. Fig. 17, tav. III. (Museo mineralogico Clausthal).

Piccoli e nitidi cristalli vitrei trasparenti, che riposano sulla roccia schistosa, assai impiantati.

Comb. —2R,OR,—$^4/_5$R2.

App. delle facce.

—2R con facce lucentissime, assai piane: la base OR assai sviluppata specialmente nei cristalli di maggiori dimensioni: mostrasi scabra e punteggiata eccetto per tre piccole aree triangolari situate in corrispondenza degli spigoli culminanti del romboedro fondamentale. La nuova forma —$^4/_5$R2, apparisce con facce ristrette e lucenti che smussano gli stessi spigoli culminanti del romboedro, ed entrando conseguentemente a far parte di una zona che per la calcite di questo giacimento suole comprendere varie altre forme: essa zona fu constatata esattamente in 2 cristalli.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
—$^4/_5$R 2 ⦃ Y	22°.50′— 23°.40′	23°. 2′	22°.40′	(3)
—$^4/_5$R2:—2R (2685:02$\bar{2}$1)	14. 10 — 14. 13	14. 11½	14. 16	(2)
—$^4/_5$R2:R (26$\bar{8}$5:10$\bar{1}$1)	35. 54 — 36. 8	36. 1	36. 8	(4)

N° 52.

Cristalli assai grossi irregolari leggermente opalescenti: impiantati su quarzo frantumato, detritico.

Comb. —2R, 4R, R13.

I due romboedri hanno nelle loro facce i caratteri proprî a ciascuno: lo scalenoedro R13 presentasi irregolarmente sviluppato e molto striato.

N° 53. Fig. 18, tav. III.

Cristalli raccolti in drusa nettissimi, lucenti, completamente trasparenti, lunghi circa 4^{mm} sull'asse principale. Colla lente riconosconsi sulle faccette delle piccole figure a contorni variabili, prodotte forse da corrosione; non vi si riconosce relazione alcuna fra i contorni delle medesime e gli elementi del cristallo.

Comb. —2R, 4R, —$^{12}/_5$R.

App. delle facce.

Le tre forme hanno identico aspetto ed uguale estensione: le facce del nuovo romboedro rendono peraltro immagini un poco slargate: di qui la non perfetta concordanza dei valori calcolati coi misurati.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$-2R : -{}^{12}/_5R$ $(02\bar{2}1 : 0\,12\,\bar{1}\bar{2}\,5)$	3°.54′— 4°. 7′	3°.56′	3°.54′	(6)
$-{}^{12}/_5R$ } X	105. 23 — 106. 12	105. 38	105. 44	(4)

Furono misurati due cristalli di dimensioni identiche. Zippe fa menzione di questo romboedro, in connessione con lo scalenoedro $R^{19}/_{15}$, osservato in cristalli provenienti da Freiberg.

N° 54. (Museo universitario Berlino).

Cristalli assai piccoli, associati ad altri più grossi, con identiche forme, ma diversamente sviluppati, onde spettano ad altro tipo; leggermente azzurrognoli, impiantati su quarzo frantumato ecc.

Comb. 4R, ∞P2, R9.

Ben caratterizzato, il romboedro fondamentale: striato come sempre il prisma ∞P2, che passa gradatamente arrotondandosi a scalenoedri acuti; fra questi il limite massimo è indicato da R9, rende immagini costanti e semplici.

N° 55. (Museo mineralogico Clausthal).

Come quelli del numero precedente quanto all'aspetto generale. In cambio del prisma ∞P2, è presente qui lo scalenoedro acuto $R^{13}/_3$ che passa gradatamente allo scalenoedro R3, che si appalesa per lo smussamento colle sue faccette degli spigoli culminanti del romboedro fondamentale. Questi due scalenoedri della zona principale possono considerarsi come i limiti di una serie di altrettanti scalenoedri spettanti alla stessa zona.

N° 56. (Museo del Collegio di Francia, Parigi).

Questi cristalli riuniti in gruppo fanno parte dell'antica collezione del conte di Bournon. Hanno l'aspetto identico a quello precedentemente descritto nei due numeri 54. 55: l'unica differenza sta in ciò che il limite inferiore della serie degli scalenoedri è data da R7, onde ne risulta la combinazione 4R, R7, R3.

Combinazioni a 4 forme.

Sono assai frequenti. Come sostegno alle varie combinazioni prendono parte i due romboedri —2R, 4R, più spesso il primo del secondo. La maggior parte delle combinazioni che seguono sono determinabili per mezzo delle zone.

N° 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64.

Combinazioni frequenti, offerte da cristalli di poco variabile aspetto provenienti per la maggior parte dalla miniera Sanson: appartenenti alla formazione più recente. Le facce conservano i caratteri loro particolari. I cristalli risiedono sull'impasto detritico quarzoso già mentovato, con particelle di solfuri metallici prevalentemente galena e calcopirite.

Combinazioni a 5 forme.

Non sono molto comuni; vi si associano come sostegno i due summenzionati romboedri.

N° 65. (Museo mineralogico Clausthal).

Grossi cristalli di un color giallo-miele subtrasparente, impiantati sulla roccia schistosa: hanno dimensioni variabili.

Comb. $-2R, R3, -{}^1/_2R, -{}^1/_5R7, {}^1/_3R^7/_3$.

App. delle facce.

Il romboedro predominante ha facce scabre sebbene lucenti, arrotondate. Lo scalenoedro negativo ha facce leggermente curve, normalmente agli spigoli culminanti ottusi. Gli spigoli culminanti acuti sono troncati dal romboedro di sfaldatura. Striate come sempre si presentano le faccette $R3, {}^1/_3R^7/_3, -{}^1/_2R$.

N° 66. (Museo universitario Strasburgo).

Cristalli piccoli e netti, trasparentissimi, vitrei.

Comb. $-2R, R, \infty P2, -{}^1/_2R, 0R$.

Le faccette hanno l'apparenza loro particolare già altrove descritta.

N° 67. (Museo universitario Berlino).

Cristalli nettissimi, che sembrano assai comuni avendoli osservati anche in altre collezioni, però senza indicazione precisa della miniera da cui provenivano.

Comb. $4R, R, \infty R, R7, R4, R3$.

Le faccette romboedriche sono limpide e piane, R ha sviluppo vario. Gli scalenoedri appartengano tutti alla zona principale, ma striati come sempre.

Combinazioni con un maggior numero di forme di quelle precedentemente descritte sono date dagli autori (v. Quadro I).

Tipo V.

Meno frequente di tutti gli altri. Il romboedro ottuso che lo caratterizza è quasi sempre $-{}^1/_2R$, nè fu dato osservarne altri, quantunque se ne trovi indizio negli autori. In un sol caso si verificò che il predetto romboedro portava facce piane regolari: poichè sono costantemente striate nel senso più volte accennato, e più o meno incurvate accennando in tal guisa al passaggio ad uno scalenoedro ottuso della zona principale in cui gli spigoli culminanti acuti sono troncati dallo stesso romboedro $-{}^1/_2R$: per tal ragione suole questo tipo passare di preferenza al tipo VI caratterizzato dal predominio d'uno scalenoedro ottuso. Nonostante la rarità di questo tipo per Andreasberg sembra che da lungo tempo siano note cristallizzazioni che molto probabilmente vi si coordinano [1]. Di più è accennato [2] anche all'aggruppamento singolare di romboedri ottusi parallelamente all'asse principale, il quale fatto è comunissimo per calciti egualmente cristallizzate di altre località come Münsterthal (Baden), Freiberg (Sassonia) ecc. Romé de l'Isle accenna al passaggio di questo tipo al II coll'associarvisi del prisma ∞R; ne dà le fig. 567: Hauy fig. 2: v. 2. Levy v. 48, v. 81. Di forme isolate spettanti a questo tipo si conosce solo il romboedro $-{}^1/_2R$. Rare pure le combinazioni a 2, a 3, a 4 forme.

(1) Litoph. Bornem. I, pag. 7. Tav. I, fig. 14. *Spathum calcarium pellucidum album planum suborbicolare, orbiculis hexaedris in apicem triquetrum desinentibus.*

(2) Forster, Catalog. 1780, n. 60. *Groupe de cristaux lenticulaires empilés les uns sur les autres du Hartz.*

N° 68. Fig. 19, tav. III. (Museo mineralogico dell'Università, Strasburgo). Piccolissimi cristalli lucenti, vitrei, lunghi circa 1,5^{mm} larghi 2,5.

Comb. $-\frac{1}{2}R, \frac{8}{11}R^{5}/_{4}, \frac{7}{10}R^{9}/_{7}$, OR.

App. delle facce.

Il romboedro $-\frac{1}{2}R$ che serve di sostegno in questa combinazione, presentasi con facce limpide piane come giammai si osservò per questa località: offre quindi immagini semplici ben distinte costanti di posizione. Anche i due scalenoedri sebbene leggermente striati offrono immagini ben separate. Esattissima fu trovata la zona principale a cui i due scalenoedri appartengono: l'uno di essi il più sviluppato non fu peranco osservato. Nei cristalli misurati mancava affatto la base OR, che era ristrettissima in alcuni più voluminosi.

Valori angolari

Angoli		Limiti	Media	Calcolato	N.
$\frac{8}{11}R^{5}/_{4} : -\frac{1}{2}R =$	$(9\,1\,10\,11 : 01\bar{1}2)$	32°. 1′— 32°. 6′	32°. 4′	32°. 5′	(6)
$\frac{8}{11}R^{5}/_{4}$	} Y	6. 49— 6. 58	6. 53	6. 46	(3)

Furono misurati due piccoli cristalli.

Tipo VI.

Questo tipo è determinato dalla prevalenza d'uno scalenoedro ottuso sulle altre forme. Esso contiene un piccol numero di combinazioni che hanno caratteri spiccatissimi: così i cristalli che vi si riferiscono appartengono sempre alla formazione più giovane, e sono sempre accompagnati da silicati idrati (Armotomo, stilbite, heulandite, apofillite rosea). Inoltre gli scalenoedri prevalenti sono tutti della zona principale, e non già come ha creduto lo Scharff, tutti o quasi tutti identificabili con $\frac{1}{4}R3$: anzi non fu giammai riscontrato che tale forma abbia servito di sostegno: sono sempre striati nel senso più volte indicato, ed associansi nelle loro combinazioni a forme appartenenti alla zona predetta, fra le quali comunissimi R, $-\frac{1}{2}R$; onde col predominare delle medesime, questo tipo passa ai due IV e V. Gli spigoli acuti delle forme predominanti sono arrotondati in varia guisa avvenendo parallelamente ai medesimi la striatura: però essi nella maggior parte dei casi sono troncati dal comune $-\frac{1}{2}R$, ne avviene che giammai si abbiano limiti netti fra questa forma e gli scalenoedri ottusi, mentre invece suole essere netto il passaggio fra i medesimi e il romboedro R. Altro carattere distintivo si è l'assenza quasi assoluta di scalenoedri negativi, e la mancanza della base OR, la quale forma si distingue appunto negli altri tipi per la sua frequenza.

Per le combinazioni date dagli autori e che si coordinano a questo tipo, (v. Quadro I) non si conoscono scalenoedri ottusi isolati; nè combinazioni di due forme.

Combinazioni a 3 forme.

N° 69. (Museo universitario Strasburgo).

Piccoli cristalli lunghi circa 5^{mm} profondamente impiantati su calcare spatico con noduli di blenda: sulle faccette si hanno incavature regolari prodotte da piccoli cristallini prismatici di quarzo: talora essendo essi asportati lasciano sulle facce della calcite un incavo corrispondente alla loro forma.

Comb. $^4/_7R^3/_2$, R3, R4.

Le faccette delle tre forme appariscono tutte egualmente striate: in alcuni individui più grossi, si riconosce altresì nei due scalenoedri acuti una maggiore imperfezione; sono le faccette R3, R4 arrotondate, con strie più profonde.

N° 70. (Museo mineralogico Clausthal).

Nitidi cristalli adamantini aggruppati insieme mantenendo gli assi paralleli.

Comb. $^2/_5R2$, $-^1/_2R$, ∞R.

App. delle facce.

Tanto lo scalenoedro predominante come il romboedro negativo affatto subordinato sono lievemente striati, mentre sono limpide, piane, uniformi, le faccette prismatiche,

N° 71. (Museo mineralogico Halle).

Frammenti di cristalli che stanno molto incastrati nella ganga: sono vitrei, trasparenti.

Comb. $^1/_3R^7/_3$, ∞R, $-2R$.

App. delle facce.

Lo scalenoedro $^1/_3R^7/_3$ esattamente determinato mancando quasi totalmente le strie; ∞ R limpido con facce piane: lucenti pure ma arrotondate le faccette $-$ 2R.

N° 72. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli di dimensioni variabili, per lo più assai grossi, associati a cristalli di quarzo in nitidi e ben finiti cristalli, e galena.

Comb. $7/_{10}R^9/_7$, $^4/_5R^7/_6$, $R^3/_2$. Sebbene le faccette tutte siano striate, pure si mantengono ben distinti i limiti rispettivi.

N° 73. (Museo mineralogico Strasburgo).

Nitidi e piccoli cristalli su calcite spatica, trasparenti, leggermente colorati in violetto.

Comb. $^4/_7R^3/_2$, $R^5/_3$, 28R. I due scalenoedri leggermente striati: il romboedro 28R, ha facce rotondeggianti, e striate parallelamente agli spigoli di combinazione con R.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
28R:R $(28\,0\,\overline{28}\,1:10\overline{1}1)$	43°.10′— 43°.26′	43°.16′	43°.19′½	(3)

Furono misurati due piccoli cristalli.

N° 74. (Museo mineralogico Strasburgo).

Cristalli assai uniformi di dimensioni, lunghi sull'asse principale circa 3,5mm, cerulei, leggermente opalescenti.

Comb. $^5/_{11}R^9/_5$, ∞ R, $R^5/_3$. Le faccette hanno aspetto identico che al numero precedente: è meno sviluppato lo scalenoedro $R^5/_3$.

Combinazioni a 4 forme. Se ne conosce solo una indicata da Zippe (v. Quadro I).

Combinazioni a 5 forme.

Sono meno rare che le precedenti, associate a forme romboedriche e scalenoedriche ordinariamente poco comuni a riscontrarsi.

N° 75. Fig. 28, tav. III. (Museo mineralogico Strasburgo).

Piccoli cristallini provenienti da una geode in cui si trovavano unitamente ad

altri più voluminosi dati dal romboedro $-2R$. Quelli misurati hanno sull'asse principale circa 2,5^{mm} di altezza e sono completamente conformati alla loro estremità libera.

Comb. $\frac{1}{3}R\frac{7}{3}, -\frac{1}{2}R, \infty R, -R2, -\frac{8}{7}R$.

App. delle facce.

Lo scalenoedro dominante porta lievi strie e passa insensibilmente a $-\frac{1}{2}R$: il prisma ∞R presenta degli avvallamenti dovuti ad una seconda formazione, che riuscì a forme identiche a quelle che costituiscono il nucleo. La stessa apparenza ha il romboedro $-\frac{8}{7}R$. Lo scalenoedro $-R2$ ha faccette assai curve, e lucenti: stando ai valori ottenuti per un cristallo si giungerebbe al simbolo poco semplice $-\frac{15}{14}R2$. Un altro cristallo condurrebbe ad ammettere invece a $-R\frac{17}{8}$. Avendo osservato la forma scalenoedrica ammessa con portamento analogo, ma migliori riflessi, in una combinazione appartenente al tipo II, stante la vicinanza dei simboli precedentemente accennati non si esitò ad identificarla con quella, tanto più che i valori angolari erano molto vicini.

N° 76. (Museo mineralogico Strasburgo).

Cristalli variabili di dimensioni, colorati in violetto chiaro; sembra a prima vista che appartengano al tipo romboedrico medio: poggiano su calcare spatico, mantenendo una quasi perfetta orientazione degli assi. Le faccette sono ugualmente sviluppate.

Comb. $\frac{4}{7}R\frac{3}{2}, \infty P_2, 4R, R, R\frac{11}{3}$. Le faccette scalenoedriche sono striate: limpide le faccette prismatiche, e romboedriche. Si distinguono sovra le altre le faccette scalenoedriche $R\frac{11}{3}$ per essere opache e leggermente punteggiate.

N° 77. (Museo mineralogico Clausthal).

Piccoli cristalli, vitrei, trasparentissimi che riposano direttamente, in gruppo senza essere molto impiantati, sulla roccia schistosa verdastra.

Comb. $\frac{2}{5}R2, \frac{1}{3}R\frac{7}{3}, -R\frac{5}{3}, -\frac{9}{5}R, \infty R$.

App. delle facce.

I due scalenoedri positivi hanno facce limpide e striate: queste due forme trapassano insensibilmente l'una nell'altra: leggermente arrotondate, e molto lucenti le faccette $-R\frac{5}{3}$ che sono assai sviluppate. Il romboedro $-\frac{9}{5}R$ fu osservato in altra combinazione: quivi ha faccette assai sviluppate e lucenti.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$\infty R : -\frac{9}{5}R\ (10\bar{1}0 : 09\bar{9}5)$	29°.14′ — 29°.38′	29°.25′	29°.23′	(6)

Furono misurati 3 cristalli.

Combinazioni a 6 forme.

N° 78. Fig. 27, tav. III. (Museo mineralogico Clausthal).

Nitidi cristalli, accompagnati da zeoliti, molto lucenti, assai piccoli, quasi tutti uguali fra di loro: sviluppo delle facce identico in ogni parte del cristallo.

Comb. $\frac{1}{2}R\frac{5}{3}, R\frac{12}{7}, R7, 28R, R, -\frac{1}{2}R$.

App. delle facce.

Sono leggermente striate le faccette degli scalenoedri appartenenti alla zona principale senza che ne derivi un considerevole allargamento delle immagini. Invece del prisma, si ha un romboedro acutissimo che non ha facce assolutamente nitide e piane.

Fu misurato lo spigolo di combinazione, fra queste facce e il romboedro di sfaldatura, e si ebbero valori assai concordanti che conducono al simbolo 28 R già trovato in altra combinazione. Limpido sebbene ristretto il romboedro R, striato come sempre $-\frac{1}{2}R$. Anche lo scalenoedro $R^{12}/_{7}$ non fu per anco osservato.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$28R:R\,(28\,0\,\overline{28}\,1:10\overline{1}1)$	43°.13′—43°.22′	43°.16′	43°.19′½	(5)
$R^{12}/_{7}$ Y	18.54—19.4	19.1	19.4	(4)
$R^{12}/_{7}:R\,(19\,5\,\overline{24}\,14:10\overline{1}1)$	15.3—15.21	15.11	15.16	(3)

Furono misurati 3 cristalli.

N° 79. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli analoghi a quelli del numero precedente per dimensioni, e lucentezza, e minerali concomitanti.

Comb. $\frac{1}{2}R\,^{5}/_{3}$, $R^{3}/_{2}$, $-\frac{8}{7}R\,2$, $4R$, ∞R, $-\frac{8}{7}R$. Striate le forme scalenoedriche della zona principale: leggermente curve, e assai lucenti le forme negative: piane ed uniformi le rimanenti.

N° 80. (Museo universitario Strasburgo).

Piccoli cristallini opalescenti aggruppati a pila.

Comb. $\frac{4}{7}R^{3}/_{2}$, $\frac{1}{2}R^{5}/_{3}$, $R^{5}/_{3}$, $R\,11$, ∞R, $4R$. Striate le faccette scalenoedriche, piane ed uniformi di superficie le rimanenti.

Combinazioni a 7 forme.

N° 81.

Cristalli assai grossi impiantati su quarzo frantumato: limpidi, trasparenti: i più piccoli di essi sono allineati l'uno sovra l'altro secondo l'asse principale.

Comb. $\frac{2}{5}R\,2$, $-2R\,2$, $4R$, ∞R, $-2R$, $-\frac{8}{7}R$, $R\,3$. Le faccette dello scalenoedro negativo sono assai sviluppate e rotondeggianti: il prisma ∞R mostrasi trasversalmente solcato da strie profonde, date dalla ripetuta alternanza delle due forme ∞R, $4R$. Le altre forme coi caratteri loro particolari.

Combinazioni a 8 forme.

N° 82. Fig. 29, tav. III.

Nitidi cristallini accompagnati da apofillite rosea in cristalli piramidali perfetti: lunghi sull'asse circa 3mm, vitrei, molto incastrati nella ganga.

Comb. $\frac{2}{5}R\,2$, $R^{3}/_{2}$, R, $-\frac{4}{3}R^{5}/_{3}$, $-2R$, ∞R, $-\frac{1}{2}R$, $4R$. Gli scalenoedri della zona principale leggermente striati come il romboedro $-\frac{1}{2}R$: le altre forme con facce nitide, ad eccezione di quella data dal nuovo scalenoedro $-\frac{4}{3}R^{5}/_{3}$ che ha facce lievemente avvallate, che nonostante danno immagini utilizzabili, che si mostrano in zona coi due romboedri $4R$, $-2R$, in modo che questo ultimo tronca gli spigoli acuti del nuovo scalenoedro.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$-\frac{4}{3}R^{5}/_{3}$ } Y	19°.25′—19°.58′	19°.42′	19°.31′	(4)
$4R-\frac{4}{3}R^{5}/_{3}\,(404\overline{1}:4\,16\,\overline{20}\,9)$	47.12—47.28	47.22	47.20	(8)
$R:-\frac{4}{3}R^{5}/_{3}\,(10\overline{1}1:4\,16\,\overline{20}\,9)$	42.36—43	42.45	43.19	(3)

Furono misurati due cristalli incompleti.

Tipo VII.

A questo tipo appartengono varie combinazioni, sebbene esso non sia caratteristico per la nostra località. Offre caratteri ben distinti essendo bene circoscritto dalle due forme scalenoedriche comuni R 3, R 5, le quali come giustamente osserva Scharff passano gradatamente l'una nell'altra, offrono però limiti ben definiti rispetto agli scalenoedri più ottusi e più acuti della stessa zona, rari gli scalenoedri negativi predominanti, e per lo più con facce assai curve. Offre combinazioni assai complicate. Non se ne trovano notizie negli autori anteriori ad Hauy talchè sembra evidente, che il ritrovamento di simili esemplari sia di data relativamente recente. Oltre ad Hauy si ha che altre combinazioni sono riportate da Hausmann, Mohs ecc.

Forme isolate.

R 3. La maggior parte di questi esemplari provengono dalla miniera Sanson, ed hanno allora facce semiopache, un color giallastro quasi sempre irregolari, con molta probabilità, spettano al più antico periodo di formazione. Dalla miniera Guade Gottes provengono anche tali scalenoedri isolati associati a quarzo in grossi e ben definiti cristalli: tali scalenoedri hanno allora maggiore lucentezza, e non sono completamente trasparenti, e sembrano appartenere al 2° periodo di formazione.

$-{}^{8}/_{7}R\,2$.

Osservato isolato una sola volta: con facce arrotondate, lucenti, in cristalli vitrei, trasparenti: determinato approssimativamente.

Combinazioni a 2 forme.

Sono sempre scalenoedri comuni cioè R 3, R 4, R 5 che si associano a romboedri positivi, o al prisma ∞ R.

N° 83. Fig. 20, tav. III. (Museo dell'Instituto tecnico Karlsruhe).

Cristalli di varia dimensione, associati a quarzo in grossi cristalli.

Comb. R 3, ${}^{3}/_{5}R^{13}/_{9}$.

App. delle facce.

Ambedue questi scalenoedri appartengono alla zona principale, quindi le loro faccette sono un poco striate: assai meno quelle dello scalenoedro ottuso non per anco osservato nella calcite. Furono misurati 3 piccoli cristalli.

Valori angolari

Angoli		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
${}^{3}/_{5}R^{13}/_{9}$	X	58°.44′ — 58°.32′	58°.39′	58°.38	(6)
	Y	10. 22 — 10. 38	10. 27	10. 13	(3)
${}^{3}/_{5}R^{13}/_{9}:R\ (11\ 2\ \overline{13}\ 15 : 10\ \overline{1}\ 1)$		8. 12 — 8. 20	8. 16	8. 18	(2)

Le altre combinazioni di due forme indicate nel Quadro I non furono determinate al goniometro a riflessione, e sono così comuni da non offrire interesse la loro particolareggiata descrizione.

Combinazioni a 3 forme.

Sono assai frequenti: le forme che servono da sostegno sono date anche qui da scalenoedri per la maggior parte appartenenti alla zona principale.

N° 84. Fig. 22, tav. III. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli piccoli e netti, assai profondamente impiantati sopra roccia schistosa verdastra, a guisa di sottile crosta: sopra le facce assai slargate del romboedro negativo stanno disseminati dei piccoli cristallini lucentissimi di pirite.

Comb. — $^5/_6 R ^9/_5$, — $^1/_2 R$, — 2 R, Lo scalenoedro dominante ha facce lucenti e assai curve, onde si hanno molteplici immagini; nei cristalli più piccoli essendo minore la curvatura, si ebbero valori compresi fra limiti più vicini. Le faccette — $^1/_2 R$ con facce striate grossolanamente: il romboedro — 2 R ha facce assai arrotondate.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$-^5/_6 R ^9/_5$ X	72°.12′— 72°.58′	72°.43′	72°.52′	(4)
$-2R:-^5/_6R^9/_5=(02\bar{2}1:27\bar{9}6)$	14 — 14. 35	14. 22	14. 13	(3)
$R:-^5/_6R^9/_5=(10\bar{1}1:27\bar{9}6)$	36. 6 — 36. 49	36. 37	36. 57	(3)

Furono misurati due piccoli cristalli.

N° 85. Fig. 23, tav. III. (Museo mineralogico Clausthal).

Grossi cristalli giallastri irregolari ove predomina uno scalenoedro: riposano sulla roccia verde; da cui emergono solo per una piccola porzione.

Comb. $-^7/_6 R ^{20}/_7$, — 2 R, — $^1/_2 R$. Lo scalenoedro predominante ha faccette scabre e rotondeggianti, e solo in vicinanza del romboedro negativo, esse sono piane e forniscono immagini semplici. I cristalli sono incompleti, e misure attendibili possono soltanto ottenersi dalle incidenze delle faccette scalenoedriche con la faccetta di sfaldatura e il romboedro — 2 R. Nonostante che l'accordo fra i valori angolari misurati e calcolati sia sufficiente a farci ammettere l'esistenza di questa nuova forma, pure sarebbe desiderabile instituire nuove misurazioni sopra altro materiale. Le faccette del romboedro — 2 R sono nitide e piane, danno riflessi semplici, e non è difficile che tale raro modo di presentarsi sia dovuto a seconda formazione.

Il remboedro — $^1/_2 R$ grossolanamente striato e non lucente.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
$-^7/_6R^{20}/_7$: R $(10\bar{1}1:13\,27\,\bar{40}\,14)$	43°. 7′— 43°.17′	43°.12′	43°. 8′	(4)
$-^7/_6R^{20}/_7$: —2R $(02\bar{2}1:13\,27\,\bar{40}\,14)$	18. 46 — 18. 55	18. 49	18. 48	(4)

Furono misurati i 2 soli frammenti che si avevano a disposizione.

N° 86. Fig. 24, tav. III. (Museo mineralogico universitario Strasburgo).

Piccoli cristalli vitrei, trasparenti, appuntati, lunghi sull'asse circa 5,5^{mm}, riposano su calcite spatica.

Comb. — 2 $R ^3/_2$, R 4, ∞ R.

App. delle facce.

Domina lo scalenoedro negativo con facce piane e lucenti, in alcuni individui più grossi mostrasi leggermente punteggiato. Tale forma sembra non essere ancora stata osservata ad Andreasberg; e come risulta dalla proiezione essa cade nella zona R 4, ∞ P_2 $(21\bar{1}0,53\bar{8}2)$: questa zona apparisce esattissima nei varî cristalli esaminati, e porta alla conseguenza che gli spigoli culminanti ottusi del nuovo scalenoedro, e quelli culminanti acuti dello scalenoedro positivo abbiano l'identica inclinazione

sull' asse principale. Leggermente striate le faccette spettanti a R4; lucenti e con avvallature e rilievi le faccette ∞ R.

Valori angolari

Angoli		Limiti	Media	Calcolato	N.
$-2R^3/_2$	X	94°.44′— 93°.34′	94°. 2′	93°.54′	(6)
	Y	17. 2 — 16. 20	16. 45	16. 48 ½	(6)
$-2R^3/_2$: R $(15\bar{6}2:10\bar{1}1)$		18.46	18. 46		(1)

Furono misurati 3 diversi cristalli.

N° 87. Da varie miniere di Andreasberg, e più specialmente dalla miniera Sanson provengono alcune cristallizzazioni poco perfette, date da R3, 4R, —2R, questi cristalli ben di rado si prestano ad una esatta determinazione goniometrica.

N° 88. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli assai grossi, lunghi circa 10^{mm}, impiantati su calcare compatto, subtrasparenti e leggermente opalini.

Comb. R4, ∞ R, 2R3.

App. delle facce.

Lo scalenoedro dominante è molto striato specialmente in vicinanza degli spigoli laterali, talchè può dirsi che sia il limite snperiore di una serie di scalenoedri appartenenti alla stessa zona, e più acuti di questo. Lo scalenoedro negativo è poco sviluppato ed alquanto arrotondato. Limpide le faccette ∞ R.

N° 89. (Museo universitario Berlino).

Cristalli con dimensioni identiche a quelle del numero precedente: sono però più lucenti; riposano su calcare spatico da cui emergono per un terzo circa della loro lunghezza.

Comb. R5, 4R, $-^{11}/_4$R.

App. delle facce.

Sono poco uniformi; lo scalenoedro è striato; i romboedri mostrano rilievi nelle loro facce.

Combinazioni a 4 forme.

Identiche alle precedenti combinazioni, quanto ai caratteri generali; vi si distingue per la sua frequenza, lo scalenoedro comune R5.

N° 90. (Museo mineralogico Halle).

Cristalli assai grossi, lunghi circa 10^{mm} impiantati su calcite spatica, non completamente trasparenti, ma leggermente opachi biancastri.

Comb. $-R^7/_3$, ∞ R, R9, 4R.

App. delle facce.

Lo scalenoedro dominante ha facce limpide, piane, lucenti, in qualche esemplare, leggermente striate parallelamente agli spigoli di combinazione di questa faccia con il prisma ∞ R, il quale presentasi in medio sviluppo con facce lucentissime sebbene non assolutamente piane accennando al passaggio di uno scalenoedro negativo molto acuto; leggermente striato ma ben definito lo scalenoedro R9: limpido con facce piane il romboedro R.

N° 91. (Museo mineralogico universitario Strasburgo).

Piccoli cristalli di circa 6 mm. di altezza sull'asse principale; leggermente rosei, frammisti ad altri più grossi apparentemente identici, non misurabili per imperfezione delle loro faccette: si trovano commisti, o meglio adagiati, su cristalli assai grossi di quarzo unitamente a blenda in noduli e arnioni giallo-bruni.

Comb. $R\,{}^{13}/_{3}$, $R\,3$, ${}^{5}/_{11}\,R\,{}^{9}/_{5}$, $4\,R$.

App. delle facce.

Lo scalenoedro dominante e la forma R 3 hanno facce assai striate, più profondamente verso gli spigoli laterali: lo scalenoedro ottuso invece ha facce nettissime come il romboedro 4 R.

N° 92. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli analoghi sotto ogni rapporto ai precedenti: può osservarsi di più in alcuni una certa inuguaglianza di sviluppo nelle varie facce scalenoedriche.

Comb. $R\,4$, $R\,3$, ${}^{5}/_{11}\,R\,{}^{9}/_{5} - {}^{1}/_{2}\,R$.

App. delle facce.

Come il numero precedente; il romboedro negativo è poco sviluppato e leggermente striato: è degno di nota lo scalenoedro ${}^{5}/_{11}\,R\,{}^{9}/_{5}$ che si presenta anche qui con facce nettissime come raramente interviene per le forme scalenoedriche di questa zona.

N° 93. (Museo universitario Berlino).

Cristalli piccolissimi, poco più di un grano di miglio: con facce lucenti, assai curve.

Comb. $R\,5$, $4\,R$, $-{}^{5}/_{4}\,R\,{}^{7}/_{5}$, $0\,R$.

App. delle facce.

Sono molto curve le faccette dello scalenoedro predominante, assai nette le altre, opaca la base 0 R.

N° 94. (Museo universitario Halle).

Cristalli poco dissimili dai precedenti.

Comb. $R\,5$, $R\,4$, $4\,R$, $\infty\,R$.

App. delle facce.

Gli scalenoedri positivi con facce striate, limpide e nette le rimanenti.

N° 95. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli vitrei, trasparenti, lunghi sull'asse principale circa 9^{mm} riposano sulla ganga comune, con quarzo frantumato, detriti di solfuri metallici ecc.

Comb. $R\,5$, $4\,R$, $-{}^{7}/_{2}\,R$, $0\,R$.

App. delle facce.

Lo scalenoedro R 5 ha facce nette sebbene striate: i due romboedri, troncano con facce piane e lucenti gli spigoli culminanti del predetto romboedro. Base opaca.

Combinazioni a 5 forme.

Oltre agli scalenoedri della zona principale, vi prendono parte anche scalenoedri negativi.

N° 96. Fig. 25, tav. III. (Museo mineralogico Clausthal).

Nitidi cristalli completamente conformati lunghi circa 6^{mm} sull' asse principale, trasparentissimi e lucenti, e riposano direttamente sulla roccia schistosa verdastra.

Comb. $-{}^{6}/_{5}\,R\,{}^{5}/_{3}$, $0\,R$, $4\,R$, $\infty\,R$, $-{}^{1}/_{2}\,R$.

A differenza degli altri scalenoedri negativi si hanno qui facce nettissime, con immagini riflesse semplici per lo scalenoedro predominante; nitide pure e ristrettissime sono le due 4 R, ∞ R: striate e opache le faccette $-{}^{1}/_{2}\,R$; scabra e opaca la base.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calc.	N.
$-{}^6/_5 R^5/_3$	X	82°.20′— 82°.27′	82°.25′½	82°.48′	(4)
	Y	19 — 19. 11	19. 8	19. 2	(3)
	Z	111. 27 — 111. 37	111. 33	111. 32	(3)
$-{}^6/_5 R^5/_3 : 4R = (2\,8\,\overline{10}\,5 : 40\overline{4}1)$		43. 32 — 43. 40	43. 36	43. 38	(2)

Furono misurati due cristalli.

N° 97. Fig. 21, tav. III. (Museo granducale Karlsruhe).

Trasparenti, vitrei di dimensioni variabili: apparentemente romboedrici, risultano invece da scalenoedri negativi, in cui lo spigolo ottuso culminante consta di pochi gradi.

Comb. — $^7/_6$ R $^{13}/_7$, — $^{27}/_{26}$ R $^{13}/_9$, — 2 R, ∞ R, — $^{11}/_4$ R.

App. delle facce.

Tanto le forme romboedriche che scalenoedriche hanno facce assai curve, sebbene assai lucenti : nè sembra ad ogni modo che i romboedri non abbiano alcun rapporto geometrico colle forme scalenoedriche esistenti. Avuto poi riguardo alla imperfezione delle facce che forniscono immagini multiple, riesce malagevole assegnare un simbolo che consti d'indici più semplici di quelli indicati: e neppure è possibile identificare queste due forme con quelle cognite assai vicine — $^8/_7$ R 2, e $^8/_7$ R $^3/_2$ poichè di troppo ne discordano i valori misurati. Riteniamo dunque i simboli calcolati come approssimati, attendendo migliori resultati dall'esame di materiale meglio conveniente.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calc.	N.
$-{}^7/_6 R^{13}/_7 =$	X	80°.58′— 81°.25′	81°.19′	81°.30′	(4)
	Y	22. 24 — 22. 37	22. 32	22. 35	(4)
	Z	57. 55 — 58. 3	57. 59	57. 52	(2)
$-{}^{27}/_{26} R^{13}/_9 =$	X	79. — 80. 45	79. 57	79. 1	(3)
	Y	12. 59 — 13. 20	13. 12	13. 17	(3)
	Z	48. 30 — 49. 22	49. 2	48. 44	(3)

Combinazioni a 6 forme.

Vi prevalgono le forme negative.

N° 98. (Museo mineralogico Halle).

Cristalli non rari, assai piccoli e lucenti riposano su quarzo frantumato.

Comb. — $^8/_7$ R 2, ∞ R, 4 R, — 2 R, — $^1/_2$ R, — $^6/_5$ R.

Lo scalenaedro dominante ha faccette piane, con immagini semplici: il romboedro — $^6/_5$ R è rappresentato da una sottile striscia lucente compresa fra i due romboedri negativi. Le altre forme coi loro caratteri particolari.

N° 99. (Museo universitario Strasburgo).

Nitidi cristalli lunghi 4^{mm}, larghi 3^{mm}, lucenti, trasparentissimi.

Comb. — $^1/_5$ R 7, — $^8/_7$ R 2, ∞ R, — $^8/_7$ R, — 2 R, — $^4/_3$ R.

App. delle facce.

Gli scalenoedri hanno facce assai curve mentre sono nettissime le faccette romboedriche e prismatiche.

N° 100. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli lunghi circa 12^{mm} impiantati sopra calcare spatico giallastro, misti a grossi cristalli di quarzo biancastro, e corroso. Sono semiopachi, trasparenti verso l'estremità libera.

Comb. R 5, R, $^4/_7$ R $^3/_2$, R $^5/_3$, 4 R, — $^1/_2$ R.

App. delle facce.

La forma dominante ha facce scabre striate, come R $^5/_3$: più uniformi quelle dello scalenoedro ottuso: nettissimi i romboedri positivi.

N° 101. (Museo mineralogico Clausthal).

Analoghi a quelli del numero precedente.

Comb. R $^{13}/_3$, R 5, R, ∞ P 2, 4 R, $^2/_5$ R 2.

App. delle facce.

Idem come il numero precedente.

Combinazioni a 7 forme.

Sono assai rare.

N.° 102. (Museo universitario Berlino).

Analoghi a quelli del numero precedente.

Comb. R 5, R 12, 4 R, $^2/_3$ R $^4/_3$, ∞ R, — 11 R, — 9 R.

App. delle facce.

Sono striate le faccette scalenoedriche: subordinate le faccette prismatiche e romboedriche. Il romboedro — 9 R ha piccole faccette triangolari assai piane: in 2 cristalli furono misurati 6 angoli.

Valori angolari

Angoli	Limiti	Medie	Calcolato	N.
∞ R : — 9 R ($01\bar{1}0 : 09\bar{9}1$)	6.° 19′ — 6° 49′	6.° 28′	6.° 26′	(6)

N° 103. (Museo mineralogico Hannover).

Piccoli nitidi cristalli assai comuni: accompagnano grossi esaedri di galena; trasparenti, cerulei.

Comb. R 5, 0 R, 4 R, R 3, ∞ R, — 2R, ∞ P 2.

App. delle facce.

Striati gli scalenoedri e il prisma ∞ P 2: facce limpide e uniformi di superficie nei romboedri, e nel prisma ∞ R: molto sviluppata la base, opaca e scabra.

N° 104. (Museo granducale Karlsruhe).

Unico cristallo isolato bianco-latteo che offre una combinazione assai rara.

Comb. — $^1/_5$R 7, — $^2/_3$R, — R $^7/_3$, — $^5/_4$R, ∞R, — 2R, 0R.

App. delle facce.

Ad eccezione del romboedro — $^1/_2$ R che si presenta scabro, grossolanamente striato, tutte le altre facce offrono riflessi semplici.

Tipo VIII.

È determinato da uno scalenoedro acuto compreso fra i limiti R 5 ∞ P 2. Non vi appartengono molte combinazioni, e queste non sono complicate. Come caratteri particolari e costanti sono da notarsi: 1° che tutte le forme scalenoedriche che servono di sostegno appartengono tutte senza eccezione alla zona principale, e che in tutti

è identica l'apparenza delle facce: 2° che esse sono striate nel senso della zona principale, e più o meno curve, dimodochè pochi cristalli offrono immagini riflesse semplici e costanti di posizione: tale irregolarità rendesi tanto più evidente quanto più gli scalenoedri acuti si avvicinano al limite ∞ P 2: che non si conoscono scalenoedri acuti dominanti negativi.

Forme isolate

Non sono rare: provengono specialmente dalla miniera Jacobsglük: e corrispondono ai simboli R $^{19}/_{3}$, R 7, R 8, R 11, R 13. Di queste la forma scalenoedrica R 8 è nuova.

N° 105. (Museo mineralogico Clausthal).

Sono cristalli biancastri, non completamente trasparenti: lunghi circa 12mm di dimensioni poco variabili. Quantunque si avessero striature, pure si ottenne un'immagine semplice separata, facendo però riflettere la porzione delle faccette situata verso le punte a 6 facce. Tale porzione scevra di strie ben visibile anche ad occhio nudo, sebbene ristretta, rappresenta l'ultimo termine di una serie di scalenoedri più acuti assai vicini fra di loro. I valori trovati sono assai concordi con quelli dati dal calcolo, e conducono ad ammettere la forma R 8 —

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R 8	X	67°.38′— 67°.42′	67°.39′	67°.29′½	(3)
	Y	50. 52 — 51. 22	51. 12	51. 9¾	(3)
R8:R (9 7 $\bar{1}\bar{6}$ 2:10$\bar{1}$1)		42. 53 — 42. 59	42. 57½	43. 20	(6)

Furono misurati 3 piccoli cristalli e dovunque fu riscontrata esattamente la zona per mezzo di faccette romboedriche ottenute per sfaldatura.

N° 106. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli scalenoedrici completamente finiti da ogni parte: le facce finamente striate: i valori ottenuti fanno ritenere che si debba considerare questi scalenoedri corrispondenti a R 13, forma non nota in questa località.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val.calcolato	N.
R 13	X	64°.40′— 64°.48′	64°.44′	64°.49′½	(2)
	Y	54.13	54. 13	54. 40	(1)
R13:R (7 6 $\bar{1}\bar{3}$ 1:10$\bar{1}$1)		57. 32 — 57. 56	57. 47	58. 17	(4)

Furono misurati due cristalli.

Combinazioni a 2 forme.

Sono assai frequenti, sempre rappresentate da scalenoedri della zona principale a cui si uniscono preferibilmente romboedri negativi: in nessun caso fu dato osservare il prisma.

N° 107. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli subtrasparenti biancastri: risiedono su calcare spatico.

Comb. R 7, — 13 R.

Lo scalenoedro dominante ha facce curve e striate; il romboedro — 13 R è qui assai bene sviluppato, e non fu fin qui osservato: fu determinato riferendosi a faccette di sfaldature.

Valori angolari

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
—13R:R ($\overline{13}$ 0 13 1: 10$\overline{1}$1)	130°. 2′— 130°.13′	130°. 8′	130°. 9′	(5)

Cristalli misurati n. 2.

N° 108. (Museo universitario Berlino).

Cristalli completamente conformati, che riposano sulla roccia verde schistosa, non molto trasparenti, leggermente appannati alla superficie.

Comb. R 7, — $^{11}/_{4}$ R.

Lo scalenoedro striato presenta verso la sua estremità libera in corrispondenza degli spigoli culminanti acuti, delle piccole faccettine corrispondenti a —$^{11}/_{4}$ R.

N° 109. (Museo mineralogico Berlino).

Cristalli limpidi ben conformati che riposano su quarzo frantumato.

Comb. R 7, R 11.

Ambedue striati assai profondamente: quindi determinazioni approssimative.

N° 110. Fig. 26, tav. III. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli analoghi a quelli descritti al n. 105. Riposano però sulla roccia schistosa verde.

Comb. R 8, — $^{11}/_{4}$ R.

Per il nuovo scalenoedro R 8 si fecero misure in 3 diversi cristalli, ottenendo valori assai costanti sebbene le faccette mostrassero una finissima striatura.

Valori angolari

		Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R 8	X	67°.38′— 67°.50′	67°.44′	67°.29′$\frac{1}{2}$	(2)
	Y	50. 37 — 51. 22	50. 59$\frac{1}{2}$	51. 9$\frac{3}{4}$	(2)
R:R8 (10$\overline{1}$1:9 7 $\overline{16}$ 2)		42. 55 — 42. 59	42. 58	43. 20	(3)

N.° 111. (Museo universitario Strasburgo).

Hanno l'aspetto generale analogo ai precedenti: riposano su quarzo frantumato.

Comb. R 11, R 17.

Queste due forme non hanno limiti ben netti fra di loro trapassando insensibilmente l'una, nell'altra: quindi la loro determinazione è approssimativa.

Combinazioni a 3 forme.

Se ne trovano di frequente citate dagli autori: quasi sempre vi si associano forme romboedriche con facce sempre nette uniformi, talchè queste cristallizzazioni offrono il loro apice libero ornato di faccette che per la loro nitidezza spiccano sul resto del cristallo.

N° 112. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli impiantati su calcare spatico, trasparenti e lucentissimi verso l' estremità libera loro, nel resto opachi.

Comb. R 9, 4 R — 2 R.

Ad eccezione delle faccette scalenoedriche le altre sogliono essere limpidissime.

N° 113. (Museo provinciale Hannover).

Analoghi a quelli del numero precedente anche nell'apparenza delle facce.

Comb. R 13, 4 R, — 2 R.

Combinazioni a 4 facce.

Sono assai rare.

N° 114. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli molto trasparenti, lucentissimi accompagnati da zeoliti: sembrano di 2ª formazione.

Comb. R 13, 4 R, — 2 R, R.

Per l'app. delle facce, v. numeri precedenti.

Combinazioni appartenenti a questo tipo fornite di un maggior numero di forme sono assolutamente rare.

N° 115. (Museo mineralogico Clausthal).

Cristalli vitrei trasparenti sopra il detrito quarzoso calcareo, lunghi sull'asse circa 5^{mm}.

Comb. R 12, R 5, R 2, $^1/_5\,R\,^{11}/_3$, R, — $^1/_2$ R, ∞ R.

Le faccette scalenoedriche appartenenti come si vede alla zona principale, sono in varia misura striate: molto più profondamente le faccette scalenoedriche delle forme acute, assai meno quelle delle forme più ottuse. Le altre forme hanno facce assai piane. Fra gli scalenoedri è degna di note la forma R 2 che sebbene espressa da simbolo semplice, e nonostante la sua relativa frequenza per altre località, non si trova fin qui indicata per Andreasberg. Anche in questa combinazione non può ammettersi che con approssimazione, stante la oscillazione fra limiti ampî dei valori misurati.

Valori angolari R2 $(3\,1\,\bar{4}\,2)$

	Limiti	Media	Val. calcolato	N.
R:R2 = $(10\bar{1}1:31\bar{4}2)$	18°.32′ — 20°.56′	19°.42′	19°.25′	(6)

Nessun altro degli scalenoedri cogniti della zona principale vi corrisponde meglio che R 2.

CAPO III.

Dei caratteri delle singole forme.

∞R $(10\bar{1}0)$.

È senza dubbio la forma la più frequente. Sopra la irregolarità nelle faccette di questa fornì accuratissime descrizioni e fedeli disegni Scharff (1). Suole presentare una diversa estensione nelle facce contigue, e offre inoltre come carattere costante una maggiore, e talora affatto esclusiva irregolarità nelle facce alterne corrispondenti alla porzione negativa. Tale irregolarità manifestasi più di frequente per mezzo di curvature nelle faccette, più di rado con gibbosità, rilievi e insenature: pare inoltre che tale fatto vada collegato alla presenza di forme romboedriche e scalenoedriche negative, poichè in alcuni esemplari ove tali forme negative mancavano le facce del prisma avevano pressochè un' identica apparenza; e solo sottoponendole

(1) *Ueber den inner.* ecc. 1876.

all'esame goniometrico, poteva riconoscersi una lieve deviazione nel contegno delle immagini. In varî casi poteva distinguersi la tendenza al passaggio ad uno scalenoedro acutissimo negativo. Le facce invece corrispondenti per così dire alla porzione positiva, sono nitide e piane; riflettono immagini semplici; in un solo caso si osservarono facce curve, analoghe a quelle della porzione negativa: tutt'al più, e quando sono presenti romboedri positivi, e fra questi 4R, osservasi una striatura trasversale più o meno grossolana parallela allo spigolo, $\infty R : R$, e che in molti casi può riferirsi all'alternanza ripetuta delle due forme ∞R, 4R: ciò per altro non altera la nettezza e semplicità delle immagini.

Tale irregolarità di sviluppo, Scharff suole riferire alla genesi dei cristalli. Questa forma s'incontra in ogni tipo, più raramente si osserva nei tipi stabiliti V e VIII, che sono determinati da forme acute: nella calcite di Andreasberg è la forma la più frequente. Per questa e per le altre forme semplici che sono molto frequenti non vengono per amore di brevità indicate dettagliatamente le combinazioni in cui si presentano.

$28R = (28\,0\,\bar{2}\bar{8}\,1)$. Combinazione 255, 261.

Questo romboedro acutissimo già noto per altre località, fu osservato in due sole combinazioni (fig. 27, tav. III) assai poco sviluppato con facce lucenti, ma non uniformi di superficie.

$16R\,(16\,0\,\overline{16}\,1)$. Comb. 145.

Scharff dà notizia di questo romboedro, senza indicare i dati su cui fonda tale determinazione. Sembra rarissimo ad Andreasberg. Fu osservato predominante una sola volta (fig. 15, tav. II), con facce poco uniformi di superficie.

$13R\,(13\,0\,\overline{13}\,1)$. Comb. 31, 55, 56, 186, 288.

Constatato de Hauy, Levy, Descloiseaux: in una combinazione spettante al tipo I presentasi con facce ristrette piane, su cristalli biancastri semiopachi.

$10R\,(10\,0\,\overline{10}\,1)$. Comb. 111.

Presentasi con faccette ristrettissime, triangolari limitate dal ∞R e $R^{7}/_{2}$, con immagini assai nette. Fu osservato in 2 soli cristalli.

$5R\,(50\bar{5}1)$. Comb. 335, 351.

Determinato da von Rath con facce non molto estese e che troncano gli spigoli ottusi dello scalenoedro $R^{19}/_{3}$.

$4R\,(40\bar{4}1)$.

È una forma frequentissima. Presentasi costantemente con facce uniformi di superficie e splendenti al sommo grado, giammai curve e striate: assume varia estensione. Nel tipo IV serve bene spesso di sostegno alla combinazione accompagnata specialmente nelle combinazioni complicate da $-2R$, $-{}^{1}/_{2}R$. Questa forma s'incontra in ${}^{1}/_{3}$ circa degli esemplari osservati.

${}^{5}/_{2}R\,(50\bar{5}2)$. Comb. 74, 314, 334.

Nonostante la relazione geometrica di questo romboedro col comune scalenoedro R3 di cui tronca gli spigoli culminanti ottusi non s'incontrò in alcune delle combinazioni studiate, trovandolo solo citato dagli autori.

$R\,(10\bar{1}1)$.

Forma frequente analoga nei caratteri delle sue facce al romboedro 4R dal quale

suole essere accompagnato. Osservasi tal forma isolata, in cristalli biancastri leggermente appannati: serve spesso di nucleo intorno a cui si addossa nuova sostanza calcitica. In combinazione è accompagnata da scalenoedri appartenenti alla zona principale. Di rado presentasi leggermente striato ciò che non altera la nettezza delle immagini. S'incontra preferibilmente nei tipi II, IV, VIII: manca assolutamente nel tipo III. Prende parte per circa $^1/_8$ nelle combinazioni osservate.

OR (0001).

È la forma la più frequente dopo il prisma $\infty R(10\bar{1}0)$: ma non sono rare addirittura le combinazioni che ne sono prive: anzi si osserva a questo riguardo come di rado si associa in combinazione ove dominino scalenoedri e romboedri sì acuti che ottusi, andando a preferenza unito alle combinazioni a tipo prismatico e a romboedro e scalenoedro medio. Manca del tutto laddove predomina uno scalenoedro ottuso. Nonostante può dirsi la forma caratteristica del giacimento. Sulle diverse e molteplici apparenze che essa presenta scrisse prima Hausmann dettagliatamente nel suo manuale (¹); Scharff poi (²) ne fece oggetto di una Memoria speciale. Alla nostra volta si osserverà, come quest'apparenza varii a seconda del tipo in cui si osserva: suole essere bianca opaca lattea nel tipo I: conserva lo stesso carattere nel tipo II laddove raggiunga uno sviluppo intermedio; poichè se invece qui è poco estesa, ha la stessa apparenza che negli altri tipi; è cioè livida opaca, non uniforme di superficie, più o meno punteggiata. In rarissimi casi si osservò nitida con riflessi semplici uniformi, ed allora non è difficile riconoscere nei cristalli due varî periodi di formazione. Scharff riconobbe una maggiore densità nella sostanza lattea calcitica di questa forma e riferisce tale effetto come pure le varie apparenze da lui bene illustrate, non a disturbi provenienti dall'esterno al momento della formazione del cristallo ma sibbene a una predisposizione inerente alle particelle cristalline. Tale giudizio non ci sembra abbastanza convalidato dai risultati dell'osservazione. S'incontra nella proporzione di un poco meno che la metà delle combinazioni osservate.

Romboedri negativi — $^1/_5R\ (01\bar{1}5)$. Comb. 248.

Trovasi citata questa forma da Levy: anche per altre località non avvenne di osservarla in alcuno degli esemplari esaminati.

— $^1/_4R\ (01\bar{1}4)$. Comb. 329. Si ritiene di determinazione incerta, poichè, nè Hausmann, nè Zippe che ne fanno menzione, ricordano la combinazione ove fu osservata, ne forniscono dettagli circa la determinazione. Nel Museo di Bonn si trovano cristalli a tipo scalenoedrico acuto, le cui punte a 6 facce, sono modificate da faccette di romboedro ottuso, che secondo l'etichetta corrispondente, equivarrebbe al nostro; ma l'apparenza delle facce è tale, da renderci dubbiosi sull'esattezza della determinazione.

— $^1/_3R\ (01\bar{1}3)$. Comb. 357. Forma notata da Hausmann: si ritiene dubbiosa, per le stesse ragioni, addotte per la precedente.

— $^3/_{10}R\ (0\ 3\ \bar{3}\ 10)$. Comb. 8, 40, 49.

Questo romboedro fu citato da Bournon in 3 combinazioni, nè fu possibile confermarne l'esistenza.

— $^1/_2R\ (01\bar{1}2)$.

(¹) *Handbuch. der Min.* 2 Aufl. 1847.

(²) Scharff, *Ueber die milchige Trübung auf der Endfläche des sauligen Kalkspath.* N. Jahrbuch für Min. 1860, pag. 535.

È una delle forme le più comuni. Trovasi di preferenza nella calcite di 2ª formazione. Tutti gli autori ricordano la striatura caratteristica di questa faccia, più volte citata in addietro: raramente presenta faccette uniformi di superficie e lucenti: e Scharff allorchè verificò tal fatto lo riferì ad un riempimento dei vacui esistenti, fra le strie avvenute successivamente alla formazione del cristallo; i 2 esemplari da noi osservati non avvalorano tale ipotesi. Tali faccette piane e nitide sebbene rare trovansi ricordate da Lucas (¹) in cristalli accompagnati da galena. Comparisce in ogni tipo quasi sempre subordinato di sviluppo, ed è raro che serva di sostegno alle combinazioni. Si osservò in $^1/_3$ circa delle combinazioni notate.

— $^2/_3$R (02$\bar{2}$3). Comb. 313.

Per l'apparenza delle facce, v. n. 104.

— $^4/_5$R (04$\bar{4}$5). Comb. 250.

Citato da Bournon, senza considerazioni sullo sviluppo ed apparenza delle facce. Si ammette perchè già noto in varie altre località.

— R (01$\bar{1}$1). Comb. 10, 102, 152, 163, 175, 200.

Romboedro frequente: per lo più prende parte a piccolo numero di combinazioni; appartiene alla formazione più antica, e presentasi in tal caso anche isolato con facce scabro-opache. Esclusivo della miniera Felicitas.

— $^8/_7$R (08$\bar{8}$7). Comb. 58, 86, 98, 103, 106, 121, 122, 191, 258, 262, 265, 299, 307.

Forma frequente: poco sviluppata con facce lucenti e leggermente curve, accompagna spesso scalenoedri della zona dei suoi spigoli laterali: assai frequente nei tipi II e IV. Evidentemente per errore di stampa trovasi nella Memoria di Zippe che questo romboedro tronca gli spigoli culminanti ottusi dello scalenoedro — $^2/_5$R7, mentre nella fig. 90, a cui la descrizione si riferisce è giustamente indicato — $^2/_7$R5, che offre precisamente il sueccitato rapporto.

— $^6/_5$R (06$\bar{6}$5). Comb. 105, 127, 306, 308.

Notato da Naumann: è assai raro e suole avere sempre uno sviluppo subordinato.

— $^5/_4$R (05$\bar{5}$4). Comb. 78, 159, 169, 273, 313.

Questa forma fu riscontrata da Hessemberg e da Wimmer; presentasi a sostegno delle combinazioni in piccoli cristalli giallastri le cui facce non sono uniformi.

— $^4/_3$R (04$\bar{4}$3). Comb. 131, 307.

Osservata in due diverse combinazioni: nell'una con facce semiopache e leggermente curve: nell'altra con faccette più nette di superficie e più lucenti.

— $^7/_5$R (07$\bar{7}$5). Comb. 94, 120, 205.

Determinata da Levy in tre combinazioni date in un caso da cristalli opachi: non la s'incontrò in alcuno degli esemplari esaminati.

— $^{13}/_9$R (0 13 $\overline{13}$ 9). Comb. 180.

Nuovo romboedro che presentasi con facce lucentissime, e assai piane in combinazione con altro romboedro negativo: ha le faccette leggermente striate nel senso della diagonale più lunga. v. n. 50.

— $^3/_2$R (03$\bar{3}$2).

Questo romboedro è assai frequente: e per avere gli angoli diedri assai vicini

(¹) Lucas, *Tableau méthodique des expèces minérales*. Paris, 1813. T. II.

a 90°, fu per qualche tempo ritenuto un cubo perfetto, sintantochè Smitson chimico inglese, non ne determinò la vera natura.

Abbonda nel tipo IV e nel tipo II, e spesso serve di sostegno alla combinazione, nè è raro isolato. Le faccette presentansi in varia guisa accidentate alla superficie, con maggiore o minor lucentezza.

— $^{11}/_{7}$R $(0\ 11\ \overline{11}\ 7)$. Comb. 106, 155.

Romboedro osservato da Hessemberg con faccette poco sviluppate. In una combinazione appartenente al tipo II, sebbene le faccette fossero poco estese, erano tuttavia lucenti e piane. Si ebbe poi occasione di osservare questa forma isolata in cristalli non molto perfetti e che facevano parte di una collezione dall'autore visitata: non furono per altro ripetute misurazioni su cristalli isolati.

— $^{13}/_{8}$R $(0\ 13\ \overline{13}\ 8)$. Comb. 20, 130, 233, 242.

Osservato da Bournon ed Hessemberg. Fu pure notato in una combinazione spettante al tipo II con facce assai sviluppate, lucentissime, arrotondate.

— $^{9}/_{5}$R $(09\overline{9}5)$. Comb. 180, 260.

Romboedro non osservato fin qui, che s'incontra nel tipo IV, con facce assai sviluppate, ma leggermente striate parallelamente alla diagonale più lunga. Presentasi eziandio nel tipo VI, ma meno sviluppato. v. n. 50 e n. 77.

— 2R $(02\overline{2}1)$.

Romboedro frequentissimo. Scharff (loc. cit.) descrisse con cura e precisione somma tutte le accidentalità e i modi di presentarsi di questa forma, concludendo che essa non presentasi giammai piana e uniforme di superficie. Rari invero sono i cristalli ove tale forma apparisce netta: però Sella la osservò (1) con facce nettissime. Preferibilmente mostrasi tale nei cristalli appartenenti al tipo I laddove cioè è associata alla base. Nel tipo IV ove la s'incontra più di frequente talora predominante, mostrasi invece con facce più o meno curve: rara nelle forme romboedriche e scalenoedriche ottuse. Tale romboedro fu riscontrato in $^{1}/_{3}$ circa delle combinazioni esaminate.

— $^{12}/_{5}$R $(0\ 12\ \overline{12}\ 5)$. Comb. 189.

Nuova forma per Andreasberg con facce nette che serve di sostegno ad una combinazione spettante al tipo IV: già menzionata da Zippe.

— $^{5}/_{2}$R $(05\overline{5}2)$. Comb. 121.

Trovasi citata da Zippe, subordinata di sviluppo in cristalli piccoli grigiastri, trasparenti.

— $^{11}/_{4}$R $(0\ 11\ \overline{11}\ 4)$. Comb. 140, 287 301, 325, 328.

Notasi nei due tipi VII e VIII associata in sviluppo subordinato a forme sca lenoedriche: suole presentarsi con facce non completamente lucenti, a differenza delle altre forme coesistenti nella combinazione.

— $^{7}/_{2}$R $(07\overline{7}2)$. Comb. 193, 277, 298, 305.

Levy, Zippe citano questa forma in una combinazione: la si osservò predominante in altre combinazioni, sempre associata allo scalenoedro R5, di cui tronca gli spigoli culminanti acuti. Non ha facce nettissime.

— $^{9}/_{2}$R $(09\overline{9}2)$. Comb. 351.

(1) *Studi sulla mineralogia sarda*, 1851, fig. 30.

Osservato da vom Rath, in combinazione collo scalenoedro $R^{19}/_3$ di cui tronca gli spigoli acuti.

— 5R(05$\bar{5}$1). Comb. 11, 12, 133, 144, 193, 231, 321, 332.

Bournon, e successivamente altri autori, citano questa forma che secondo Levy si troverebbe anche isolata.

— 8R(08$\bar{8}$1). Comb. 22, 24.

Zippe e Levy citano questa forma in combinazioni a 4 facce spettante al tipo I.

— 9R(09$\bar{9}$1). Comb. 311.

Forma nuova, in cristalli ben conformati, poco sviluppata con facce assai nette. v. n. 102.

— 10R (0 10 $\overline{10}$ 1). Comb. 134.

Tale romboedro lo s'incontra predominante del tipo III. v. n. 43.

— 11R (0 11 $\overline{11}$ 1). Comb. 135, 311.

Tale romboedro indicato per altre località, fu qui osservato in due diverse combinazioni, con faccette non uniformi, analogamente e ciò che suole avvenire per tutti i romboedri acuti, i quali sogliono altresì essere assai sviluppati.

— 13R (0 13 $\overline{13}$ 1). Comb. 136, 324.

Nuova forma, incontrata in una combinazione binaria del tipo III. v. n. 45.

— 14R (0 14 $\overline{14}$ 1). Comb. 61, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 146, 147, 148, 149, 150, 342.

È questo il romboedro il più acuto fra i negativi. Citato ripetutamente dagli autori; è lecito tuttavia supporre che sotto questo simbolo vadano compresi altri aventi il simbolo a questi vicino, e ciò perchè difficilmente tali forme acute permettono un' accurata determinazione.

— 25R (0 25 $\overline{25}$ 1). Comb. 358.

Romboedro citato solo da Hessemberg, molto probabilmente dato da calcite di 2ª formazione: determinazione dubbiosa.

$^2/_3$ P2 (11$\bar{2}$3). Comb. 71, 102, 177, 190.

Piramide poco frequente nonostante i rapporti geometrici coi comuni romboedri R — $^1/_2$ R. Presentasi con facce striate secondo la zona principale: fu osservata da Q. Sella e da Levy.

$^1/_{10}$ R7 (4 3 $\bar{7}$ 10). Comb. 77, 104, 113.

Zippe, Hausmann, e Peters fanno cenno di tale forma: presentasi in piccoli cristalli cerulei con facce striate.

$^1/_5 R^{11}/_3$ (7 4 $\overline{11}$ 15). Comb. 38, 359.

Osservata da Hessemberg con facce curve striate assai subordinate in sviluppo in cristalli biancastri tabulari ricchi di faccette.

$^1/_4$ R3 (21$\bar{3}$4). Comb. 34, 88, 91, 102, 105, 118, 124, 241.

Irby afferma (loc. cit.) e prima di lui Scharff che questa forma è la più frequente fra quelle di questa zona che smussano gli spigoli culminanti del romboedro primitivo. Ciò non risulta per Andreasberg essendosi osservata solo in 6 combinazioni e giammai a servire di sostegno alla combinazione; e neppure è preferibilmente unita a R3 come suole avvenire in cristalli di altre località, ma è invece

assai più di frequente associata a combinazioni del II tipo. Con facce striate per lo più come tutti gli scalenoedri di questa zona.

$^{1}/_{3}R^{7}/_{3}$ (5 2 $\bar{7}$ 9). Comb. 18, 109, 226, 253, 258, 260, 288.

Calcolato da Sella nel suo quadro ecc. senza altro indizio dell' apparenza delle facce, nè del tipo al quale può riferirsi. Ricordato anche da Descloiseaux (¹).

Non è raro e lo s'incontra per lo più in piccoli e nitidi cristallini, dati da formazione recente, con facce striate: talora serve di sostegno alla combinazione.

$^{2}/_{5}R2$ (3 1 $\bar{4}$ 5). Comb. 83, 92, 94, 107, 110, 120, 236, 252, 260, 263, 265, 266, 310, 323, 339.

È il più frequente fra gli scalenoedri ottusi appartenenti alla zona predetta. Identico ai precedenti per ciò che concerne l'apparenza delle sue faccette, serve più frequentemente che gli altri di sostegno alle combinazioni del tipo VI.

$^{5}/_{11}R^{9}/_{5}$ (7 2 $\bar{9}$ 11). Comb. 117, 256, 293, 294.

Non per anco osservato ad Andreasberg: lo si rinvenne in esemplari spettanti a 4 combinazioni diverse, e con vario sviluppo.

$^{1}/_{2}R^{5}/_{3}$ (4 1 $\bar{5}$ 6). Comb. 100, 107, 132, 261, 262, 264, 267.

Mentovato da Zippe: tale forma sebbene espressa da simbolo semplice non è molto frequente, e le sue faccette raggiungono piccolo sviluppo.

$^{4}/_{7}R^{3}/_{2}$ (5 1 $\bar{6}$ 7). Comb. 97, 251, 255, 259, 264, 309, 314.

Forma già nota ad Hauy: serve di sostegno nelle combinazioni del tipo VI.

$^{3}/_{5}R^{13}/_{9}$ (11 2 $\overline{13}$ 15). Comb. 272.

Come fu a suo luogo avvertito, tale nuovo scalenoedro, offre immagini semplici ed è evidentemente formato da una seconda formazione che dette luogo soltanto a questa nuova forma. v. n. 83.

$^{5}/_{8}R_{7/5}$ (6 1 $\bar{7}$ 8). Comb. 242, 283.

Menzionata da Hausmann e da Hessemberg; questa forma non fu riscontrata dall'autore negli esemplari studiati.

$^{2}/_{3}R^{4}/_{3}$ (7 1 $\bar{8}$ 9). Comb. 38, 311.

Rara: subordinata in combinazioni assai complicate con caratteri identici alle forme precedenti.

$^{7}/_{10}R^{9}/_{7}$ (8 1 $\bar{9}$ 10). Comb. 249, 254, 257.

Citata da Zippe per la nostra località; serve, sebbene rara, da sostegno della combinazione.

$^{8}/_{11}R^{5}/_{4}$ (9 1 $\bar{1}$ $\bar{0}$ 11 32). Comb. 249.

Questa nuova forma nonostante il suo simbolo complicato, fu definitivamente ammessa, stante la concordanza fra i valori calcolati e quelli misurati. Presentasi in combinazione con $^{1}/_{2}R$ che come fu avvertito a suo luogo ha facce nitidissime scevre da striature.

$^{4}/_{5}R^{7}/_{6}$ (13 1 $\overline{14}$ 15). Comb. 254.

Fin qui non osservata ad Andreasberg: è poco sviluppata e passa insensibilmente a scalenoedri della stessa zona.

$R^{4}/_{3}$ (7 1 $\bar{8}$ 6). Comb. 242.

(¹) Descloiseaux, *Manuel* ecc. fig. 267.

Questa forma rarissima nonostante il suo simbolo relativamente semplice, fu osservata in una sola combinazione da Hessemberg, in piccolo sviluppo: rappresenta lo scalenoedro il più ottuso di quella numerosa serie appartenenti allo zona principale e compresi fra R, ∞ P 2.

$R^{11}/_{8}$ (19 3 $\bar{2}\bar{2}$ 16). Comb. 129, 130.

Nuova forma. v. descrizione n. 40 e n. 41.

$R^{7}/_{5}$ (6 1 $\bar{7}$ 5). Comb. 350.

Citata solo da Levy, e non riscontrata in verun esemplare dall'autore.

$R^{3}/_{2}$ (5 1 $\bar{6}$ 4). Comb. 254, 262, 263, 266, 314.

Questa forma non si presenta isolata: trovasi preferibilmente nel tipo VI ove ha uno sviluppo subordinato.

$R^{5}/_{3}$ (4 1 $\bar{5}$ 3). Comb. 63, 65, 85, 97, 100, 124, 129, 130, 132, 212, 242, 255, 256, 264, 267, 309.

Scalenoedro frequente, già noto ad Hauy: non serve mai di sostegno alla combinazione: quasi sempre subordinato, raggiungendo di rado uno sviluppo intermedio. Abbonda nel tipo II.

$R^{12}/_{7}$ (19 5 $\bar{2}\bar{4}$ 14). Comb. 261.

Nuovo scalenoedro. v. descrizione n. 78.

$R^{9}/_{5}$ (7 2 $\bar{9}$ 5). Comb. 125.

Secondo Irby, Hessemberg ricorda questa forma per Andreasberg. Erroneamente poi nota lo stesso Irby, che questo scalenoedro sia quello indicato da Descloiseaux, fig. 267, basandosi sul simbolo $d^{7}/_{2}$ certo per errore di stampa scritto nel testo: è invece giusto, il segno $b^{7}/_{2}$ apposto alla figura. Questa stessa forma $R^{9}/_{5}$ fu poi osservata dall'autore in piccoli cristallini, con faccette poco uniformi.

R 2 (3 1 $\bar{4}$ 2). Comb. 359.

Scalenoedro non per anco osservato. v. descrizione n. 115.

R 3 (2 1 $\bar{3}$ 1).

La più frequente fra tutte le forme scalenoedriche. Ben di rado presentasi con faccette distinte e nette, come invece suole avvenire per altre località. Anche quando predomina nelle combinazioni, il che non è frequente, non è di per se stessa determinabile, e conviene in tal caso giovarsi dei rapporti che suole avere con le forme associate. Nelle combinazioni del tipo VII serve bene spesso di limite alla serie delle forme scalenoedriche della zona principale. Trovasi di frequente nelle combinazioni del tipo IV e VII quasi sempre con sviluppo subordinato. La si riscontra in $^{1}/_{9}$ circa degli esemplari studiati.

$R^{13}/_{4}$ (17 9 $\bar{2}\bar{6}$ 8). Comb. 89.

Determinato solo approssimativamente. v. descrizione n. 17.

$R^{7}/_{2}$ (9 5 $\bar{1}\bar{4}$ 4). Comb. 101, 111.

Nuova forma. v. descrizione n. 22 e n. 30.

$R^{11}/_{3}$ (7 21 $\bar{1}\bar{1}$ 3). Comb. 66, 259, 302.

Presentasi con faccette poco sviluppate, punteggiate, semiopache.

R 4 (5 3 $\bar{8}$ 2). Comb. 32, 87, 127, 237, 251, 274, 280, 284, 294, 297.

Scalenoedro assai frequente per lo più poco sviluppato; in un sol caso si osservò che serviva di sostegno alla combinazione. Faccette sempre striate.

$R^{13}/_{3}$ (8 5 $\overline{13}$ 3). Comb. 17, 197, 293, 310.

Scalenoedro nuovo per Andreasberg in varia misura sviluppato. Faccette sempre striate.

R 5 (3 2 $\bar{5}$ 1).

Scalenoedro frequente con facce assai nitide ed estese: serve spesso di sostegno alla combinazione nel tipo VII. Accompagnato quasi sempre dal romboedro 4 R.

$R^{16}/_{3}$ (19 13 $\overline{32}$ 6). Comb. 242.

Citato da Hessemberg con faccette poco regolari.

$R^{17}/_{3}$ (10 7 $\overline{17}$ 3). Comb. 19, 32, 125.

Nuova forma per Andreasberg. Presentasi quasi esclusivamente nelle combinazioni del tipo I con faccette poco sviluppate.

R 6 (7 5 $\overline{12}$ 2). Comb. 35.

Nuova forma scalenoedrica. v. descrizione n. 8.

$R^{19}/_{3}$ (11 8 $\overline{19}$ 3). Comb. 36, 315, 335, 351.

Descritto da vom Rath: ha l'aspetto generale degli scalenoedri acuti di questa zona.

$R^{20}/_{3}$ (23 17 $\overline{40}$ 6). Comb. 18.

Nuova forma. v. descrizione n. 2.

R 7 (4 3 $\bar{7}$ 1).

Scalenoedro il frequente dopo i due nominati R 3, R 5. Abbonda specialmente nei tipi IV e VIII e manca del tutto nei tipi V e VII: riscontrasi di frequente come predominante: di rado interviene nelle combinazioni complicate: si mantiene costantemente striato. S'incontra in $^1/_{12}$ circa delle combinazioni osservate.

R 8 (9 7 $\overline{16}$ 2). Comb. 124, 317, 327.

Nuova forma. v. descrizione nn. 36, 105, 110.

R 9 (5 4 $\bar{9}$ 1). Comb. 37, 38, 196, 223, 263, 292, 318, 328, 340, 341, 342, 343, 344, 352.

Scalenoedro frequente: s'incontra nel tipo I in combinazioni molto complicate. Nel tipo VIII serve sempre di sostegno alla combinazione.

R 11 (6 5 $\overline{11}$ 1). Comb. 264, 290, 319, 326, 329, 330, 331, 332,

Sempre bene sviluppato; s'incontra questa forma in combinazioni semplici, mantenendo sempre le fascette striate.

R 12 (13 11 $\overline{24}$ 2). Comb. 32, 128, 311, 333, 334, 345, 346, 347, 353, 355, 359.

La determinazione di questa forma riesce sempre difficile in causa della poca perfezione delle faccette: per lo più è sempre assai sviluppato.

R 13 (7 6 $\overline{13}$ 1). Comb. 188, 320, 348, 356, 357.

Bene spesso confuso col precedente quantunque porti facce più nitide: quasi sempre molto sviluppato.

R 16 (17 15 $\overline{32}$ 2). Comb. 174.

Nuova forma. v. descrizione n. 49.

R 17 (9 8 $\overline{17}$ 1). Comb. 115, 331.

Lo scalenoedro il più acuto fra quelli appartenenti alla zona principale: è poco sviluppato.

∞ P 2 (1 1 $\bar{2}$ 0).

Questo prisma nonostante la sua frequenza ben di rado presentasi con facce nette ed estese: si osservò sempre una striatura più o meno fina secondo la zona

principale, e una tendenza spiccata ad incurvarsi, a misura che si avvicina all'estremità libera del cristallo: oltre a ciò è caratteristica per questa forma una particolare lucentezza, di cui talora partecipano anche gli scalenoedri acuti della zona principale, lucentezza, che può dirsi esattamente sericea. In rari casi le facce di questo prisma permettono di eseguire misure goniometriche esatte. S'incontra in $^1/_5$ circa degli esemplari esaminati.

$^4/_3$P2 (2 2 $\bar{4}$ 3). Comb. 25, 72, 128.

Levy osservò questa forma in cristalli biancastri associati a stilbite e galena: manca nei tipi romboedrici o scalenoedrici: suole presentarsi con facce assai ben conformate.

4P2 (2 2 $\bar{4}$1). Comb. 302, 352.

Forma assai rara quantunque sia comune a molte zone.

$^{16}/_7$R2 (24 8 $\overline{32}$ 7). Comb. 290.

In cristalli bianco-rossastri, confusamente aggruppati fra di loro.

$^{16}/_3$P2 (8 8 $\overline{16}$ 3). Comb. 354.

Anche questa forma determinata solo da vom Rath con approssimazione sembra assai rara.

6P2 (3 3 $\bar{6}$ 1). Comb. 69, 131, 257, 349, 350.

È la più frequente fra tutte le piramidi di 2° ordine. Le facce sogliono essere per lo più incurvate tendendo al passaggio ad uno scalenoedro negativo acuto.

$^{49}/_{13}$R$^{13}/_7$ (70 21 $\overline{91}$ 13). Comb. 118.

Nuova forma. v. descrizione n. 33.

—$^1/_5$R7 (3 4 $\bar{7}$ 5). Comb. 82, 226, 307, 313.

Comunemente con facce assai curve nel senso della zona [1 0 $\bar{1}$ 1,: 0 2 $\bar{2}$ 1] alla quale appartiene ogni coppia di faccette di questa forma concorrente nello spigolo culminante acuto. Questo carattere sogliono pure presentare in minore o maggiore misura le altre forme scalenoedriche di questa zona.

—$^2/_7$R5 (4 6 $\overline{10}$ 7). Comb. 121.

Faccette poco sviluppate: rara.

—$^1/_2$R3 (1 2 $\bar{3}$ 2). Comb. 91, 104.

—$^2/_3$R$^7/_3$ (4 10 $\overline{14}$ 9) Comb. 308. Osservata soltanto da Hausmann.

—$^4/_5$R2 (2 6 $\bar{8}$ 5.). Comb. 187.

Nuova forma. v. descrizione n. 51.

—R$^5/_3$ (1 4 $\bar{5}$ 3). Comb. 37, 65, 98, 228, 260.

Sta sul punto d'incontro di due zone assai frequenti; presentasi con faccette arrotondate e lucentissime, e poco sviluppate.

—$^8/_7$R$^3/_2$ (2 10 $\overline{12}$ 7). Comb. 78, 112.

Determinata da Wimmer (loc. cit.); questo scalenoedro a differenza degli altri negativi offre faccette meglio uniformi di superficie.

—$^3/_4$R$^7/_5$ (1 6 $\bar{7}$ 4). Comb. 179, 205, 296.

Aspetto analogo agli altri precedenti scalenoedri di questa zona.

—2R$^3/_2$ (1 5 $\bar{6}$ 1). Comb. 280.

Osservata in una sola combinazione con faccette estese e lucenti.

—2R$^5/_3$ (2 8 $\overline{10}$ 3). Comb. 67, 291.

Determinato da Haidinger.

$-2R2$ $(1\ 3\ \bar{4}\ 1)$. Comb. 95, 96, 265, 286, 289.

Osservata unicamente da Levy e sembra che si presenti sempre con faccette poco sviluppate.

$-2R3$ $(2\ 4\ \bar{6}\ 1)$. Comb. 108, 131, 238, 240, 284.

Nel tipo II, sebbene si presenti con faccette ristrette, è però determinabile con esattezza offrendo immagini riflesse nettissime: ha faccette meno regolari quando presentasi negli altri tipi.

$-{}^{4}/_{3}R{}^{5}/_{3}$ $(4\ 16\ \overline{20}\ 9)$. Comb. 266.

Nuova forma. v. descrizione n. 82.

$-{}^{5}/_{4}R{}^{9}/_{5}$ $(2\ 7\ \bar{9}\ 5)$. Comb. 68, 211.

Determinata da Hausmann senza indicazione circa l'apparenza delle facce.

$-{}^{8}/_{7}R2$ $(4\ 12\ \overline{16}\ 7)$. Comb. 86, 106, 122, 127, 220, 262, 269, 299, 306, 307.

Forma scalenoedrica frequente: trovasi anche isolata, come sostegno alla combinazione: vi si associa spesso il romboedro che ha gli stessi spigoli laterali che il romboedro $-{}^{8}/_{7}R$. Ha ordinariamente faccette arrotondate e lucentissime. La curvatura avviene talora nel senso della zona $[1\ 1\ \bar{2}\ 0;\ 0\ 8\ \bar{8}\ 7]$, oppure parallelamente agli spigoli culminanti ottusi.

$-R{}^{7}/_{3}$ $(2\ 5\ \bar{7}\ 3)$. Comb. 225, 292, 308, 313.

Si trova con faccette assai sviluppate, e leggermente incurvate.

$-{}^{4}/_{5}R3$ $(4\ 8\ \overline{12}\ 5)$. Comb. 123, 241.

Con faccette nitide, e piane, e poco estese.

$-{}^{1}/_{2}R5$ $(2\ 3\ \bar{5}\ 2)$. Comb. 126.

Determinato solo da Haidinger.

$-{}^{5}/_{6}R{}^{9}/_{5}$ $(2\ 7\ \bar{9}\ 6)$. Comb. 278.

Nuova forma. vedi descrizione n. 84.

$-{}^{27}/_{26}R{}^{13}/_{9}$ $(6\ 33\ \overline{39}\ 26)$. Comb. 301.

Nuova forma. v. descrizione n. 97.

$-{}^{4}/_{5}R{}^{5}/_{2}$ $(3\ 7\ \overline{10}\ 5)$. Comb. 24.

Da Levy: secondo Weiss e Zippe non ne è esatta la determinazione avvenuta per mezzo delle zone non esistenti nella combinazione.

$-{}^{8}/_{7}R{}^{5}/_{3}$ $(8\ 32\ \overline{40}\ 21)$. Comb. 103.

Nuova forma. vedi descrizione n. 23.

$-R2$ $(1\ 3\ \bar{4}\ 2)$. Comb. 98, 258.

Nuova forma. v. descrizione n. 19 e n. 75.

$-{}^{5}/_{4}R{}^{17}/_{11}$ $(15\ 70\ \overline{85}\ 44)$. Comb. 273.

Determinata da Hessemberg: secondo Irby non può ammettersi che dubitativamente (loc. cit. pag. 68).

$-{}^{36}/_{35}R2$ $(18\ 54\ \overline{72}\ 35)$. Comb. 216.

Determinata da vom Rath in cristalli con facce assai curve: se si aggiunge il simbolo assai complicato, si può ritenere questa determinazione dubbiosa.

$-{}^{6}/_{5}R{}^{5}/_{3}$ $(2\ 8\ \overline{10}\ 5)$. Comb. 300.

Nuova forma. v. descrizione n. 96.

$-{}^{7}/_{6}R{}^{13}/_{7}$ $(3\ 10\ \overline{13}\ 6)$. Comb. 301.

Nuovo scalenoedro: determinazione incerta. v. descrizione n. 97.

$-R3$ (1 2 $\bar{3}$ 1). Comb. 82, 121.

Forma assai rara: si presenta ordinariamente con faccette poco sviluppate.

$-\tfrac{7}{6}R\tfrac{20}{7}$ (13 27 $\overline{40}$ 12). Comb. 279.

Nuova forma. v. descrizione n. 85.

$-\tfrac{1}{4}R15$ (7 8 $\overline{15}$ 4). Comb. 101, 111.

Nuova forma. v. descrizione n. 22, n. 30.

$-8R5$ (16 24 $\overline{40}$ 1). Comb. 358.

Determinato da Hessemberg: forma dubbiosa. v. Irby (loc. cit. pag. 54).

$-\tfrac{5}{4}R3$ (5 10 $\overline{15}$ 4). Comb. 128.

Nuova forma. v. descrizione n. 39.

$-\tfrac{2}{3}R7$ (6 8 $\overline{14}$ 3). Comb. 123.

Nuova forma. v. descrizione n. 35.

$-\tfrac{1}{3}R15$ (7 8 $\overline{15}$ 3). Comb. 38.

Forma dubbiosa, determinata da Hessemberg. v. in proposito Irby (loc. cit. pag. 54).

$-\tfrac{6}{5}R\tfrac{13}{3}$ (10 6 $\overline{26}$ 5). Comb. 145.

Nuova forma. v. descrizione n. 46.

$-10R\tfrac{6}{5}$ (1 11 $\overline{12}$ 1). Comb. 30.

Nuova forma. v. descrizione n. 6.

$-15R\tfrac{17}{15}$ (1 16 $\overline{17}$ 1). Comb. 124.

Nuova forma. v. descrizione n. 30.

$\infty R2$ (3 1 $\bar{4}$ 0). Comb. 116.

Determinato da Hauy: non avendo osservato traccia di prisma all'infuori dei due citati, nè essendovi di questa forma descrizione dettagliata, sembra doversi ammettere come dubbiosa.

$\infty R9$ (5 4 $\bar{9}$ 0). Comb. 143.

Determinazione di Bournon, senza indizio circa l'apparenza delle faccette: si ritiene dubbia l'esistenza di questa forma per le stesse ragioni che per la precedente.

CAPO IV.

Della posizione dei poli delle facce sulla proiezione sferica.

Basta gettare uno sguardo sulla proiezione (tav. I) per vedere subito, il modo diverso di distribuzione dei poli delle facce nei sestanti positivi (¹). Si nota intanto, che nei sestanti positivi le forme romboedriche sono rare, ed all'infuori delle due notissime e comuni R, 4 R, le altre possono dirsi eccezionali. Fra queste ultime poi mancano affatto romboedri più ottusi di R; che anzi sono assai acuti, e bene spesso con facce così imperfette da potere considerare queste forme come *vicinali* al

(¹) Mi sia lecito adottare qui la parola *sestante*, nel senso analogo in cui si adopera il vocabolo *ottante* nei sistemi a 3 assi; coll'avvertenza che, (adottando i 4 assi) essa valga a dinotare lo spazio compreso fra 2 piani ordinari di simmetria contenenti gli assi, e facendo astrazione dal piano principale di simmetria.

prisma ∞ R. Gli scalenoedri di questi sestanti sono quasi tutti coordinati nella zona principale degli spigoli laterali di R: lo che impartisce loro quell'impronta caratteristica della striatura parallela ad essi spigoli. Lungo la stessa zona le forme scalenoedriche non sono ugualmente ed uniformemente distribuite, poichè le forme più comuni, a simbolo semplice come ad es. R3, R5, appariscono relativamente più isolate che le rimanenti. Sogliono essere più profondamente striati, gli scalenoedri compresi, fra ∞ P2, ed R5: sono meno frequenti e più imperfettamente caratterizzati gli scalenoedri compresi fra R3, ed R. Le forme poi situate oltre questo limite R, fino a $^2/_3$ P2 offrono una maggiore uniformità di distribuzione, che va congiunta ad una maggiore perfezione e nettezza delle facce: sono questi ultimi scalenoedri ottusi, sia dominanti che subordinati che furono originati nel periodo della 2ª formazione. È singolare che oltre le forme di questa zona, siano note solo le due $^{16}/_7$R2, $^{49}/_{13}$ R$^{13}{}_7$, osservate in pochi esemplari.

Nei sestanti negativi, i romboedri sono di poco inferiori di numero agli scalenoedri, sono assai frequenti i più acuti, e riuniti in gruppo, mentre si mostrano più regolarmente distribuiti fra — R, e — 2R. Rarissimi, sono gli ottusi ad eccezione del comune — $^1/_2$ R. Tutti poi, meno quest' ultimo che è sempre striato, mostrano facce più o meno arrotondate, e scabre in generale non uniformi di superficie. Gli scalenoedri giacciono, almeno quelli di più certa determinazione, nelle due zone [$0 2\bar{2}1$: $10\bar{1}1$] ed [$0 2\bar{2}1$: $23\bar{2}1$]: la maggior parte dei rimanenti raggruppasi entro confini tali da avere l'indice *m* (nel simbolo di Naumann) compreso fra 1, e $^4/_3$ Giova notare come la maggior parte di queste forme non comprese nelle due predette zone, sfugga ad una esatta determinazione. Rari gli scalenoedri acuti, e con faccette non sempre ben conformate; alcuni di essi raggruppansi vicino alla zona [$11\bar{2}0$: 0001], trovando il loro limite naturale nelle piramidi di 2° ordine comprese fra 4P2, 6P2: gli altri invece stanno vicino alla zona [$01\bar{1}0$: 0001], tendendo così a passare ad una forma romboedrica acutissima di segno negativo.

Tanto per i romboedri come per gli scalenoedri, verificasi: che le due forme identiche e di segno contrario, le quali teoricamente possono derivarsi, per emiedria da una stessa forma oloedrica hanno: 1° diversa apparenza fisica nelle loro facce; 2° che quanto più quelle di un dato segno, positivo o negativo sono frequenti, tanto sono più rare quelle di segno contrario corrispondenti, aventi gli stessi rapporti parametrali. Così mentre sono frequentissime ad e. le due forme — $^1/_2$ R, — 2R, 4R ecc. non si conoscono affatto le corrispondenti $^1/_2$ R, 2R, — 4R ecc.

Confermasi poi pienamente ciò che suole verificarsi nella maggior parte delle specie minerali cristallizzate, che cioè:

1° Le forme cristalline aventi simbolo più semplice sono di gran lunga le più frequenti, quando abbiano nello stesso tempo i loro poli collocati sul punto d'incontro di zone contenenti numerose forme.

2° Che le medesime forme frequenti offrono in confronto delle rimanenti, una maggiore uniformità e nettezza nella superficie delle loro facce.

Rilevasi poi dalla proiezione sferica che, riguardo alla posizione e dipendenza reciproca delle forme frequenti a simbolo semplice, di qualunque specie esse siano, romboedriche o prismatiche ecc. e di qualsiasi segno, debba ritenersi, come esse si

trovino di preferenza isolate, escludendo dalla vicinanza loro le forme meno comuni: e ciò riesce tanto più evidente se si tien conto della rarità dei casi, nei quali occorse osservare tali forme rare, più vicine alle suddette comuni e più frequenti. Parrebbe che fino ad un certo punto si verificasse il fatto, secondo il quale la frequenza delle forme comuni a simbolo semplice nelle varie combinazioni, fosse direttamente proporzionale alla lunghezza del raggio di una circonferenza con centro nel polo di esse facce comuni descritta fino all'incontro di un polo più vicino.

CAPO V.

Geminazioni.

Possono dirsi assai rare, e in generale avvengono fra individui a combinazione molto semplice. Hausmann, vom Rath, e Sella, descrivono varie geminazioni: possono tutte raggrupparsi sotto le 3 seguenti leggi:

1ª Piano di geminazione $-\frac{1}{2}$R $(0\ 1\ \bar{1}\ 2)$.
2ª Piano di geminazione R $(1\ 0\ \bar{1}\ 1)$.
3ª Piano di geminazione 0 R $(0\ 0\ 0\ 1)$.

La prima legge è senza dubbio la più frequente ad incontrarsi: gl'individui geminati appartengono al tipo prismatico, nella semplice combinazione ∞ R, 0 R, con faccette nitide e piane appartenenti alla 2ª formazione. Ne furono osservati 8 esemplari in 6 dei quali i cristalli riposavano sul solito impasto quarzoso detritico, e provenivano dalla miniera Sanson: dei rimanenti con identico aspetto impiantati sullo stesso detrito, non era indicato da quale miniera provenissero.

La seconda legge di geminazione suole pure riscontrarsi in cristalli prismatici di apparenza identica ai precedenti. In alcuni di essi osservasi una penetrazione completa, talmentechè sopra una faccia nitida e splendente prismatica di un individuo, si disegna un'area esagonale opaca corrispondente alla base dell'altro individuo.

La terza legge di geminazione così frequente per altre località è più rara che le precedenti. Osservasi per lo più in cristalli a tipo scalenoedrico (R 3, R 5) e a tipo romboedrico (R, — 2 R): ed allora queste forme servono di nucleo, intorno a cui si addossa nuova sostanza nelle forme del tipo prismatico e di scalenoedro ottuso. È raro che questa calcite di 2ª formazione derivata per lo più da un accrescimento avvenuto parallelamente all'asse principale, riproduca la geminazione del nucleo, nonostante che si mantenga esatta la orientazione fra le faccette del nucleo stesso, e quelle spettanti alla sostanza calcitica involgente, di formazione posteriormente avvenuta.

CAPO VI.

Distribuzione in quadri delle forme cristalline e delle loro combinazioni.

Essendo il numero delle forme semplici riscontrate nel giacimento di Andreasberg uguale a 131, è chiaro che teoricamente potrebbero aversi $2^{131} - 1$ combinazioni. In effetto non se ne possono ammettere più di 359: queste nel Quadro I sono ripartite secondo i tipi a cui appartengono, e in ciascun tipo secondo il numero delle forme

semplici di cui constano. Ivi in apposita colonna fu indicato, laddove fu possibile, la miniera da cui gli esemplari provennero. In altra colonna poi sta il nome dei diversi autori che prime le determinarono. Laddove, di contro ad una combinazione notata non trovasi alcun nome di autore, devesi intendere che esse furono osservate già determinate nelle collezioni visitate: laddove lo richiedeva il caso furono sottoposte a nuovo esame: rimase pertanto ignoto il nome di chi primo fece tali determinazioni. A constatare poi la frequenza di ciascuna forma semplice, secondo il tipo in cui si presenta, o della combinazione più o meno complicata a cui prende parte, serve il Quadro II, ove in apposita colonna viene indicato il nome degli autori che primi osservarono le relative forme semplici. I segni convenzionali posti in margine di fianco al numero d'ordine corrispondono a seguenti significati.

✱ Se la forma semplice non fu fin qui osservata in altra località all'infuori di Andreasberg,

Φ Se la forma semplice osservata per la calcite di altri giacimenti sia nuova per Andreasberg,

O Se la determinazione è incerta.

Le 131 forme semplici notate in questo quadro, riguardo alla specie di facce cui appartengono, e alla data, e certezza di loro determinazione, possono ripartirsi come segue:

Forme già note e di certa determinazione		Forme nuove e di certa ecc. (¹)	Forme incerte (²)
Base	1 . . .	—	—
Prismi	2 . . .	—	2
Piramidi di 2° ordine	5 . . .	—	—
Romboedri	25 . . .	Φ 7 ✱ 5	3
Scalenoedri	42 . . .	Φ 8 ✱ 23	8

Nel Quadro III sono distribuite le combinazioni osservate secondo il numero delle forme semplici di cui sono composte e secondo i tipi in cui si presentano.

Per i nomi di varî autori s'impiegarono per amore di brevità le seguenti abbreviazioni:

B = Bournon; Hdgr = Haidinger; Hsm = Hausmann; L = Levy; Z = Zippe; S = Sansoni.

(¹) I segni qui posti, hanno lo stesso significato sopra espresso.

(²) Fra queste si comprendono forme già note, ed alcune nuovamente osservate. Non vi fu registrato il romboedro $^2/_5$R ($20\bar{2}5$) (Levy, V, 174, fig. 134), poichè dalla figura relativa apparisce chiaro che si tratta di altra forma.

Quadro I

Combinazioni di forme osservate nella Calcite di Andreasberg

SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provenero	AUTORE
Tipo I. — Predomina la forma OR (0001)											
OR	∞ R	....	....	...	...	...	..	..	..	—	Romé de l'Isle fig. 18-26: V. 10, 11.
»	∞ P2	....	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	$-{}^{1}/_{2}R$	....	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	—2R	....	....	...	...	...	..	..	..	—	Z. fig. 2.
»	∞ R	∞ P2	....	...	...	...	..	..	..	—	B. 22.
»	∞ R	$-{}^{1}/_{2}R$	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	∞ P2	$-{}^{1}/_{2}R$	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	∞ P2	$-{}^{3}/_{10}R$	....	...	...	...	..	..	..	—	B. 65.
»	—2R	$-{}^{1}/_{2}R$	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	R	—R	....	...	...	...	..	..	..	—	Z. fig. 3 da Haidinger.
»	—2R	—5R	....	...	...	...	..	..	..	—	L. fig. 29, V. 51
»	$-{}^{1}/_{2}R$	—5R	....	...	...	...	..	..	..	—	B. 249.
»	—2R	4R	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	∞ R	R5	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	∞ R	—2R	....	...	...	...	..	..	..	—	
»	4R	R5	∞ P2	...	...	...	..	..	..	—	
»	∞ R	$R^{13}/_{3}$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	..	..	..	Sanson	S. N. 1.
»	∞ R	$R^{20}/_{3}$	${}^{1}/_{3}R^{7}/_{3}$	...	...	...	..	..	..	—	S. N. 2.
»	∞ R	$-{}^{1}/_{2}R$	$R^{17}/_{3}$	...	...	...	..	..	..	Andreaskreux	S. N. 3.
»	$-{}^{1}/_{2}R$	R	$-{}^{13}/_{8}R$	...	...	...	..	..	..	—	B. 132.
»	∞ R	$-{}^{1}/_{2}R$	4R	...	...	...	..	..	..	—	
»	$-{}^{1}/_{2}R$	$-{}^{3}/_{2}R$	—8R	...	...	...	..	..	..	—	Z. fig. 12.
»	∞ P2	4R	R7	...	...	...	..	..	..	—	Mohs I 144.
»	—8R	$-{}^{1}/_{2}R$	$-{}^{4}/_{5}R^{5}/_{2}$	...	...	...	..	..	..	—	L. fig. 97 V. 136.
»	∞ R	∞ P2	${}^{4}/_{3}P2$	...	...	...	..	..	..	—	L. fig. 87 V. 124.
»	∞ P2	—2R	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	..	..	..	—	L. V. 93.
»	4R	R5	R3	...	...	...	..	..	..	Sanson	
»	4R	∞ R	R7	...	...	...	..	..	..	—	Monteiro Ann.. des Min. 1820.
»	∞ R	4R	—2R	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	..	..	..	—	S. N. 4. fig. 2, Tav. II.
»	∞ P2	—2R	$-10R^{6}/_{5}$	R5	...	...	..	..	..	—	S. N. 5, fig. 4, Tav. II.
»	∞ R	13R	4R	R5	...	...	..	..	..	—	S. N. 6.
»	R12	∞ R	$R^{17}/_{3}$	R4	...	...	..	..	..	—	S. N. 7.
»	∞ R	∞ P2	—2R	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	..	..	..	—	
»	∞ P2	$-{}^{1}/_{2}R$	—2R	∞ R	${}^{1}/_{4}R3$	R3	..	..	..	—	L. fig. 148, V. 188.
»	∞ R	∞ P2	4R	—2R	$-{}^{1}/_{2}R$	R6	..	..	..	Iacobsglück	S. N. 8, fig. 3, Tav. II.
»	∞ R	∞ P2	4R	—2R	$-{}^{1}/_{2}R$	$R^{19}/_{3}$	..	..	..	—	S. N. 9.

N. d'ordine	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
37	OR	$\infty P2$	$-2R$	$-R^{5}/_{3}$	∞R	R	$-{}^{3}/_{2}R$	$R9$	...	...	—	Rath Pogg. Ann. Bd. 132
38	»	$R3$	$-{}^{1}/_{3}R15$	$R9$	$\infty P2$	$-{}^{1}/_{2}R$	$-2R$	∞R	${}^{2}/_{3}R^{4}/_{3}$	${}^{1}/_{5}R^{11}/_{3}$	—	Hessemb. IX. Heft. S. 20
	Tipo II. — Predomina una forma prismatica											
39	∞R	OR	...	...	...	...	...	...	...	...	—	Romé de l'Isle fig. 18-26 V. 1
40	»	$-{}^{3}/_{10}R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	B. 49
41	»	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
42	»	$-{}^{3}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
43	»	$-2R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
44	»	R	...	...	...	...	...	...	...	...	—	Hauy fig. 16. V. 16
45	»	$4R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
46	$\infty P2$	OR	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
47	»	R	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
48	»	$-2R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
49	∞R	$-{}^{3}/_{10}R$	OR	...	...	...	...	...	...	...	—	B. 50
50	»	$-2R$	OR	...	...	...	...	...	...	...	Sanson	L. V. 49
51	»	$-{}^{1}/_{2}R$	OR	...	...	...	...	...	...	...	—	Hauy fig. 66 V. 41
52	»	$-{}^{3}/_{2}R$	OR	...	...	...	...	...	...	...	—	
53	»	$-{}^{3}/_{2}R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	—	
54	»	$-2R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	Sanson	
55	»	$13R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	Sanson	L. fig. 30 V. 55
56	»	$13R$	$-2R$	...	...	...	...	...	...	...	—	L. fig. 31 V. 56
57	»	$\infty P2$	OR	...	...	...	...	...	...	...	—	L. V. 52
58	»	$-{}^{8}/_{7}R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	—	
59	»	$4R$	R	...	...	...	...	...	...	...	—	
60	»	$4R$	$-2R$	...	...	...	...	...	...	...	—	
61	»	$-14R$	$-2R$	...	...	...	...	...	...	...	—	Haidgr
62	»	OR	$R7$	...	...	...	...	...	...	...	—	
63	»	$-{}^{1}/_{2}R$	$R^{5}/_{3}$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 10
64	»	$R3$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 11
65	»	OR	$-R^{5}/_{3}$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 12
66	»	OR	$R^{11}/_{3}$	...	...	...	...	...	...	...	Felicitas	S. N. 13
67	»	OR	$-2R^{5}/_{3}$	...	...	...	...	...	...	...	—	Haidgr
68	»	$-{}^{1}/_{2}R$	$-{}^{5}/_{4}R^{9}/_{5}$	...	...	...	...	...	...	...	—	Hsm
69	»	$6P2$	OR	...	...	...	...	...	...	...	—	Hauy fig. 72 V. 70
70	»	$-{}^{3}/_{2}R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	—	Hauy fig. 89 V. 83
71	»	$-2R$	$-{}^{2}/_{3}P2$	...	...	...	...	...	...	...	—	Sella Studî ecc. fig. 41
72	$\infty P2$	OR	$-{}^{4}/_{3}P2$	...	...	...	...	...	...	...	Sanson	L. fig. 44 V. 74
73	∞R	OR	$\infty P2$	$-{}^{3}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...		Z.
74	»	OR	${}^{5}/_{2}R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...		L. fig. 61 V. 96
75	»	$-2R$	$4R$	OR	...	...	...	...	...	...		
76	»	OR	$-{}^{1}/_{2}R$	$R3$	...	...	...	...	...	...		

	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
77	∞R	$-^{1}/_{2}R$	$-^{3}/_{2}R$	$^{1}/_{10}R7$	....	....	..	..	..	..	—	Z. fig. 79
78	»	$-^{5}/_{4}R$	$-2R$	$-^{8}/_{7}R^{3}/_{2}$	....	....	..	..	.	..	—	Wimmer Zeit. für die Nat. III 331
79	»	OR	$-2R$	$-^{1}/_{2}R$	....	....	..	..	..	..	—	Hauy fig. 113 V. 108
80	»	OR	$-2R$	$\infty P2$	....	....	..	..	..	..	—	
81	»	$-^{3}/_{2}R$	4R	R3	....	....	..	..	..	..	—	B. 478
82	»	$-R3$	$-^{1}/_{5}R7$	$\infty P2$	....	....	..	..	..	..	—	Hsm
83	»	$-^{1}/_{2}R$	OR	$^{2}/_{5}R2$	....	....	..	..	..	..	—	L. fig. 79 V. 114. Hauy fig. 12 V. 107
84	»	R	$-^{1}/_{2}R$	OR	....	....	..	..	..	..	—	Hauy fig. 105 V. 99
85	»	OR	$-^{1}/_{2}R$	$R^{5}/_{3}$	....	....	..	..	..	..	—	S. N. 14
86	»	$-^{8}/_{7}R2$	$-^{8}/_{7}R$	$-^{1}/_{2}R$	....	....	..	..	..	..	Sanson	S. N. 15
87	»	4R	R4	OR	....	....	..	..	..	..	—	S. N. 16
88	»	OR	$-^{1}/_{2}R$	$^{1}/_{4}R3$	....	....	..	..	..	..	—	
89	$\infty P2$	4R	OR	$R^{13}/_{4}$	....	....	..	..	..	..	—	S. N. 17
90	∞R	$-2R$	R3	4R	OR	....	..	..	..	..	—	S. N. 18
91	»	$^{1}/_{4}R3$	$-^{1}/_{2}R$	$-^{1}/_{2}R3$	R3	....	..	..	..	..	—	Hsm
92	»	$^{2}/_{5}R2$	OR	$-^{1}/_{2}R$	$-^{3}/_{2}R$	....	..	..	..	..	—	Hsm
93	»	R5	OR	4R	$\infty P2$	....	..	..	..	..	—	L. fig. 74 V. 109
94	»	OR	$-^{1}/_{2}R$	$^{2}/_{5}R2$	$-^{7}/_{5}R$	....	..	..	..	..	—	L. fig. 80 V. 115
95	»	OR	$\infty P2$	R7	$-2R2$	....	..	..	..	..	—	L. fig. 126 V. 166
96	»	$-^{1}/_{2}R$	R7	$-2R2$	$\infty P2$	....	..	..	..	..	—	L. fig. 127 V. 167
97	»	$R^{5}/_{3}$	$\infty P2$	$-^{1}/_{2}R$	$^{4}/_{7}R^{3}/_{2}$	....	..	..	..	..	—	Hauy fig. 143 V. 140
98	»	$-R2$	$-R^{5}/_{3}$	$-^{8}/_{7}R$	$-^{1}/_{2}R$	....	..	..	..	..	—	S. N. 19
99	»	OR	4R	$-2R$	R5	....	..	..	..	..	—	S. N. 20
100	»	OR	$R^{5}/_{3}$	$^{1}/_{2}R^{5}/_{3}$	$-^{1}/_{2}R$	....	..	..	..	..	—	S. N. 21
101	»	$\infty P2$	$R^{7}/_{2}$	$-^{1}/_{4}R15$	$-^{1}/_{2}R$	....	..	..	..	..	—	S. N. 22 fig. 9 Tav. II
102	»	R3	$-R$	$^{1}/_{4}R3$	$^{2}/_{3}P2$	....	..	..	..	..	—	Hauy fig. 146 V. 143
103	»	$-^{8}/_{7}R$	OR	4R	$-^{8}/_{7}R^{5}/_{3}$	....	..	..	..	..	—	S. N. 23 fig. 8 Tav. II
104	»	$^{1}/_{10}R7$	OR	$-^{1}/_{2}R3$	$-^{3}/_{2}R$	....	..	..	..	..	—	Hsm
105	»	$\infty P2$	$-2R$	$-^{6}/_{5}R$	$^{1}/_{4}R3$	....	..	..	..	..	Felicitas	S. N. 24
106	»	$-^{8}/_{7}R2$	$-^{8}/_{7}R$	$-^{11}/_{7}R$	$-^{1}/_{2}R$	....	..	..	..	..	Sanson	S. N. 25
107	»	$-^{1}$ R	$^{1}/_{2}R^{5}/_{3}$	$^{2}/_{5}R2$	R	....	..	..	..	..	Sanson	S. N. 26
108	$\infty P2$	$-2R$	OR	$-2R3$	∞R	....	..	..	..	..	—	S. N. 27
109	∞R	OR	$-^{1}/_{2}R$	4R	$^{1}/_{3}R^{7}/_{3}$	....	..	..	..	..	—	S. N. 28
110	»	$-2R$	$-^{1}/_{2}R$	4R	$^{2}/_{5}R2$	....	..	..	..	..	Sanson	S. N. 29
111	»	OR	$R^{7}/_{2}$	10R	$-^{1}/_{4}R15$	....	..	..	..	..	—	S. N. 30
112	»	$-^{1}/_{2}R$	R	4R	$-^{8}/_{7}R^{3}/_{2}$	....	..	..	..	..	Sanson	S. N. 31 fig. 14 Tav. II
113	»	$-^{3}/_{2}R$	$-^{1}/_{2}R$	$^{1}/_{10}R7$	OR	....	..	..	..	..	—	Peters Neu. Ja. 1861. pag. 435
114	$\infty P2$	$-^{1}/_{2}R$	4R	R	∞R	....	..	..	..	..	—	Peters id.
115	∞R	$-^{1}/_{2}R$	R17	4R	R	....	..	..	..	..	—	S. N. 32
116	»	$-2R$	R5	$\infty R2$	OR	....	..	..	..	..	—	Hauy fig. 139 V. 136
117	»	$-^{1}/_{2}R$	R	$^{5}/_{11}R^{9}/_{5}$	OR	....	..	..	..	..	—	S. N. 33
118	»	$-^{1}/_{2}R$	OR	R	$^{1}/_{4}R3$	$^{10}/_{13}R^{13}/_{7}$	..	..	..	..	—	S. N. 34 fig. 12 Tav. II
119	»	OR	4R	$-^{3}/_{2}R$	$\infty P2$	$-^{1}/_{2}R$	..	..	..	..	—	L. fig 128 V. 168
120	»	$-^{7}/_{5}R$	OR	R5	$^{2}/_{5}R2$	$-^{1}/_{2}R$	..	..	..	..	—	L. fig. 136 V. 176
121	»	$-R3$	$-^{2}/_{7}R5$	$-^{1}/_{2}R$	$-^{8}/_{7}R$	$-^{5}/_{2}R$	..	..	..	..	—	Z. fig. 90

N. d'ordine	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
122	∞R	$-\frac{1}{2}R$	$-\frac{8}{7}R2$	R	$-\frac{8}{7}R$	$-2R$	...	..	..	..	Sanson	S. fig. 5 Tav. II
123	»	$4R$	$-\frac{1}{2}R$	R	$-\frac{4}{5}R3$	$-\frac{2}{3}R7$	...	..	..	..	—	S. N. 35 fig. 10 Tav. II
124	»	$R^{5/3}$	$-15R^{17/15}$	$R8$	$4R$	$\frac{1}{4}R3$	...	..	..	..	—	S. N. 36 fig. 7 Tav. II
125	»	OR	R	$-\frac{1}{2}R$	$R^{9/5}$	$R^{17/3}$	$4R$	..	..	..	—	S. N. 37
126	»	OR	$\infty P2$	$-\frac{1}{2}R$	$-2R$	$4R$	$-\frac{1}{2}R5$	..	..	..	—	Z. fig. 75 da Haidinger
127	»	$-\frac{6}{5}R$	$-\frac{1}{2}R$	$-\frac{8}{7}R2$	$R4$	$4R$	OR	..	..	..	—	S. N. 38
128	»	OR	$-2R$	$\frac{4}{3}P2$	$-\frac{5}{4}R3$	$-\frac{1}{2}R$	$R12$	..	..	..	—	S. N. 39 fig. 13 Tav. I
129	»	$-2R$	R	$-\frac{1}{2}R$	$4R$	$R^{11/8}$	$R^{5/3}$	OR	..	..	Sanson	S. N. 40 fig. 11 Tav. II
130	»	$-\frac{13}{8}R$	R	$-\frac{1}{2}R$	$R^{5/3}$	$R^{11/8}$	$4R$	$R5$	..	..	Sanson	S. N. 41
131	$\infty P2$	R	$-\frac{4}{3}R$	$-2R$	OR	$6P2$	$-2R3$	∞R	$-\frac{1}{2}R$	..	—	S. N. 42 fig. 6 Tav. II
132	∞R	$-\frac{1}{2}R$	$4R$	$\frac{1}{2}R^{5/3}$	$R3$	$R5$	R	$\infty P2$	$R^{5/3}$	..	—	Z. fig. 81
	Tipo III. — Predomina un romboedro acuto											
133	$-5R$	...	.....	...	...	...	...	..	..	..	Prinz Maximilian	L. V. 7
134	$-10R$	OR	.....	...	...	...	...	..	..	..	—	S. N. 43
135	$-11R$	OR	.....	...	...	...	...	..	..	..	Jacobsglück	S. N. 44
136	$-13R$	OR	.....	...	...	...	...	..	..	..	Jacobsglück	S. N. 45
137	$-14R$	OR	.....	...	...	...	...	..	..	..	Bergman-trast	B. 255 Hauy V. 138 L. V
138	»	$-\frac{1}{2}R$	.....	...	...	...	...	..	..	..		Hauy
139	»	$-2R$	.....	...	...	...	...	..	..	..	—	B. 256
140	»	$-\frac{11}{4}R$	.....	...	...	...	...	..	..	..	—	B. 257
141	»	OR	$-\frac{1}{2}R$	...	...	...	...	..	..	..	—	Hsm
142	»	OR	$-2R$	...	...	...	...	..	..	..	—	Hauy fig. 71 V. 69
143	»	$-\frac{1}{2}R$	$\infty R9$	...	...	...	...	..	..	..	—	B. 271
144	$-5R$	$-\frac{1}{2}R$	OR	...	...	...	...	..	..	..	—	Hauy fig. 67
145	$16R$	$-\frac{1}{2}R$	$-\frac{6}{5}R^{13/3}$	...	...	...	...	..	..	..	—	S. N. 46 fig. 15 Tav. II
146	$-14R$	$-\frac{3}{2}R$	$R5$	$-2R$	...	...	...	..	..	..	—	Hsm
147	»	OR	$-\frac{3}{2}R$	$R5$	...	...	...	..	..	..	—	Hsm
148	»	OR	$-2R$	$R5$	...	...	...	..	..	..	—	
149	»	$-\frac{1}{2}R$	$R7$	∞R	...	...	...	..	..	..	—	L. fig. 86 V. 123
150	»	OR	$-2R$	$\infty P2$	$-\frac{1}{2}R$	...	...	..	..	..	—	L. fig. 99 V. 138
	Tipo IV. — Predomina un romboedro medio											
151	R	...	.....	...	...	...	...	..	..	..	Sanson	
152	$-R$	...	.....	...	...	...	...	..	..	..	Felicitas	
153	$-\frac{3}{2}R$	...	.....	...	...	...	...	..	..	..	Sanson	Hauy fig. 9. L. V. 5

N. d'ordine	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
154	$-2R$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
155	$-{}^{11}/_{7}R$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
156	$4R$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	Sanson	
157	$-{}^{3}/_{2}R$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	...	Abendröthe	Hauy fig. 24 V. 24 L. V. 13
158	$-{}^{3}/_{2}R$	∞R	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
159	$-{}^{5}/_{4}R$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
160	$-2R$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
161	$-2R$	∞R	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
162	$-2R$	$4R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
163	$-R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
164	$4R$	∞R	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
165	»	$R5$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	Z.
166	»	$R3$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
167	$-2R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
168	$-2R$	$R3$	...	...	...	...	...	...	...	...	—	
169	$-{}^{5}/_{4}R$	∞R	...	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 47
170	R	$-{}^{1}/_{2}R$	∞R	...	...	...	...	...	...	...	Bergmantrast	L. V. 47
171	»	$-{}^{1}/_{2}R$	$\infty P2$	...	...	...	...	...	...	...	—	
172	»	$4R$	$R7$	...	...	...	...	...	...	...	—	Z. fig. 63 da Haidinger
173	»	$-{}^{1}/_{2}R$	$4R$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 48
174	»	$R16$	∞R	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 49 fig. 16 Tav. III
175	$-R$	$\infty P2$	∞R	...	...	...	...	...	...	...	—	
176	$-{}^{3}/_{2}R$	∞R	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	—	L. fig. 28 V. 50
177	»	$-{}^{1}/_{2}R$	${}^{2}/_{3}P2$	...	...	...	...	...	...	...	Guadegottes	L. fig. 42 V. 72
178	»	$0R$	$\infty P2$	...	...	...	...	...	...	...	—	
179	»	∞R	$-{}^{5}/_{4}R^{7}/_{5}$	...	...	...	...	...	...	...	Sanson	L. fig. 45 V. 75
180	$-{}^{9}/_{5}R$	$-{}^{13}/_{9}R$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 50
181	$-2R$	∞R	$R3$	...	...	...	...	...	...	...	—	L. V. 64
182	»	$4R$	$R3$	...	...	...	...	...	...	...	—	L. V. 65
183	»	∞R	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	—	
184	»	$4R$	$R5$	...	...	...	...	...	...	...	—	
185	»	$4R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	—	B. 175
186	»	$13R$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	—	Hauy fig. 70 V. 68
187	»	$0R$	$-{}^{4}/_{5}R2$	...	...	...	...	...	...	...	Franz August	S. N. 51 fig. 18 Tav. III
188	»	$4R$	$R13$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 52
189	»	$4R$	$-{}^{12}/_{5}R$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 53 fig. 17 Tav. III
190	»	${}^{2}/_{3}P2$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	Sanson	L. V. 89
191	»	$-{}^{8}/_{7}R$	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	...	...	...	...	...	—	
192	»	∞R	$\infty P2$	...	...	...	...	...	...	...	—	
193	$-{}^{7}/_{2}R$	$-5R$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	Abendröthe	L. V. 6
194	$4R$	$-2R$	$0R$	...	...	...	...	...	...	...	—	
195	»	$R5$	$\infty P2$	...	...	...	...	...	...	...	—	Z. fig. 27
196	»	$\infty P2$	$R9$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 54
197	»	$R3$	$R^{13}/_{3}$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 55
198	»	$R7$	$R3$	...	...	...	...	...	...	...	—	S. N. 56
199	»	R	$R7$	...	...	...	...	...	...	...	—	Z. fig. 63 da Haidinger.

N. d'ordine	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
200	—R	∞ R	∞ P2	OR	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 60 V. 95
201	—$^3/_2$R	OR	∞ R	∞ P2	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Hsm
202	—$^3/_2$R	—$^1/_2$R	R3	R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Hdgr
203	—2R	OR	∞ R	∞ P2	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 59 V. 42
204	»	∞ R	R5	∞ P2	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. V. 111 fig. 76
205	»	—$^7/_3$R	—$^5/_4$R$^7/_5$	OR	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 96 V. 135
206	»	∞ R	∞ P2	—$^1/_2$R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . ,	—	L. V. 93
207	»	4R	R	—$^1/_2$R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 57
208	»	R3	R	4R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 58
209	»	∞ R	OR	—$^1/_2$R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	Sanson	S. N. 59
210	»	OR	∞ R	∞ P2	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 60
211	»	OR	—$^3/_2$R	—$^5/_4$R$^9/_5$	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Hsm
212	»	∞ P2	—$^3/_2$R	R$^5/_3$	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	
213	»	4R	R5	∞ P2	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Z. fig. 21
214	»	∞ R	—$^1/_2$R	4R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 61
215	»	4R	∞ R	R5	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 62
216	»	—$^3/_2$R	—$^{36}/_{35}$R2	OR	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Rath Pogg. Ann. Bd. 132
217	4R	R3	R7	∞ R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 72 V. 107
218	»	∞ R	∞ P2	R7	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 78 V. 113
219	»	∞ R	∞ P2	OR	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. V. 93
220	»	∞ R	—$^8/_7$R2	∞ P2	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 88 V. 126
221	»	OR	∞ R	—2R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 63
222	»	OR	∞ R	∞ P2	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 64
223	»	—$^1/_2$R	R9	∞ R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Hsm
224	»	∞ R	R3	—$^1/_2$R	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Hauy fig. 123 V. 118
225	»	OR	R3	—R$^7/_3$	. .	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Z. fig. 28 da Hdgr
226	—2R	R3	—$^1/_2$R	—$^1/_3$R7	$^1/_3$R$^7/_3$	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 65
227	»	R	∞ R	OR	—$^1/_2$R	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 58 V. 91
228	»	OR	—$^3/_2$R	∞ P2	—R$^5/_3$	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	Hauy fig. 138 V. 135
229	»	R	∞ P2	—$^1/_2$R	OR	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	S. N. 66
230	4R	OR	—2R	∞ P2	R7	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 155 V. 195
231	»	∞ R	OR	R7	—5R	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	B.
232	»	OR	R7	∞ R	R3	. .	. .	. . .	. .	. . .	—	B. 212
233	—$^{13}/_8$R	OR	—$^1/_2$R	R	∞ R	∞ P2	. .	. . .	. .	. . .	—	B.
234	—2R	OR	4R	∞ P2	R7	∞ R	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 135 V. 175.
235	»	∞ R	—$^1/_2$R	∞ P2	R5	OR	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 77 V. 112
236	»	OR	∞ P2	$^2/_5$R2	—$^1/_2$R	$^2/_5$R	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 134 V. 174
237	4R	R	∞ R	R7	R4	R3	. .	. . .	. .	. . .	Sanson	S. N. 67
238	»	OR	∞ R	∞ P2	R7	—2R3	. .	. . .	. .	. . .	—	L. fig. 143 V. 183
239	4R	OR	—$^3/_2$R	—$^1/_2$R	R3	∞ P2	∞ R	. . .	. .	. . .	—	Z. fig. 30
240	»	OR	—2R	∞ R	∞ P2	R7	—2R3	. . .	. .	. . .	—	Z. fig. 32
241	4R	OR	∞ R	∞ P2	R3	$^1/_4$R3	R7	—$^4/_5$R3	. .	. . .	—	L. fig. 156 V. 196
242	—$^{13}/_8$R	R	∞ R	—$^1/_2$R	OR	4R	R$^4/_3$	R$^5/_3$	R$^{16}/_3$	$^5/_8$R$^7/_5$	—	Hessemberg Neue Folg. II Heft

N. d'ordine	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
	Tipo V. — Predomina un romboedro ottuso											
243	$-{}^{1}/_{2}R$	...	...	....	..	..	..	...	...	..	—	Hauy fig. 2 V. 2
244	»	∞R	...	....	..	..	..	...	...	..	—	
245	»	$0R$	...	....	..	..	..	...	...	..	—	
246	»	∞R	$0R$	....	..	..	..	...	...	..	Sanson	L. V. 48
247	»	R	$\infty P2$	....	..	..	..	...	...	..	—	
248	$-{}^{1}/_{5}R$	∞R	$\infty P2$	$R3$	..	..	..	...	...	..	—	L. V. 81
249	$-{}^{1}/_{2}R$	${}^{8}/_{11}R^{5}/_{4}$	${}^{7}/_{10}R^{9}/_{7}$	$0R$	..	..	..	...	...	..	—	S. N. 68 fig. 19 Tav. III
250	$-{}^{4}/_{5}R$	$0R$	∞R	$\infty P2$	..	..	..	...	...	..	—	B. fig. 213
	Tipo VI. — Predomina uno scalenoedro ottuso											
251	${}^{4}/_{7}R^{3}/_{2}$	$R3$	$R4$	....	..	..	..	...	...	..	Sanson	S. N. 69
252	${}^{2}/_{5}R2$	$-{}^{1}/_{2}R$	∞R	....	..	..	..	...	...	..	Sanson	S. N. 70
253	${}^{1}/_{3}R^{7}/_{3}$	∞R	$-2R$	....	..	..	..	...	...	..	—	S. N. 71
254	${}^{7}/_{10}R^{9}/_{7}$	${}^{4}/_{5}R^{7}/_{6}$	$R^{3}/_{2}$	....	..	..	..	...	...	..	—	S. N. 72
255	${}^{4}/_{7}R^{3}/_{2}$	$R^{5}/_{3}$	$28R$	....	..	..	..	...	...	..	Gnade Gottes	S. N. 73
256	${}^{5}/_{11}R^{9}/_{5}$	∞R	$R^{5}/_{3}$	....	..	..	..	...	...	..	—	S. N. 74
257	${}^{7}/_{10}R^{9}/_{7}$	$R3$	$6P2$	$\infty P2$	..	..	..	...	...	..	—	Z. fig. 50
258	${}^{1}/_{3}R^{7}/_{3}$	$-{}^{1}/_{2}R$	∞R	$-R2$	$-{}^{8}/_{7}R$	..	..	...	...	..	—	S. N. 75 fig. 28 Tav. III
259	${}^{4}/_{7}R^{3}/_{2}$	$\infty P2$	$4R$	R	$R^{11}/_{3}$	..	..	...	...	..	—	S. N. 76
260	${}^{2}/_{5}R2$	${}^{1}/_{3}R^{7}/_{3}$	$-R^{5}/_{3}$	$-{}^{9}/_{5}R$	∞R	..	..	...	...	..	—	S. N. 77
261	${}^{1}/_{2}R^{5}/_{3}$	$R^{12}/_{7}$	$R7$	$28R$	R	$-{}^{1}/_{2}R$	..	...	...	..	—	S. N. 78 fig. 27 Tav. III
262	»	$R^{3}/_{2}$	$-{}^{8}/_{7}R2$	$4R$	∞R	$-{}^{8}/_{7}R$	..	...	...	..	—	S. N. 79
263	${}^{2}/_{5}R2$	$R9$	$R^{3}/_{2}$	∞R	$\infty P2$	R	..	...	...	..	—	Hauy fig. 154 V. 53
264	${}^{4}/_{7}R^{3}/_{2}$	${}^{1}/_{2}R^{5}/_{3}$	$R^{5}/_{3}$	$R11$	∞R	$4R$	..	...	...	..	—	S. N. 80
265	${}^{2}/_{5}R2$	$-2R2$	$4R$	∞R	$-2R$	$-{}^{8}/_{7}R$	$R3$	...	...	..	—	S. N. 81
266	»	$R^{3}/_{2}$	R	$-{}^{1}/_{3}R^{5}/_{3}$	$-2R$	∞R	$-{}^{1}/_{2}R$	$4R$	...	..	—	S. N. 82 fig. 29 Tav. III
267	${}^{1}/_{2}R^{5}/_{3}$	∞R	$4R$	$-{}^{1}/_{2}R$	R	$R^{5}/_{3}$	$R3$	$R5$	$\infty P2$	..	—	Z. fig. 81
	Tipo VII. — Predomina uno scalenoedro medio											
268	$R3$	...	...	....	..	..	..	...	...	..	—	
269	$-{}^{8}/_{7}R2$	...	...	....	..	..	..	...	...	..	—	

N. d'ordine	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
270	R3	4R	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	
271	»	∞R	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	
272	»	${}^{3}/_{5}R^{13}/_{9}$	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 83 fig, 20 Tav. II
273	$-{}^{5}/_{4}R^{17}/_{11}$	$-{}^{5}/_{4}R$	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	Hessemberg Neue Folge VIII Heft
274	R4	∞R	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	
275	R5	4R	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	Hauy fig. 48 V. 46
276	»	∞R	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	Sanson	L. fig. 18 V. 35
277	»	$-{}^{7}/_{2}R$	. . . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	Bergmantrost	L. V. 36
278	$-{}^{5}/_{6}R^{9}/_{5}$	$-{}^{1}/_{2}R$	$-2R$	, . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	Franz August	S. N. 84 fig. 22 Tav. II
279	$-{}^{7}/_{6}R^{20}/_{7}$	$-2R$	$-{}^{1}/_{2}R$	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 85 fig, 23 Tav. II
280	$-2R^{3}/_{2}$	R4	∞R	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 86 fig. 24 Tav II
281	R3	∞R	4R	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	Hausmann
282	»	$-2R$	4R	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 87
283	»	4R	${}^{5}/_{8}R^{7}/_{5}$	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	Z. fig. 33 da Hsm
284	R4	∞R	$-2R3$	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 88
285	R5	0R	$-2R$	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	Hsm
286	»	∞R	$-2R2$	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	L. fig. 47 V. 78
287	»	4R	$-{}^{11}/_{4}R$	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 89
288	»	${}^{1}/_{3}R^{7}/_{3}$	13R	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	Descloiséaux fig. 269
289	»	$\infty P2$	$-2R2$	. . .	. . .	. . .	. .	. :	.	.	—	Hauy fig. 102 V. 96
290	${}^{16}/_{2}R2$	4R	R11	. . .	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	L. fig. 24 V. 43
291	$-2R^{5}/_{3}$	0R	∞R	$-2R$	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	Z. fig. 71 da Hdgr
292	$-R^{7}/_{3}$	∞R	R9	4R	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 90
293	$R^{13}/_{3}$	R3	${}^{5}/_{11}R^{9}/_{5}$	4R	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	S. N. 91
294	R4	R3	${}^{5}/_{1\cdot}R^{9}/_{5}$	$-{}^{1}/_{2}R$	. . .	. . .	. .	. .	.	.	Bergmantrost	S. N. 92
295	R5	0R	∞R	$\infty P2$	. . .	. . .	. .	. .	.	.	—	L. fig. 73
296	»	4R	$-{}^{5}/_{4}R^{7}/_{5}$	0R	. . .	. . .	. .	. .	.	.	Bergmantrost	S. N. 93
297	»	R4	4R	∞R	. . .	. . .	. .	. .	.	.	Sanson	S. N. 94
298	»	4R	$-{}^{7}/_{2}R$	0R	. . .	. . .	. .	. .	.	.	Abendröthe	S. N. 95
299	$-{}^{8}/_{7}R2$	$-{}^{8}/_{7}R$	0R	$-2R$	$\infty P2$	. . .	. .	. .	.	.	—	Z. fig. 70
300	$-{}^{6}/_{5}R^{5}/_{3}$	0R	4R	∞R	$-{}^{1}/_{2}R$	. . .	. .	. .	.	.	Bergmantrost	S. N. 96 fig. 25 Tav. II
301	$-{}^{7}/_{6}R^{13}/_{7}$	$-{}^{27}/_{26}R^{13}/_{9}$	$-2R$	∞R	$-{}^{11}/_{4}R$	. . .	. .	. .	.	.	Bergmantrost	S. N. 97 fig. 21 Tav. II
302	$R^{11}/_{3}$	4P2	∞R	$\infty P2$	0R	. . .	. .	. .	.	.	—	Hauy fig. 141 V. 138
303	R5	R	4R	R3	∞R	. . .	. .	. .	.	.	—	Mohs II 64
304	»	0R	$-2R$	∞R	$\infty P2$	. . .	. .	. .	.	.	—	Hsm
305	»	0R	$-2R$	$-{}^{7}/_{2}R$	4R	. . .	. .	. .	.	.	—	Z. fig. 62 da Hdgr
306	$-{}^{8}/_{7}R2$	∞R	4R	$-2R$	$-{}^{1}/_{2}R$	$-{}^{6}/_{5}R$	. .	. .	.	.	Sanson	S. N. 98
307	$-{}^{1}/_{5}R7$	$-{}^{8}/_{7}R2$	∞R	$-{}^{8}/_{7}R$	$-2R$	$-{}^{4}/_{3}R$	. .	. .	.	.	?	S. N. 99
308	$-R^{7}/_{3}$	$-{}^{2}/_{3}R^{7}/_{3}$	0R	$-{}^{6}/_{5}R$	$-2R$	$\infty P2$	. .	. .	.	.	?	Naumann Pogg. Ann. XI
309	R5	R	${}^{4}/_{7}R^{3}/_{2}$	$R^{5}/_{3}$	4R	$-{}^{1}/_{2}R$	. .	. .	.	.	Sanson	S. N. 100
310	$R^{13}/_{3}$	R5	R	$\infty P2$	4R	${}^{2}/_{3}R2$	. .	. .	.	.	Sanson	S. N. 101
311	R5	R12	4R	${}^{2}/_{3}R^{4}/_{3}$	∞R	$-11R$	$-9R$	. .	.	.	Bergmantrost	S. N. 102

N. d'ordine	SIMBOLO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
312	R5	OR	4R	R3	∞ R	—2R	∞ P2	. .	. . .	. . .	—	S. N. 103
313	—$^1/_5$R7	—$^2/_3$R	—R$^7/_3$	—$^5/_4$R	∞ R	—2R	OR	. .	. . .	. . .	—	S. N. 104
314	R5	∞ R	R3	—$^1/_2$R	$^4/_7$R$^3/_2$	4R	R$^3/_2$	$^5/_2$R	. . .	. . . .	—	Z. fig. 61
	Tipo VIII. — Predomina uno scalenoedro acuto											
315	R$^{19}/_3$	. . .	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	
316	R7	. . .	. . .	. .	. . .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	Iacobsglük	
317	R8	. . .	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	Iacobsglük	S. N. 105
318	R9	. . .	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	Iacobsglük	
319	R11	. . .	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	?	
320	R13	. . .	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	Iacobsglük	S. N. 106
321	R7	—5R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Rath
322	»	R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
323	»	$^2/_3$R2	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
324	»	—13R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	Iacobsglük	S. N. 107
325	»	—$^{11}/_4$R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	S. N. 108
326	»	R11	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	S. N. 109
327	R8	—$^{11}/_4$R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	Iacobsglük	S. N. 110 fig. 26 Tav. III
328	R9	OR	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	
329	R11	—$^1/_4$R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
330	»	—2R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	L. fig. 19 V. 37
331	»	R17	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	S. N. 111
332	»	—5R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	
333	R12	—$^1/_2$R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
334	»	$^5/_2$R	. . .	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
335	R$^{19}/_3$	∞ P2	5R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Rath
336	R7	OR	∞ R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
337	»	4R	R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Z. fig. 63 da Hdgr
338	»	4R	∞ R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
339	»	R	$^2/_5$R2	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	Iacobsglük	Hsm
340	R9	4R	—2R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	S. N. 112
341	»	—$^3/_2$R	4R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Z. fig. 64
342	»	—14R	—$^1/_2$R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	B. 271. L. V. 81
343	»	4R	R3	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hauy fig. 103. V. 97
344	»	OR	4R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	B. 518
345	R12	—$^1/_2$R	R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
346	»	OR	4R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
347	»	—2R	4R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Hsm
348	R13	4R	—2R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	S. N. 113
349	6P2	∞ R	OR	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	Iacobsglük	L. V. 79
350	»	R$^7/_5$	—$^1/_2$R	. .	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	L. fig. 54 V. 86
351	R$^{19}/_3$	5R	—$^9/_2$R	∞ P2	. . .	. .	. .	. .	. . .	. . .	—	Rath

N. d'ordine	ELENCO DELLE FORME COMPONENTI LA COMBINAZIONE										Miniera da cui provennero	AUTORE
352	R9	R	—2R	4P2	. .	. . .	. .	. . . .	. . .	. . .	—	L. fig. 115 V. 155
353	R12	OR	4R	R5	. .	. . .	. .	. . . .	. . .	. . .	—	Naumann
354	$^{16}/_{3}P2$	∞ R	$—^{1}/_{2}R$	OR	. .	. . .	. .	. . . .	. . .	. . .	—	Rath
355	R12	OR	4R	∞ P2	. .	. . .	. .	. . . .	. . .	. . .	—	Hsm
356	R13	—2R	4R	R	. .	. . .	. .	. . . .	. . .	. . .	Iacobsglük	S. N. 114
357	»	OR	$—^{1}/_{3}R$	$—^{3}/_{2}R$	4R	∞ R	. .	. . . .	. . .	. . .	—	Hsm
358	R7	—8R5	—2R	4R	R5	—25R	R	. . . .	. . .	. . .	—	Hessemberg Neue Fol VIII Heft
359	R12	R5	R2	$^{1}/_{5}R^{11}/_{3}$	R	$—^{1}/_{2}R$	∞ R	. . . .	. . .	. . .	Iacobsglük	S. N. 115

QUADRO N. II

	N. d'ordine	SIMBOLO Miller-Bravais	Naumann	FREQUENZA DELLE FORME nei varî tipi I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	FREQUENZA DELLE FORME nelle varie combinazioni 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Primo osservatore
	1	$10\bar{1}0$	∞R	20	89	1	41	4	11	22	6	.	16	46	47	42	18	14	7	3	2	Romé de l'Isle
Φ	2	$28\,0\,\overline{28}1$	$28R$	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	Sansoni
Φ	3	$16\,0\,\overline{16}1$	$16R$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
	4	$13\,0\,\overline{13}1$	$13R$	1	2	.	1	.	.	1	.	.	.	4	.	1	.	.	.	.	.	Bournon
Φ	5	$10\,0\,\overline{10}1$	$10R$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
	6	$50\bar{5}1$	$5R$	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	Rath
	7	$40\bar{4}1$	$4R$	10	25	.	42	.	6	21	14	1	7	30	31	18	12	11	5	2	1	Bournon
	8	$50\bar{5}2$	${}^{5}/_{2}R$	.	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	Levy
	9	$10\bar{1}1$	R	3	16	.	14	1	5	3	8	1	3	12	6	9	8	3	4	3	1	Bournon
	10	0001	$0R$	38	49	10	39	4	.	13	9	.	15	40	48	32	10	11	3	1	2	Romé de l'Isle
	11	$01\bar{1}5$	$-{}^{1}/_{5}R$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Levy
O	12	$01\bar{1}4$	$-{}^{1}/_{4}R$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	Hausmann
O	13	$01\bar{1}3$	$-{}^{1}/_{3}R$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	Hausmann
	14	$03\bar{3}10$	$-{}^{3}/_{10}R$	1	2	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	Bournon
	15	$01\bar{1}2$	$-{}^{1}/_{2}R$	18	50	7	23	6	4	7	6	1	8	31	27	25	12	9	4	3	2	Romé de l'Isle
Φ	16	$02\bar{2}3$	$-{}^{2}/_{3}R$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Sansoni
	17	$04\bar{4}5$	$-{}^{4}/_{5}R$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Bournon
	18	$01\bar{1}1$	$-R$	1	1	.	4	.	.	.	.	1	1	2	1	1	.	.	.	.	.	Hauy
	19	$08\bar{8}7$	$-{}^{8}/_{7}R$	.	7	.	1	.	3	2	.	.	.	2	1	5	4	1	.	.	.	Zippe
	20	$06\bar{6}5$	$-{}^{6}/_{5}R$	.	2	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	1	2	1	.	.	.	Naumann
	21	$05\bar{5}4$	$-{}^{5}/_{4}R$	.	1	.	2	.	.	2	.	.	3	.	1	.	.	1	.	.	.	Wimmer
Φ	22	$04\bar{4}3$	$-{}^{4}/_{3}R$	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	Sansoni
	23	$07\bar{7}5$	$-{}^{7}/_{5}R$	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	Levy
✳	24	$0\,13\,\overline{13}9$	$-{}^{13}/_{9}R$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
	25	$03\bar{3}2$	$-{}^{3}/_{2}R$	2	11	2	14	.	.	.	2	1	3	8	11	4	2	1	1	.	.	Bournon
	26	$0\,11\,\overline{11}7$	$-{}^{11}/_{7}R$	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Hessemberg
	27	$0\,13\,\overline{13}8$	$-{}^{13}/_{8}R$	1	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	1	Bournon
✳	28	$09\bar{9}5$	$-{}^{9}/_{5}R$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
	29	$02\bar{2}1$	$-2R$	14	23	5	43	.	3	13	7	1	10	31	25	19	7	10	3	1	1	Romé de l'Isle
Φ	30	$0\,12\,\overline{12}5$	$-{}^{12}/_{5}R$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
	31	$05\bar{5}2$	$-{}^{5}/_{2}R$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	Zippe
	32	$0\,11\,\overline{11}4$	$-{}^{11}/_{4}R$	.	.	1	.	.	.	2	2	.	3	1	.	1	.	.	.	.	.	Bournon
	33	$07\bar{7}2$	$-{}^{7}/_{2}R$	.	.	.	1	.	.	2	1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	Levy
	34	$09\bar{9}2$	$-{}^{9}/_{2}R$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Rath
	35	$05\bar{5}1$	$-5R$	2	.	2	2	.	.	.	2	1	2	4	.	1	.	.	.	.	.	Bournon
	36	$08\bar{8}1$	$-8R$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	Levy

N. d'ordine	SIMBOLO Miller-Bravais	Naumann	FREQUENZA DELLE FORME nei varî tipi I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	FREQUENZA DELLE FORME nelle varie combinazioni 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Primo osservatore
✱ 37	$09\bar{9}1$	—9R	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Sansoni
✱ 38	$0\ 10\ \overline{10}1$	—10R	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
Φ 39	$0\ 11\ \overline{11}1$	—11R	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	Sansoni
✱ 40	$0\ 13\ \overline{13}1$	—13R	.	.	1	.	.	.	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
41	$0\ 14\ \overline{14}1$	⌿—14R	.	1	12	.	.	.	.	1	.	4	4	4	1	.	.	.	.	.	Bournon
O 42	$0\ 25\ \overline{25}1$	—25R	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Hessemberg
Scalenoedri della zona principale $11\bar{2}0:10\bar{1}1$																					
43	$11\bar{2}3$	$^2/_3$P2	.	2	.	2	.	.	.	.	.	.	3	.	1	.	.	.	.	.	Hauy
44	$4\ 3\ \bar{7}10$	$^1/_{10}$R7	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	Hausmann
45	$7\ 4\ \overline{11}\ 15$	$^1/_5$R$^{11}/_3$	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1		1	Hessemberg
46	$21\bar{3}4$	$^1/_4$R3	1	6	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	3	2	1	1	.	.	Hauy
47	$52\bar{7}9$	$^1/_3$R$^7/_3$	1	1	.	1	.	3	1	.	.	.	2	1	4	.	.	.	.	.	Sella
48	$31\bar{4}5$	$^2/_5$R2	.	6	.	1	.	5	1	2	.	1	2	1	5	4	1	1	.	.	Hauy
Φ 49	$7\ 2\ \bar{9}11$	$^5/_{11}$R$^9/_5$	.	1	.	.	.	1	2	.	.		1	2	1	.	.	.	.	.	Sansoni
50	$41\bar{5}6$	$^1/_2$R$^5/_3$	.	3	.	.	.	4	.	.	.	.	.	.	2	3	.	.	2	.	Zippe
51	$51\bar{6}7$	$^4/_7$R$^3/_2$	.	2	.	.	.	4	2	.	.	.	2	.	2	2	.	1	.	.	Hauy
✱ 52	$11\ 2\ \overline{13}\ 15$	$^3/_5$R$^{13}/_9$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
53	$61\bar{7}8$	$^5/_8$R$^7/_5$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	Hausmann
54	$71\bar{8}9$	$^2/_3$R$^4/_3$	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	Hessemberg
55	$8\ 1\ \bar{9}10$	$^7/_{10}$R$^9/_7$	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	Zippe
✱ 56	$9\ 1\ \overline{10}\ 11$	$^8/_{11}$R$^5/_4$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Sansoni
Φ 57	$13\ 1\ \overline{14}\ 15$	$^4/_5$R$^7/_6$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
58	$71\bar{8}6$	R$^4/_3$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	Hessemberg
✱ 59	$19\ 3\ \overline{22}\ 16$	R$^{11}/_8$	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	Sansoni
60	$61\bar{7}5$	R$^7/_5$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Levy
61	$51\bar{6}4$	R$^3/_2$	.	.	.	.	.	4	1	.	.	.	1	.	.	2	.	2	.	.	Hauy
62	$41\bar{5}3$	R$^5/_3$	.	9	.	2	.	4	1	.	.	.	4	2	2	3	.	2	2	1	Bournon
✱ 63	$19\ 5\ \overline{24}\ 14$	R$^{12}/_7$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	Sansoni
64	$72\bar{9}5$	R$^9/_5$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Hessemberg
O 65	$31\bar{4}2$	R2	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	Sansoni
66	$21\bar{3}1$	R3	3	7	.	16	1	4	12	1	1	5	10	12	6	1	4	2	2	1	Bournon
Φ 67	$17\ 9\ \overline{26}8$	R$^{13}/_4$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Sansoni
✱ 68	$9\ 5\ \overline{14}4$	R$^7/_2$	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	Sansoni
69	$7\ 4\ \overline{11}3$	R$^{11}/_3$	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	2	.	.	.	.	.	Hauy
70	$53\bar{8}2$	R4	1	2	.	1	.	1	5	.	.	1	3	3	1	1	1	.	.	.	Hausmann

N. d'ordine	SIMBOLO Miller-Bravais	Naumann	FREQUENZA DELLE FORME nei varî tipi I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	FREQUENZA DELLE FORME nelle varie combinazioni 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Primo osservatore
Φ 71	8 5 $\overline{13}$ 3	$R^{13}/_{3}$	1	.	.	1	.	2	.	.	.	.	1	2	.	1	.	.	.	.	Sansoni
72	32$\bar{5}$1	R5	5	6	3	7	.	1	20	3	.	4	8	13	8	4	4	2	2	.	Hauy
73	19 13 $\overline{32}$6	$R^{16}/_{3}$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	Hessemberg
Φ 74	10 7 $\overline{17}$3	$R^{17}/_{3}$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	Sansoni
⚹ 75	7 5 $\overline{12}$2	R6	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Sansoni
76	11 8 $\overline{19}$3	$R^{19}/_{3}$	1	.	.	.	.	.	.	3	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	Rath
⚹ 77	23 17 $\overline{40}$6	$R^{20}/_{3}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1		.	.	.	.	.	Sansoni
78	43$\bar{7}$1	R7	2	3	1	15	.	1	.	12	1	6	8	5	7	4	2	1	.	.	Monteiro
⚹ 79	9 7 $\overline{16}$2	R8	.	1	.	.	.	.	.	2	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	Sansoni
80	54$\bar{9}$1	R9	2	.	.	2	.	1	1	8	1	1	6	3	.	1	.	1	.	1	Bournon
81	6 5 $\overline{11}$1	R11	.	.	.	.	.	1	1	6	1	5	1	.	.	1	.	.	.	.	Levy
82	13 11 $\overline{24}$2	R12	1	1	.	.	.	.	1	8	.	2	3	2	1	.	2	1	.	.	Hausmann
Φ 83	7 6 $\overline{13}$1	R13	.	.	.	1	.	.	.	4	1	.	2	1	.	1	.	.	.	.	Sansoni
⚹ 84	17 15 $\overline{32}$2	R16	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
Φ 85	9 8 $\overline{17}$1	R17	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1		.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
86	11$\bar{2}$0	∞ P2	15	21	1	29	3	4	8	3	.	4	14	26	18	9	7	2	3	1	Romé de l'Isle
	Piramidi e Scalenoedri positivi che non sono compresi nella zona precedente																				
87	22$\bar{4}$3	$^{4}/_{3}$P2	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	Levy
88	22$\bar{4}$1	4P2	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	Hauy
89	24 8 $\overline{32}$ 7	$^{16}/_{7}$R2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Levy
90	8 8 $\overline{16}$ 3	$^{16}/_{3}$P2	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Rath
91	3 3 $\bar{6}$ 1	6P2	.	2	.	.	.	1	.	2	.	.	3	1	.	.	.	.	.	1	Hauy
⚹ 92	70 21 $\overline{91}$13	$^{49}/_{13}R^{13}/_{7}$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	1	.	.	.	.	Sansoni
	Scalenoedri negativi della zona 02$\bar{2}$1 : 10$\bar{1}$1																				
93	34$\bar{7}$5	$-^{1}/_{5}$R7	.	1	.	1	.	.	2	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	Hausmann
94	4 6 $\overline{10}$7	$-^{2}/_{7}$R5	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	Hausmann
95	12$\bar{3}$2	$-^{1}/_{2}$R3	.	2	.	.	.	.	.				.	.	2	.	.	.	.	.	Hausmann
96	4 10 $\overline{14}$9	$-^{2}/_{3}R^{7}/_{3}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	Naumann
⚹ 97	26$\bar{8}$5	$-^{4}/_{5}$R2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
98	14$\bar{5}$3	$-R^{5}/_{3}$	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	3	.	.	1	.	.	Hauy
99	2 10 $\overline{12}$7	$-^{8}/_{7}R^{3}/_{2}$	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	Wimmer
100	16$\bar{7}$4	$-^{5}/_{4}R^{7}/_{5}$	.	.	.	2	.	.	1	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	Levy
Φ101	15$\bar{6}$2	$-2R^{3}/_{2}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni

N. d'ordine	SIMBOLO Miller-Bravais	Naumann	FREQUENZA DELLE FORME nei vari tipi								FREQUENZA DELLE FORME nelle varie combinazioni										Primo osservatore
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
102	2 8 $\overline{10}$3	$-2R^{5}/_{3}$	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	Haidinger
103	13$\bar{4}$1	$-2R2$	.	2	.	.	.	1	2	.	.	.	2	.	2	.	1	.	.	.	Hauy
104	24$\bar{6}$1	$-2R3$	.	2	.	2	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	1	.	1	.	Hausmann
	Scalenoedri negativi della zona 11$\bar{2}$0 : 40$\bar{4}$1																				
✱105	4 16 $\overline{20}$9	$-{}^{4}/_{3}R^{5}/_{3}$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	Sansoni
106	27$\bar{9}$5	$-{}^{5}/_{4}R^{9}/_{5}$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	Hausmann
107	4 12 $\overline{16}$7	$-{}^{8}/_{7}R2$	.	4	.	1	.	1	4	.	1	.	.	2	2	4	1	.	.	.	Levy
108	25$\bar{7}$3	$-R^{7}/_{3}$	.	.	.	1	.	.	3	.	.	.	.	2	.	1	1	.	.	.	Naumann
109	48$\overline{12}$5	$-{}^{4}/_{5}R3$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	Levy
110	23$\bar{5}$2	$-{}^{1}/_{2}R5$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Haidinger
	Scalenoedri negativi non compresi nelle zone precedenti																				
✱111	27$\bar{9}$6	$-{}^{5}/_{6}R^{9}/_{5}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
O112	6 33 $\overline{39}$ 26	$-{}^{27}/_{26}R^{13}/_{9}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
O113	3 7 $\overline{10}$5	$-{}^{4}/_{5}R^{5}/_{2}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Levy
✱114	8 32 $\overline{40}$ 21	$-{}^{8}/_{7}R^{5}/_{3}$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
✱115	13$\bar{4}$2	$-R2$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	Sansoni
O116	15 70 $\overline{85}$44	$-{}^{5}/_{4}R^{17}/_{11}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	Hessemberg
O117	18 54 $\overline{72}$35	$-{}^{36}/_{35}R2$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	Rath
✱118	2 8 $\overline{10}$5	$-{}^{6}/_{5}R^{5}/_{3}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
O119	3 10 $\overline{13}$6	$-{}^{7}/_{6}R^{13}/_{7}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
120	12$\bar{3}$1	$-R3$	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	Hausmann
✱121	13 27 $\overline{40}$12	$-{}^{7}/_{6}R^{20}/_{7}$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
✱122	7 8 $\overline{15}$4	$-{}^{1}/_{4}R15$	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	Sansoni
O123	16 24 $\overline{40}$1	$-8R5$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Hessemberg
✱124	5 10 $\overline{15}$4	$-{}^{5}/_{4}R3$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	Sansoni
✱125	6 8 $\overline{14}$3	$-{}^{2}/_{3}R7$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	Sansoni
O126	7 8 $\overline{15}$3	$-{}^{1}/_{3}R15$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	Hessemberg
✱127	6 10 $\overline{26}$5	$-{}^{6}/_{5}R^{13}/_{3}$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Sansoni
✱128	1 11 $\overline{12}$1	$-10R^{6}/_{5}$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Sansoni
✱129	1 16 $\overline{17}$1	$-15R^{17}/_{15}$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	Sansoni
O130	31$\bar{4}$0	$\infty R2$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	Hauy
O131	54$\bar{9}$0	$\infty R9$	.	.	1	.	.	.	,	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	Bournon

Quadro III.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	TOTALE
Combinazioni a 1 forma.	—	—	1	6	1	—	2	6	16
» a 2 »	4	10	7	13	2	—	8	14	58
» a 3 »	11	24	5	30	2	6	13	16	107
» a 4 »	13	17	4	26	3	1	8	6	78
» a 5 »	5	28	1	7	—	3	7	—	52
» a 6 »	—	7	—	6	—	4	5	1	22
» a 7 »	3	4	—	2	—	1	3	2	15
» a 8 »	1	2	—	1	—	1	1	—	8
» a 9 »	—	2	—	—	—	1	—	—	3
» a 10 »	1	—	—	1	—	—	—	—	2
Totale	38	94	18	92	8	17	47	45	359

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I.

Fig. 1 — Proiezione stereografica di tutte le forme cristalline della Calcite di Andreasberg.

Tav. II.

Fig. 2 » Comb. 29. N. 4. 0R, ∞R, 4R, —2R, —$^1/_2$R
(0001) $(10\bar{1}0)$ $(40\bar{4}1)$ $(02\bar{2}1)$ $(01\bar{1}2)$

» 3 » Comb. 35. N. 8. 0R, ∞R, ∞P2, 4R, —2R, —$^1/_2$R, R6
(0001) $(10\bar{1}0)$ $(11\bar{2}0)$ $(40\bar{4}1)$ $(02\bar{2}1)$ $(01\bar{1}2)$ $(7\,5\,\overline{12}\,2)$

» 4 » Comb. 30. N. 5. 0R, ∞P2, —2R, —10R$^6/_5$, R5
(0001) $(11\bar{2}0)$ $(02\bar{2}1)$ $(1\,11\,\overline{12}\,1)$ $(32\bar{5}1)$

» 5 » Comb. 122. ∞R, —$^1/_2$R, —$^8/_7$R2, R, —$^8/_7$R, —2R
$(10\bar{1}0)$ $(01\bar{1}2)$ $(4\,12\,\overline{16}\,7)$ $(10\bar{1}1)$ $(08\bar{8}7)$ $(02\bar{2}1)$

» 6 » Comb. 131. N. 42. ∞P2, R, —$^4/_3$R, —2R, 0R, 6P2, —2R3,
$(11\bar{2}0)$ $(10\bar{1}1)$ $(04\bar{4}3)$ $(02\bar{2}1)$ (0001) $(33\bar{6}1)$ $(24\bar{6}1)$
∞R, —$^1/_2$R
$(10\bar{1}0)$ $(01\bar{1}2)$

» 7 » Comb. 124. N. 36. ∞R, R$^5/_3$, —15R$^{17}/_{15}$, R8, 4R, $^1/_4$R3
$(10\bar{1}0)$ $(41\bar{5}3)$ $(1\,16\,\overline{17}\,1)$ $(9\,7\,\overline{16}\,2)$ $(40\bar{4}1)$ $(21\bar{3}4)$

» 8 » Comb. 103. N. 23. ∞R, —$^8/_7$R, 0R, 4R, —$^8/_7$R$^5/_3$
$(10\bar{1}0)$ $(08\bar{8}7)$ (0001) $(40\bar{4}1)$ $(8\,32\,\overline{40}\,21)$

» 9 » Comb. 101. N. 22. ∞R, ∞P2, R$^7/_2$, —$^1/_4$R15, —$^1/_2$R
$(10\bar{1}0)$ $(11\bar{2}0)$ $(9\,5\,\overline{14}\,4)$ $(7\,8\,\overline{15}\,4)$ $(01\bar{1}2)$

» 10 » Comb. 123. N. 35. ∞R, 4R, —$^1/_2$R, R, —$^4/_5$R3, —$^2/_3$R7
$(10\bar{1}0)$ $(40\bar{4}1)$ $(01\bar{1}2)$ $(10\bar{1}1)$ $(4\,8\,\overline{12}\,5)$ $(6\,8\,\overline{14}\,3)$

» 11 » Comb. 129. N. 40. ∞R, —2R, R, —$^1/_2$R, 4R, R$^{11}/_8$, R$^5/_3$,
$(10\bar{1}0)$ $(02\bar{2}1)$ $(10\bar{1}1)$ $(01\bar{1}2)$ $(40\bar{4}1)$ $(19\,3\,\overline{22}\,16)$ $(41\bar{5}3)$
0R
(0001)

» 12 » Comb. 118. N. 34. ∞R, —$^1/_2$R, 0R, R, $^1/_4$R3, $^{49}/_{13}$R$^{13}/_7$
$(10\bar{1}0)$ $(01\bar{1}2)$ (0001) (1011) $(21\bar{3}4)$ $(70\,21\,\overline{91}\,13)$

» 13 » Comb. 128. N. 39. ∞R, 0R, —2R, $^4/_3$P2, —$^5/_4$R3, —$^1/_2$R, R12
$(10\bar{1}0)$ (0001) $(02\bar{2}1)$ $(22\bar{4}3)$ $(5\,10\,\overline{15}\,4)$ $(01\bar{1}2)$ $(13\,11\,\overline{24}\,2)$

» 14 » Comb. 112. N. 31. ∞R, —$^1/_2$R, R, 4R, —$^8/_7$R$^3/_2$
$(10\bar{1}0)$ $(01\bar{1}2)$ $(10\bar{1}1)$ $(40\bar{4}1)$ $(2\,10\,\overline{12}\,7)$

» 15 » Comb. 145. N. 46. 16R, —$^1/_2$R, —$^6/_5$R$^{13}/_3$ (¹)
$(16\,0\,\overline{16}\,1)$ $(01\bar{1}2)$ $(10\,16\,\overline{26}\,5)$

(¹) Nella Tavola è errato il simbolo dello scalenoedro. Invece di $(2\,8\,\overline{10}\,5)$ deve leggersi $(10\,16\,\overline{26}\,5)$.

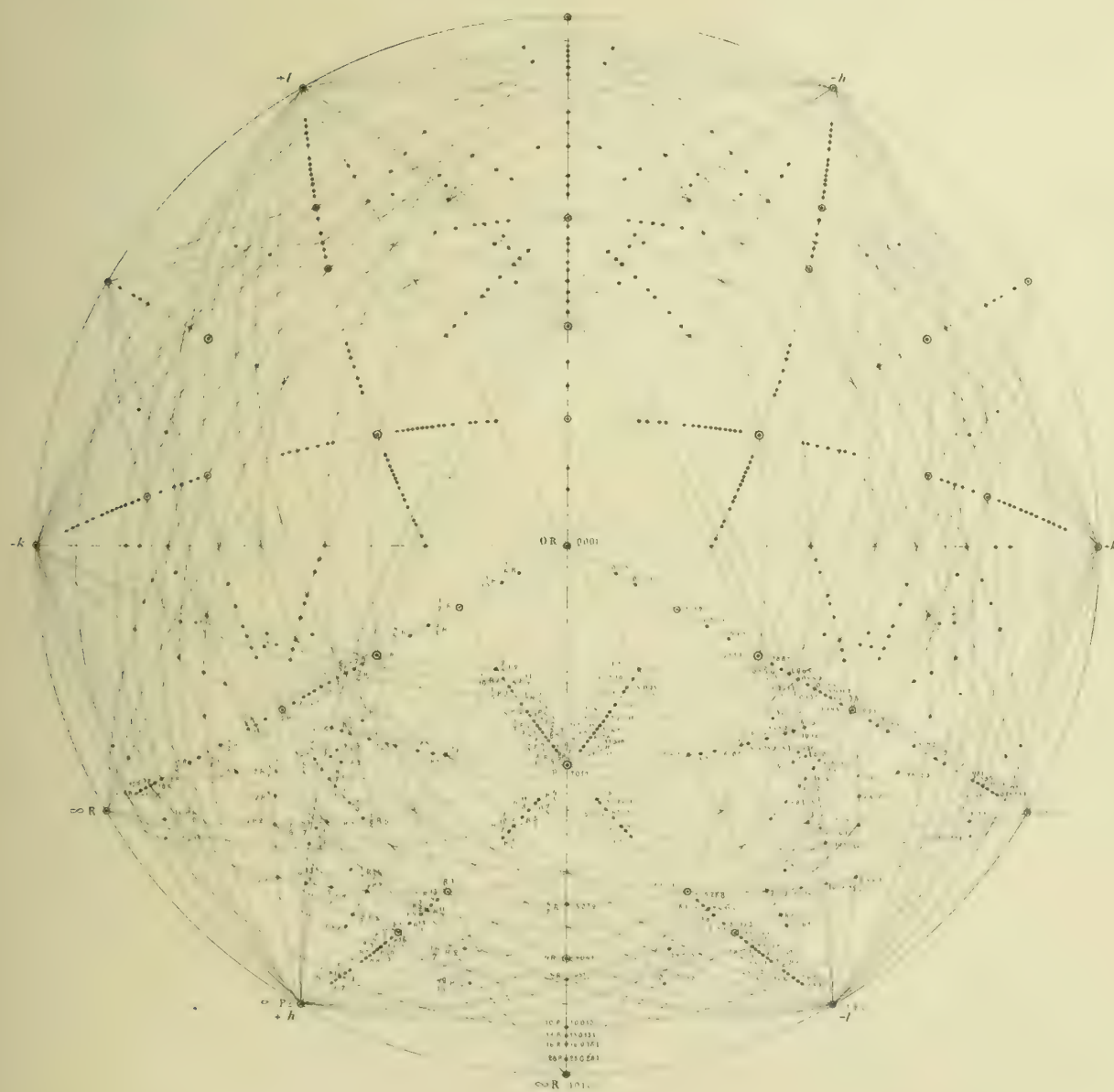
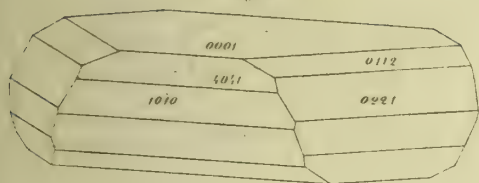
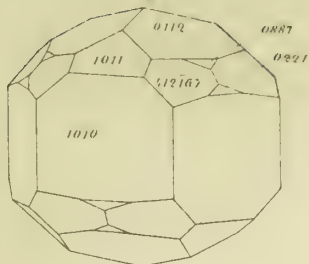
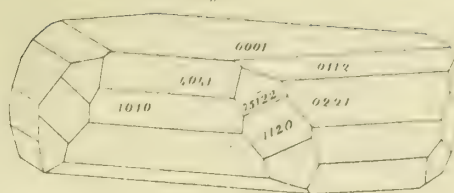
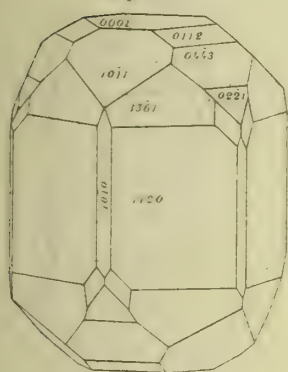
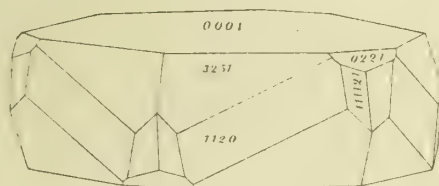
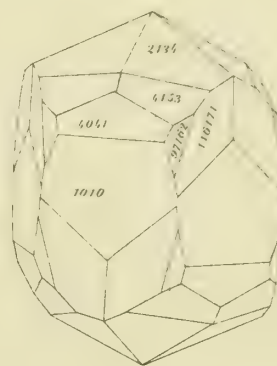
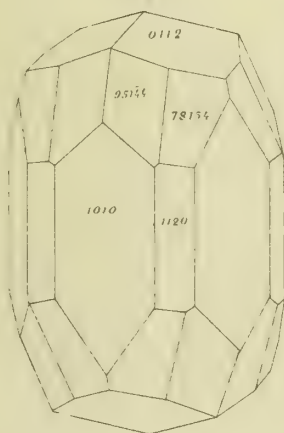
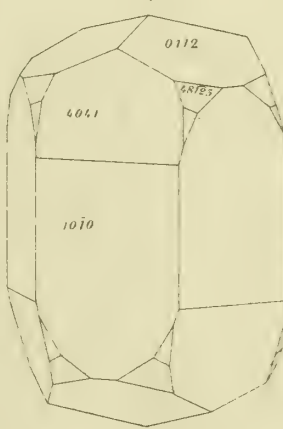
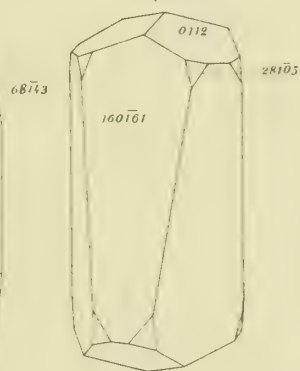
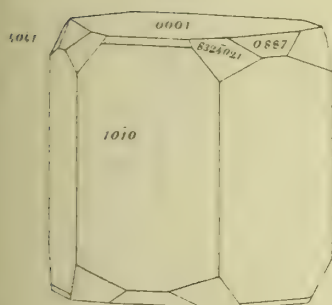
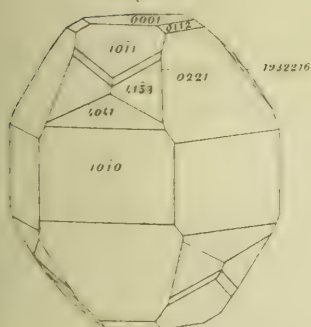
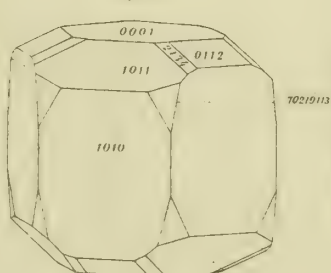
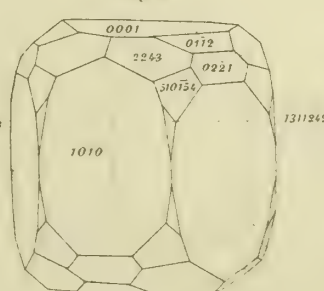
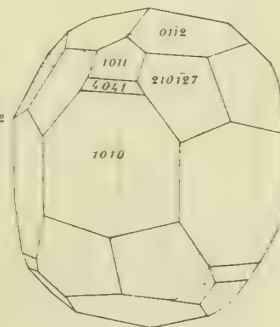
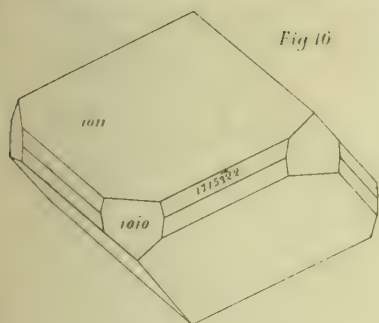
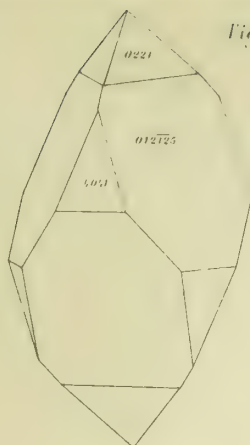
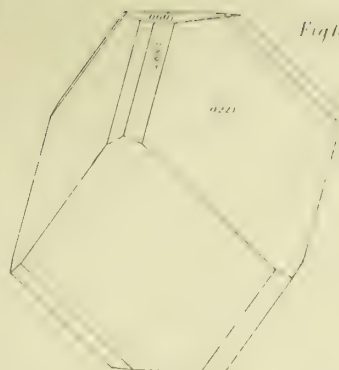
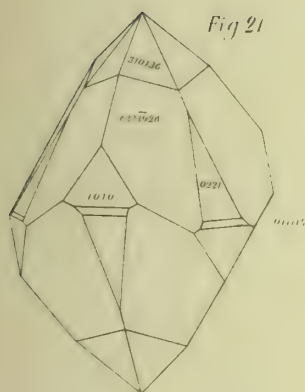
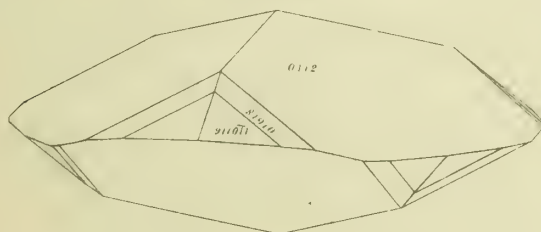
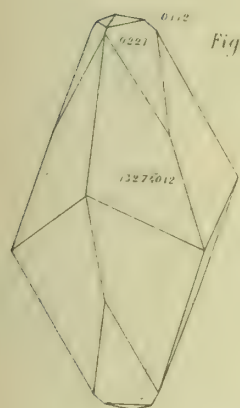
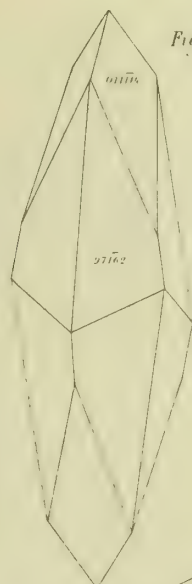
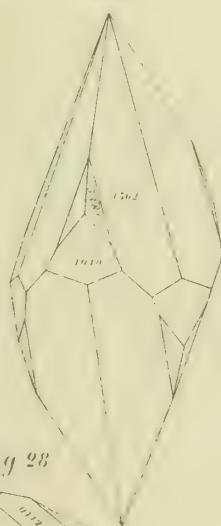
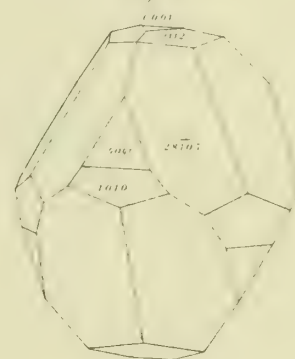
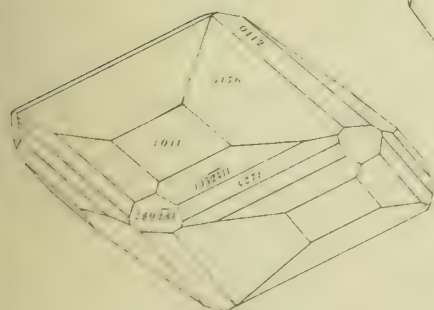
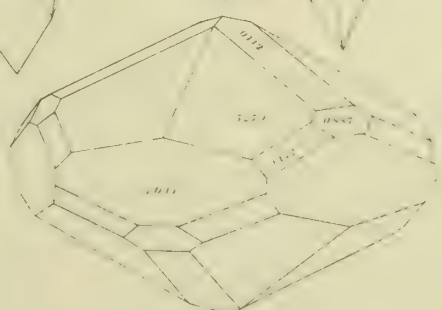
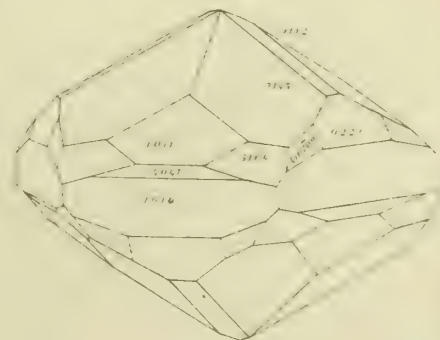
Tav. III.

Fig.	Comb.	N.	Forme
Fig. 16 —	Comb. 174.	N. 49.	R, $R16$, ∞R $(10\bar{1}1)$ $(17\,15\,\overline{32}\,2)$ $(10\bar{1}0)$
» 17 »	Comb. 189.	N. 53.	$-2R$, $4R$, $-\frac{12}{5}R$ $(02\bar{2}1)$ $(40\bar{4}1)$ $(0\,12\,\overline{12}\,5)$
» 18 »	Comb. 187.	N. 51.	$-2R$, $0R$, $-\frac{4}{5}R2$ $(02\bar{2}1)$ (0001) $(26\bar{8}5)$
» 19 »	Comb. 249.	N. 68.	$-\frac{1}{2}R$, $\frac{8}{11}R^{5/4}$, $\frac{7}{10}R^{9/7}$ $(01\bar{1}2)$ $(9\,1\,\overline{10}\,11)$ $(8\,1\,\bar{9}\,10)$
» 20 »	Comb. 272.	N. 83.	$R3$, $\frac{3}{5}R^{13/9}$ $(21\bar{3}1)$ $(11\,2\,\overline{13}\,15)$
» 21 »	Comb. 301.	N. 97.	$-\frac{7}{6}R^{13/7}$, $-\frac{27}{26}R^{13/9}$, $-2R$, ∞R, $-\frac{11}{4}R$ $(3\,10\,\overline{13}\,6)$ $(6\,33\,\overline{39}\,26)$ $(02\bar{2}1)$ $(10\bar{1}0)$ $(0\,11\,\overline{11}\,4)$
» 22 »	Comb. 278.	N. 84.	$-\frac{5}{6}R^{9/5}$, $-\frac{1}{2}R$, $-2R$ $(27\bar{9}6)$ $(01\bar{1}2)$ $(02\bar{2}1)$
» 23 »	Comb. 279.	N. 85.	$-\frac{7}{6}R^{20/7}$, $-2R$, $-\frac{1}{2}R$ $(13\,27\,\overline{40}\,12)$ $(02\bar{2}1)$ $(01\bar{1}2)$
» 24 »	Comb. 280.	N. 86.	$-2R^{3/2}$, $R4$, ∞R (1) $(15\bar{6}2)$ $(53\bar{8}2)$ $(10\bar{1}0)$
» 25 »	Comb. 300.	N. 96.	$-\frac{6}{5}R^{5/3}$, $0R$, $4R$, ∞R, $-\frac{1}{2}R$ $(2\,8\,\overline{10}\,5)$ (0001) $(40\bar{4}1)$ $(10\bar{1}0)$ $(01\bar{1}2)$
» 26 »	Comb. 327.	N. 110.	$R8$, $-\frac{11}{4}R$ $(9\,7\,\overline{16}\,2)$ $(0\,11\,\overline{11}\,4)$
» 27 »	Comb. 261.	N. 78.	$\frac{1}{2}R^{5/3}$, $R^{12/7}$, $R7$, $28R$, R, $-\frac{1}{2}R$ $(41\bar{5}6)$ $(19\,5\,\overline{24}\,14)$ $(43\bar{7}1)$ $(28\,0\,\overline{28}\,1)$ $(10\bar{1}1)$ $(01\bar{1}2)$
» 28 »	Comb. 258.	N. 75.	$\frac{1}{3}R^{7/3}$, $-\frac{1}{2}R$, ∞R, $-R2$, $-\frac{8}{7}R$ $(52\bar{7}9)$ $(01\bar{1}2)$ $(10\bar{1}0)$ $(13\bar{4}2)$ $(08\bar{8}7)$
» 29 »	Comb. 266.	N. 82.	$\frac{2}{5}R2$, $R^{3/2}$, R, $\frac{1}{2}R^{5/3}$, $-2R$, ∞R, $-\frac{1}{2}R$, $4R$. $(31\bar{4}5)$ $(51\bar{6}4)$ $(10\bar{1}1)$ $(41\bar{5}6)$ $(02\bar{2}1)$ $(10\bar{1}0)$ $(01\bar{1}2)$ $(40\bar{4}1)$

(1) Nel simbolo dello scalenoedro R4, della fig. 24, Tav. III, è errato l'ultimo indice; in luogo di $(53\bar{8}1)$ leggasi $(53\bar{8}2)$.

Forme cristalline osservate nella Calcite

DI ANDREASBERG

Projezione sferica sulla base 0 R (0001)

Applicazione della bilancia allo studio della circolazione sanguigna nell'uomo.

Memoria del Socio ANGELO MOSSO

presentata al Presidente

durante le ferie accademiche dell'anno 1883-84.

(Con una tavola)

PARTE STRUMENTALE

Il desiderio di rendere sempre più semplici gli apparecchi che devono servire allo studio della circolazione del sangue nell'uomo, mi fece venire l'idea di coricare una persona sopra il giogo di una bilancia, come è indicato nella figura 1. Una cassa *D C* può oscillare nel suo mezzo sopra di un fulcro *E*, fatto da un triangolo di acciaio che poggia con uno dei suoi spigoli sopra una piattaforma egualmente di acciaio. Questa parte che rappresenta il giogo di una bilancia è sostenuta da una

FIGURA 1.

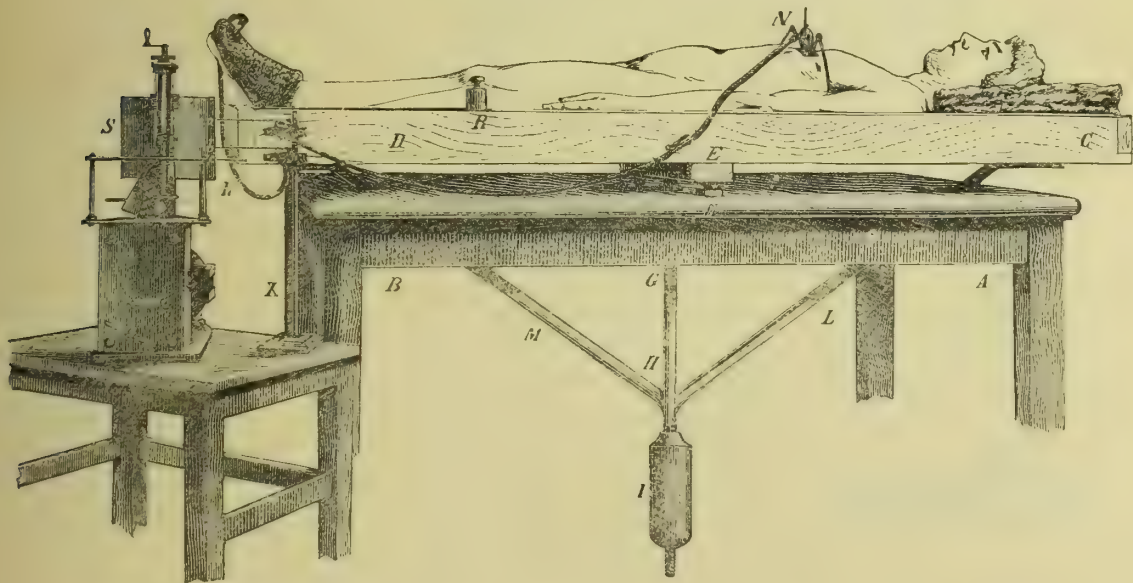



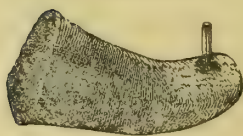
tavola *B A*, nella quale vi sono tre aperture: l'una nel mezzo e due alle estremità. In queste aperture passa una sbarra di ferro *G H* lunga un metro, che porta un grosso cilindro di ferro fuso; e due altre sbarre, che si incontrano ad angolo, *M H L* servono per tenere fissa quest'asta centrale. Il peso *I* scorre su di essa per mezzo di un passo di vite: e si può girando alzarlo, od abbassarlo per rendere la bilancia più o meno sensibile.

Quando un uomo è coricato nella cassa *C D*, è come se questa fosse piena di acqua; o piuttosto l'uomo può paragonarsi ad un lungo budello che contenga un liquido il quale si sposta ad ogni movimento del piano su cui è disteso. Basta inclinare di pochi millimetri, al massimo di un centimetro, la bilancia verso la testa, o verso i piedi, e si accumula tanto sangue in queste parti che la bilancia trabocca, e bisogna mettere un peso assai considerevole dalla parte opposta per ricondurre la bilancia in posizione orizzontale.

È questa una delle esperienze più semplici per dimostrare colla maggior evidenza l'enorme facilità con cui si distendono i vasi sanguigni per delle minime pressioni. Se si dà alla bilancia tale sensibilità, che quando è vuota ci vogliano circa 100 grammi messi ad una delle sue estremità per farla inclinare di circa un centimetro, e, dopo, si corica un uomo nella cassa *C D* e si mette la bilancia in equilibrio, si vede che essa rimane immobile da qualunque parte la si inclini. È il sangue che si accumula verso la testa, o verso i piedi anche per delle pressioni minori di un centimetro.

Per impedire questo inconveniente nelle esperienze che esporrò dopo, si doveva portare più in basso il peso *I*, il quale spostandosi in senso inverso al movimento del sangue, poteva, atteso la lunghezza dell'asta *G H*, ristabilire l'equilibrio producendo come una specie di compensazione. Per impedire che le oscillazioni della bilancia fossero troppo grandi, mettevo sopra la tavola *A B* due pezzi di legno, o di gomma elastica, che servivano di arresto, rendendo minori di un centimetro le oscillazioni della bilancia. Per assicurarmi che era realmente lo spostamento del sangue verso i piedi, od il capo, che faceva traboccare la bilancia, ho scritto contemporaneamente le modificazioni che subisce il volume degli organi in simili circostanze.

Per ottenere il tracciato del polso del piede mi sono servito dello sfigmografo ad aria che adopero da parecchi anni (¹). È uno strumento semplicissimo con cui ho applicato alla mano ed al piede lo stesso metodo che mi aveva dato dei risultati così soddisfacenti nello studio della circolazione cerebrale. Si tratta di trasmettere i cambiamenti di volume di un organo ad un timpano a leva ordinario; per il piede ho fatto un mezzo stivaletto di guttaperca che si chiude intorno con mastice da vetrai, come si vede nella figura 2ª.

Figura 2.

Ciascuno può costruire da sè un tale apparecchio. Si prende un foglio di carta e si misura sul piede della persona, su cui vogliamo fare un'esperienza, un cartoccio come un mezzo stivaletto; con questo modello si taglia da un foglio di guttaperca, un pezzo che si rammollisce nell'acqua calda e poi lo si applica sul piede della persona, bene unto prima di olio o di grasso, e lo si salda sui margini e sulla punta e si aspetta che sia indurito immergendolo nell'acqua fredda. Queste mezze scarpe devono calzare comodo in modo che la pelle non sia compressa e vi resti uno strato di aria frammezzo; all'estremità si fa un'apertura con un foratappi, e vi s'innesta un tubo di vetro.

(¹) Con questo apparecchio vennero eseguite l'esperienze sui movimenti riflessi nei vasi sanguigni che il dott. Fano fece nel mio laboratorio e delle quali ho presentato una comunicazione all'Accademia dei Lincei nel 1881.

È questo il più semplice ed il più comodo degli stigmografi per studiare il polso del piede.

Per chiudere mi servo di mastice da vetrai. È da preferirsi quello più fino; lo si conserva nell'acqua e quando è troppo duro lo si può rimpastare aggiungendovi alcune goccie di olio finchè sia molle e attaccaticcio. Applicato lo strumento sul piede vi faccio intorno un bordo di mastice, avendo cura di ungere leggermente la pelle perchè il mastice vi aderisca meglio.

Per studiare il polso della mano mi servo di un guanto di guttaperca, oppure semplicemente di una boccia di vetro alla quale ho tagliato il fondo come è indicato

Figura 3.

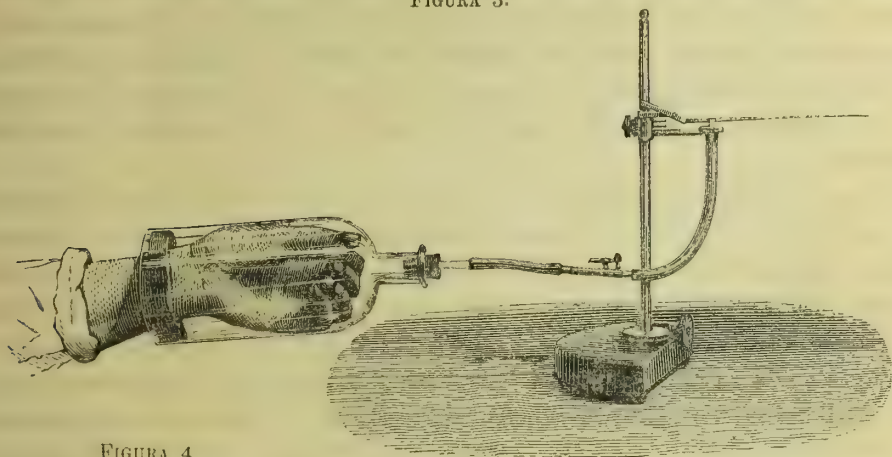
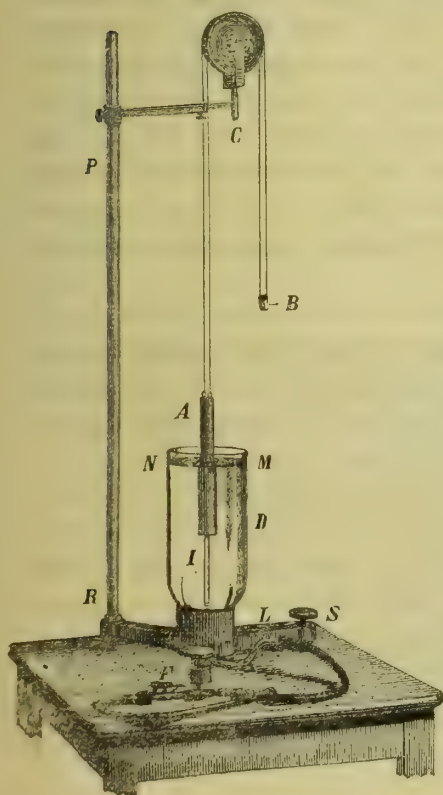



Figura 4.

nella figura 3ª. Anche qui mi servo per la chiusura del mastice da vetrai. In questa figura è disegnato un timpano a leva, alquanto più piccolo di quello di Marey, di cui mi servo nelle esperienze più delicate per scrivere il polso; un timpano fatto secondo il modello ordinario può servire egualmente bene.

Nelle esperienze che esporrò in questa e nelle seguenti Memorie non potendo servirmi del mio pletismografo ad acqua, costrussi un altro pletismografo assai più maneggevole che funziona per semplice spostamento di aria. L'apparecchio è rappresentato dalla figura 4ª. L'aria che esce dallo stivaletto, o dal cilindro di vetro, in cui è contenuta la mano o l'antibraccio, penetra per mezzo del tubo *F* a traverso il fondo di un vaso di vetro e si innalza verticalmente fino sopra il livello *N M*. Una campanella *A* di metallo, a pareti sottilissime, è tenuta in equilibrio sulla puleggia *C*, da un contrappeso *B*, nel quale si mette una

penna per scrivere sul cilindro. I perni della puleggia *C* girano sopra due piccole ruote, perchè l'apparecchio sia più sensibile; ma questo non è assolutamente necessario.

Il vaso *D* si riempie con essenza di petrolio o con etere, o con un liquido che abbia una piccola densità, fino al livello *N M*. Si comprende facilmente guardando la figura che questo apparecchio è fatto come un piccolo gasometro; ed è perciò che gli ho dato il nome di *pletismografo gasometrico*.

Il problema di far galleggiare una campanella e tenerla in equilibrio in un liquido in modo da misurare il volume dei gas che vi si raccolgono sotto, è un problema che ha le sue gravi difficoltà ([1]).

Tutti conoscono la soluzione che ebbe questo problema nello spirometro di Hutchinson per mezzo della puleggia a spirale. Non ho scelto questo mezzo di compensazione perchè non era comodo e perchè la presenza di una puleggia non simmetrica crea per se stessa degli errori che sono difficili a correggersi. Ho preferito una compensazione non completa, ricorrendo a delle campanelle di argento sottilissime, le quali spostando nell'immergersi un liquido poco denso, producessero delle pressioni affatto trascurabili per lo studio di cui ci occupiamo. Le campanelle sono alte circa 20 centimetri ed hanno la capacità di 30 c. c. Dalla parte del fondo hanno due uncini per attaccarvi i due fili di seta che passano sulla puleggia e sostengono il contrappeso.

Le esperienze di controllo fatte con tale pletismografo dimostrano che l'errore massimo della pressione in più per fare sollevare tutto il cilindro sopra il livello *N M*, o della pressione negativa per farlo immergere tutto, è appena di circa 1 millimetro di acqua. Questo apparecchio è tanto sensibile che quando il tubo di gomma è pieno di vapori di etere, basta sollevare un poco il tubo perchè subito i vapori passando sotto la campanella producano un innalzamento della medesima.

Influenza dei movimenti respiratorî sulla circolazione del sangue.

Se trasportiamo molto in basso il centro di gravità della bilancia, dando ad essa quel grado di sensibilità che è necessario, perchè non trabocchi troppo facilmente, quando vi è sopra una persona in equilibrio, la bilancia oscilla continuamente seguendo il ritmo dei movimenti respiratorî. Durante l'inspirazione la bilancia si inclina verso i piedi. Questo movimento non è esattamente sincrono coi movimenti del respiro, ma subisce un leggero ritardo per l'inerzia della bilancia e per altre ragioni che vedremo.

([1]) Nota. Un pletismografo perchè serva come strumento di misura deve soddisfare a due condizioni: 1° che dia scritto con esattezza il cambiamento di volume dell'organo di cui si studia la circolazione; 2° che la pressione alla superficie dell'organo rimanga costante. Parecchi fisiologi che si occuparono di ricerche pletismografiche, costrussero degli strumenti che si allontanano dal tipo che io ho proposto col mio primo pletismografo a spostamento di liquido. Non ho mai fatto la critica di questi strumenti, perchè sono troppo inferiori per esattezza al mio pletismografo, mancando in essi le condizioni indispensabili per la registrazione esatta e per la pressione costante.

La figura 6 rappresenta il tracciato di una esperienza nella quale scrissi i movimenti del respiro per mezzo del pneumografo di Marey, mentre che una penna messa all'estremità R della bilancia, come è indicato nella figura 1, scriveva la linea *B*. Da questo tracciato risulta chiaramente che i movimenti della bilancia B corrispondono a quelli del respiro R, con un piccolo ritardo. In P P sono indicati i punti di corrispondenza delle penne.

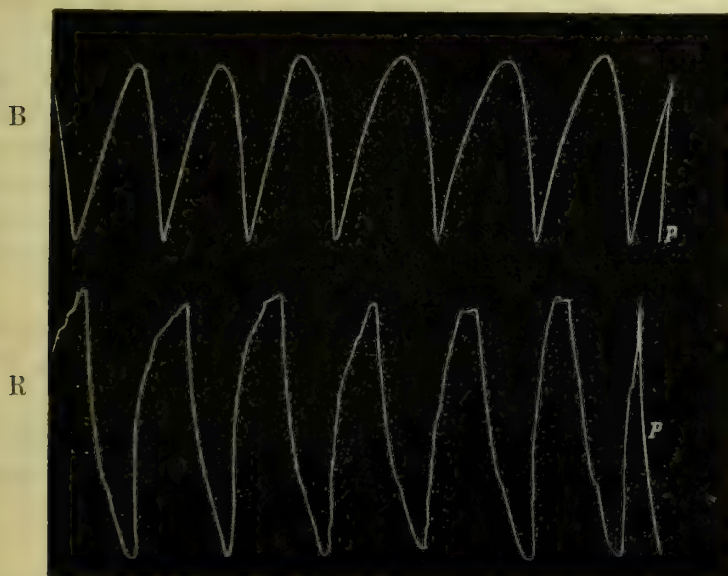
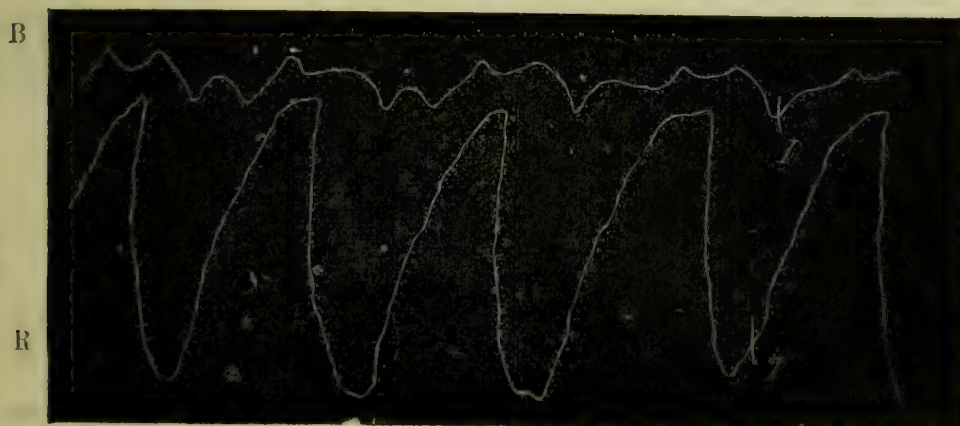
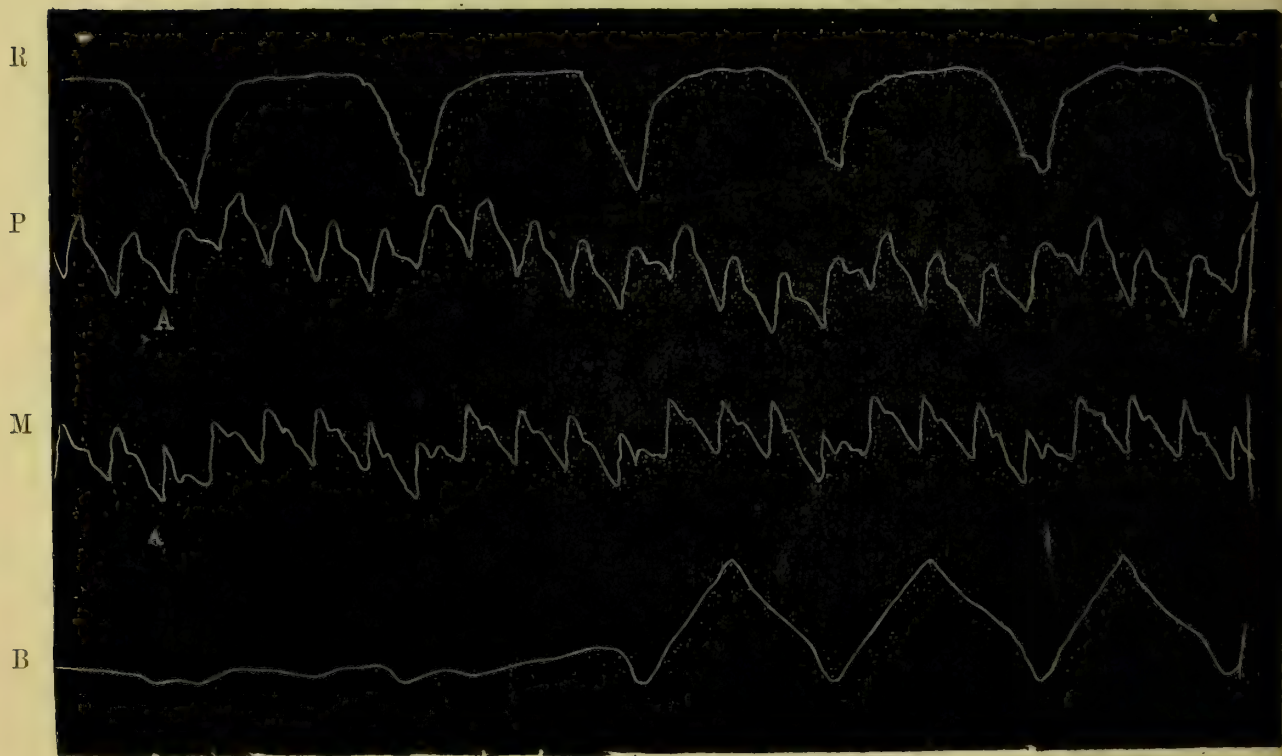
Figura 5.

Siccome poteva nascere il dubbio che queste oscillazioni dipendessero dallo spostamento delle masse intestinali, prodotto dalla contrazione diaframmatica, ho fissato nella bilancia un supporto, come lo schienale di un seggiolone, in modo che la persona rimanesse seduta e gli spostamenti del diaframma succedessero verticalmente sul fulcro della bilancia; ma anche in questo modo, come osservasi nella figura 6, sussistono egualmente le oscillazioni respiratorie.

Figura 6.

La linea *B* è alquanto differente da quella del tracciato 5, perchè qui la bilancia inclinandosi batteva sopra un turacciolo di gomma elastica, e perciò faceva un numero maggiore di oscillazioni. Del resto che si tratti realmente di una variabile distribuzione del sangue nelle estremità, lo si riconosce facilmente dal fatto che i piedi gonfiano, mentre le mani diminuiscono di volume ad ogni inspirazione.

Nella figura 7 scrissi contemporaneamente il respiro per mezzo del pneumografo di Marey applicato intorno al torace, linea *R*. Il polso del piede collo sfigmografo ad aria, linea P. Il polso della mano era scritto col medesimo metodo, linea *M*. Le oscillazioni della bilancia scritte dalla parte dei piedi sono segnate nella linea *B*. Da questo tracciato si vede, che vi è un antagonismo fra i cambiamenti di volume della mano e del piede per effetto della respirazione. Desidero però di chiamare prima l'attenzione del lettore sul fatto che per mezzo della bilancia si possono riconoscere e scrivere quei movimenti spontanei dei vasi sanguigni che avevo già studiato nell'uomo col pletismografo ed ai quali diedi il nome di *ondulazioni*. Si osservano cioè nell'uomo, per cause che ci sono sconosciute, dei restringimenti o delle dilatazioni nei vasi sanguigni delle estremità che producono uno spostamento del sangue per cui la bilancia trabocca da una parte o dall'altra.

La figura 7 rappresenta una di queste ondulazioni. Nella parte antecedente, verso il lato sinistro, che non ho riprodotto, si era manifestato, non so per quale causa, una dilatazione dei vasi del piede. Il volume delle estremità si era notevolmente ingrossato durante 6 movimenti respiratorî e la bilancia traboccò e rimase

Figura 7.

immobile verso i piedi Persistette questo stato durante tre movimenti respiratorî e quindi incominciò a manifestarsi una contrazione dei vasi sanguigni nel piede, come si vede nella linea P che va abbassandosi. La linea *B* ci mostra che in seguito a questa diminuzione di volume del piede la bilancia ritorna ad oscillare. Queste ondulazioni, che si producono nel sonno e nella quiete profonda per cause interne, che ci sono sconosciute, devono essere distinte da altri spostamenti del sangue per fatti psichici dei quali ci occuperemo nell'ultima parte di questa Memoria.

Esaminando i tracciati della mano e del piede, osservasi che essi trovansi in antagonismo. Infatti nel punto *A*, presso la fine dell'inspirazione, trovasi che la mano diminuisce di volume, mentre che invece aumenta il volume del piede.

In un mio precedente lavoro intorno alla circolazione del sangue nel cervello ho studiato con una lunga serie di esperienze, quale fosse l'influenza che i movimenti del respiro esercitano sulla pressione del sangue: e diedi un' importanza maggiore di quanto non avessero fatto altri fisiologi prima di me, al cambiamento di volume delle estremità per effetto dell'aspirazione toracica e della pressione addominale ([1]).

Senza ripetere la storia di questo punto molto controverso della fisiologia, mi basta osservare che dalle mie osservazioni risulta come costante il fatto che la pressione addominale la quale aumenta durante l'inspirazione, mette un ostacolo al ritorno del sangue verso il cuore e produce un ingorgo del sangue venoso nelle gambe. Succede cioè nelle estremità inferiori del corpo, ciò che si vede quando si mette un ostacolo alla corrente di un fiume, la piena risale poco per volta verso le sorgenti.

Per analizzare la velocità con cui si propaga tale ristagno del sangue nelle vene e distinguerlo da un afflusso maggiore di sangue che venisse dalle arterie, pensai di scrivere il momento in cui sarebbe apparso il rigonfiarsi delle vene nel piede e quello in cui il rigonfiarsi delle vene sarebbe comparso nella parte della gamba che sta sopra il ginòcchio. A tale scopo costrussi uno stivale di guttaperca fatto da due parti che potevano combaciare coi bordi e chiudersi con mastice ermeticamente in modo che applicando un timpano ad aria potesse scriversi il polso ed i cambiamenti di volume dell'intera gamba. Dal lato opposto applicai il mezzo stivaletto sulla parte anteriore del piede.

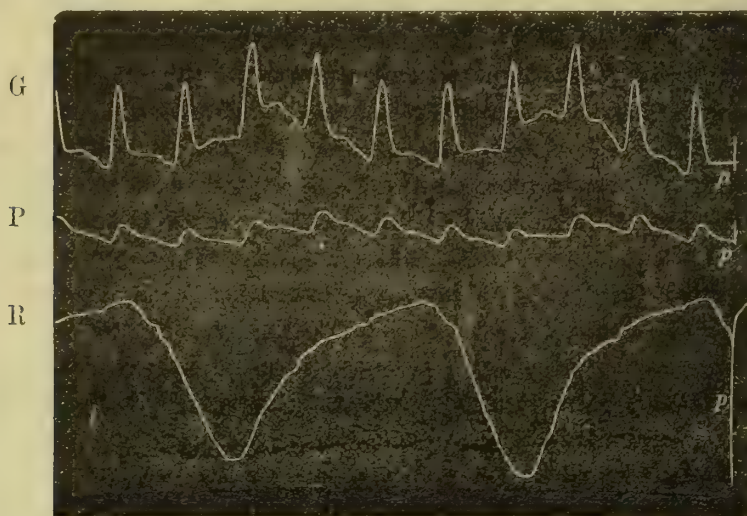
La figura 8 dimostra che realmente nell' ispirazione il volume dell' intera gamba aumenta assai più presto, che quello del piede. In questo l' ingorgo delle vene appare circa due secondi più tardi. Non mi pare che vi sia altra spiegazione possibile di questo fatto, tranne che di ammettere un' ingorgo delle vene: e d'ora innanzi nello studio dei cambiamenti di volume che si osservano nel cervello, nella mano e nel piede, quando vorremo conoscere l' influenza dei movimenti respiratorî sulla circolazione venosa noi dovremo sempre tener calcolo di questo ritardo con cui si propaga l'onda di riflusso delle vene.

Quando studiamo i mutamenti di volume che subiscono il cervello ed il piede per effetto del respiro, e vediamo che si corrispondono, noi dobbiamo ricordarci che nel piede l' aumento di volume prodotto dall' inspirazione succederà così tardi che

[1] A. Mosso, *Sulla circolazione del sangue nel cervello dell'uomo*. Memorie della r. Accademia dei Lincei. 1880. Vol. V, p. 237.

esso può corrispondere all'aumento di volume che si produrrà nel cervello durante l'espirazione successiva: e che viceversa la diminuzione inspiratoria del volume cerebrale durante l'inspirazione può corrispondere alla diminuzione espiratoria del volume del piede. La discussione di questi tracciati la farò in una prossima Memoria sulla circolazione del sangue nel cervello dell'uomo.

L'opposizione completa che vi è fra i cambiamenti della circolazione venosa nelle parti sopra e sotto diaframmatiche si rende molto più evidente quando si esagerano i movimenti del respiro. Nella fig. 1ª della Tavola I ho scritto i movimenti respiratori del torace, linea *T* e dell'addome, linea *A*, il polso del piede *P*, e della mano *M*; appena incomincia l'inspirazione si vede che il volume del piede aumenta e che invece diminuisce quello della mano. L'antagonismo di questi due mutamenti persiste per tutto

Figura 8.

il tempo in cui dura lo sforzo inspiratorio; appena incomincia l'espirazione subito le vene delle gambe possono sgorgarsi e quelle della mano si gonfiano e ritornano al volume di prima.

Quando si cerca di fare una inspirazione profonda solo col diaframma e si tiene quasi immobile il torace, l'aumento di volume delle gambe è molto pronunciato, mentre che la diminuzione di volume della mano è appena visibile. E viceversa, quando il torace si dilata ampiamente e si contrae poco il diaframma, può scomparire l'ingorgo inspiratorio delle vene nelle estremità inferiori, perchè manca l'aumento della pressione venosa nella cavità addominale.

Quando un uomo si corica sulla bilancia, trascorre un tempo relativamente assai lungo prima che si sgorghino i vasi dei piedi e il sangue, che si era accumulato nelle estremità inferiori per effetto della gravità nella posizione verticale, si distribuisca uniformemente in tutti gli organi. Affinchè le persone che si sottoponevano alle ricerche fatte colla bilancia non soffrissero alcun disagio, quando dovevano stare lungamente immobili, avevo fatto imbottire la cassa *D C* (fig. 1). Sui

bordi della cassa facevo dei segni per essere avvertito nel caso che si movessero involontariamente le mani.

Se per mezzo di pesi messi in *R* si stabilisce l'equilibrio appena la persona è coricata, si osserva che le gambe diventano rapidamente più leggere e che per tenere la bilancia orizzontale si devono aggiungere continuamente dei pesi. Per misurare la quantità di sangue, che dai piedi passava verso le parti più centrali del corpo, mettevo un bicchiere presso i piedi e vi lasciavo cadere dentro da una buretta graduata in $^{1}/_{10}$ di c.c. la quantità di acqua che di minuto in minuto era necessaria perchè la bilancia stesse in equilibrio.

La quantità di sangue che va via dalle estremità inferiori quando noi passiamo dalla posizione verticale alla posizione orizzontale è molto maggiore di quanto non si creda generalmente. L'occhio non è capace di osservare queste differenze sebbene pei due piedi insieme siano sempre maggiori di 100 cc.

Quando la temperatura ambiente è elevata la differenza è molto maggiore. Una volta che la persona che si sottopose all'esperienza tenne prima per 10 minuti i piedi nell'acqua calda la differenza fu di 260 cc. in mezz'ora.

Ritornerò a parlare di questo fenomeno in una prossima Memoria dove esporrò le ricerche che feci sulla tonicità dei vasi sanguigni nell'uomo, per ora mi piace notare come la bilancia ci dia il modo di studiare alcuni problemi della circolazione sanguigna nell'uomo assai meglio di ciò che possa farsi col pletismografo. Come ad esempio nello studio dell'influenza che la temperatura calda, fredda od umida esercita sui vasi del corpo. Il pletismografo ha dei gravi inconvenienti quando non si può essere sicuri che la chiusura dell'apparecchio non produca una compressione dei vasi sanguigni.

Credo pure, benchè non ne abbia fatto alcuna applicazione, che colla bilancia si possa diagnosticare la presenza di versamenti sierosi nella cavità addominale, quando questi non si possano in altro modo riconoscere.

Determinazione della quantità di sangue che si accumula nei polmoni per effetto dei movimenti inspiratorî.

Nelle prime ricerche che ho fatto su questo argomento (¹) costrussi un apparecchio il quale registrava la quantità di sangue che si accumula nei polmoni ad ogni movimento inspiratorio. Sebbene quelle esperienze fossero fatte fuori della cavità toracica e per mezzo della circolazione artificiale, le condizioni dell'esperimento erano così vicine alle normali, che mi sembrò non lasciassero alcun dubbio sulla quantità di sangue che rimane per un certo tempo accumulata nei polmoni quando si fa una profonda inspirazione. In queste mie ricerche fatte colla bilancia ho potuto confermare nell'uomo i risultati che avevo ottenuto colla circolazione artificiale negli organi estirpati. Osservai infatti che quando la bilancia è in equilibrio, se si fa una profonda inspirazione, essa si inclina prima verso i piedi e poi trabocca verso il

(¹) *Sulla circolazione del sangue nel cervello dell'uomo*. R. Accademia dei Lincei Vol. V. 1880, Capitolo X e XI, e *Ueber den Kreislauf des Blutes in menschlichen Gehirn*. Leipzig 1881.

capo appena finita l'ispirazione: e rimane per un tempo più o meno lungo immobile da questa parte.

Per misurare approssimativamente la quantità di sangue che si accumula nel torace, pensai che bastasse mettere una persona in equilibrio sulla bilancia, farle eseguire una serie di profonde inspirazioni e determinare in seguito, quale era il peso che bisognava levare in corrispondenza del torace per ristabilire l'equilibrio.

Siccome questo metodo dei pesi era incomodo, pensai di mettere accanto al torace una boccia della capacità di mezzo litro, con un' apertura sul fondo da cui partiva un tubo di gomma che piegavasi ad angolo retto in corrispondenza del fulcro della bilancia nel punto E. Riempivo la boccia di acqua; quando la persona era bene in equilibrio, le dicevo di eseguire una o due inspirazioni: e poi aprivo il robinetto che chiudeva il tubo della boccia e lasciavo uscire la quantità di acqua che era necessaria perchè la bilancia non stesse più ferma dalla parte della testa. In questo modo si evitava l'inconveniente di toccare la bilancia e di comunicarle delle scosse per ristabilire l' equilibrio. Raccogliendo l'acqua in un cilindro graduato in centimetri cubici, potevasi misurare approssimativamente quanto liquido fosse passato verso i polmoni.

Fino dalle prime esperienze, notai: che quando facciamo una serie di profonde inspirazioni, pochi minuti dopo esserci coricati sulla bilancia, difficilmente questa ritorna a mettersi in equilibrio, anche se aspettiamo lungo tempo. La ragione di questo fatto deve attribuirsi ad una specie di inerzia, alla imperfetta elasticità, direi quasi ad uno stato di pastosità propria dei vasi sanguigni, perche essi non ritornano mai completamente al medesimo stato quando subiscono una distensione per una causa qualsiasi che li riempia di soverchio.

I vasi della gamba si dilatano e si ingorgano lentamente per effetto della gravità, quando noi stiamo in posizione verticale; se dopo ci corichiamo si sgorgano incompletamente; vi è una quantità residua di sangue per cui si direbbe che sono inerti. Infatti quando per una causa nervosa, od un fatto meccanico, sopravviene una diminuzione del loro contenuto, essi per elasticità propria non ritornano più allo stesso volume primitivo: il cuore e la pressione del sangue non li distendono più come prima. Noi dobbiamo ammettere che succeda il medesimo fatto anche nei polmoni dell' animale vivo.

Per evitare gli errori che potevano nascere in queste ricerche per lo sgorgarsi dei vasi sanguigni nelle gambe, quando facevo delle esperienze sul respiro, procuravo che la persona stesse prima almeno un' ora sulla bilancia in posizione orizzontale.

Riferisco una di queste esperienze fatta il 15 febbraio.

Giorgio M., inserviente del mio laboratorio, è un giovane robusto, nell' età di 25 anni, alto $1^{m}62$, pesa 61,500, capacità polmonare 3500^{cc}. Alle ore 2,15 si corica sulla bilancia e sonnecchia. Dopo un' ora di riposo le gambe sembrano completamente sgorgate, perchè la bilancia sta lungamente in equilibrio oscillando regolarmente secondo il ritmo del respiro. Alle ore 3,25 fa due profonde inspirazioni. Appena sono finite, la bilancia trabocca verso il capo. Apro la chiavetta della boccia per levare acqua da questa parte finchè la bilancia ritorni in equilibrio. Ne escono 130^{cc}. La bilancia sta pochi secondi orizzontale e poi oscillando secondo il ritmo

del respiro, tende sempre più ad inclinarsi verso i piedi. Devo aggiungere successivamente acqua nella boccia dal lato dei polmoni. Alle ore 3,32 oscilla bene come prima. Mancano però sempre 100 cent. cubici di acqua. Faccio la controprova; verso i 100 cent. cubici di acqua nella boccia verso il torace per mettere tutto nelle condizioni di prima, poi apro la chiavetta ed osservo che quando sono usciti 105 cent. cubici la bilancia incomincia nuovamente ad oscillare.

Alle ore 3,38 faccio eseguire una serie di inspirazionipiù profonde. Devo levare subito dopo 105 cent. cubici di acqua perchè la bilancia si inclini verso i piedi. Ma dopo 1 minuto i polmoni si sono talmente sgorgati del sangue accumulato che devo aggiungere successivamente dell'acqua nella boccia per tenere la bilancia in equilibrio.

Alle ore 3,40 ne ho aggiunti 65 cent. cubici per ottenere che oscilli come prima.

Dopo cinque minuti sono ancora sempre accumulati 175 cent. cubici di sangue dal lato del capo, perchè tanti ne mancano di acqua nella boccia presso i polmoni. Giorgio sonnecchia.

Alle ore 3,48 gli faccio eseguire una espirazione forzata, la bilancia trabocca verso le gambe. Devo aggiungere acqua nella boccia verso i polmoni. Dopo due minuti la bilancia sta nuovamente in equilibrio: mancano però sempre 125 cent. cubici di acqua dalla boccia.

Sono certo che la persona non si è mossa. Questi 125 cent. cubici di sangue sono probabilmente accumulati nei polmoni.

2ª Esperienza.

V. G. studente di medicina, età di 22 anni, altezza m. 1,80, peso 73 kil. capacità polmonare 4000: il giorno 11 febbraio lo metto in equilibrio nella bilancia; quando questa oscilla regolarmente secondo il ritmo del respiro, per assicurarmi del grado di sensibilità della bilancia, metto 20 grammi presso le ginocchia e vedo che questa si inclina di più verso i piedi. Alle 4,10 tengo ferma la bilancia verso i piedi e faccio eseguire al sig. G. cinque profonde inspirazioni. Quando sono finite, lascio libera la bilancia e questa si inclina subito verso il capo. Sono obbligato a levare 360 cent. cubici di acqua dalla boccia perchè oscilli verso i piedi: e poi successivamente sgorgandosi i polmoni devo aggiungere dell' acqua per conservare la bilancia orizzontale. Alle ore 4,14 sono ancora sempre 220 di residuo dalla parte dei polmoni. La bilancia tende continuamente a inclinarsi verso i piedi per cui aggiungo successivamente acqua verso i polmoni. Alle 4,23 senza che nulla siasi mosso e senza alcuna causa esterna la bilancia ritorna ad inclinarsi verso il capo; sono obbligato ad aprire la chiavetta per ristabilire l' equilibrio; escono 420 cent. cubici di sangue prima che la bilancia si metta nuovamente orizzontalmente. Questo fenomeno parendomi anormale, domando al sig. G. come si senta. Egli mi risponde: che in seguito all'apnea ebbe delle vertigini; che ora senza saperne il perchè gli sembra che il sangue ritorni verso il capo.

In parecchie altre persone osservai ripetersi questo fatto. Vi è cioè un accumulo

del sangue per effetto dell'apnea dalla parte dei polmoni: dopo il sangue tende a riprendere l'equilibrio di prima e ritorna dai centri alla periferia del corpo e dopo alcuni minuti succede un secondo accumulo del sangue verso i centri, del quale non conosco la causa

I movimenti dei vasi sanguigni studiati nell' uomo colla bilancia.

Tutti i fenomeni che osservai per mezzo del pletismografo studiando la circolazione del sangue nell'uomo si rendono egualmente manifesti colla bilancia. Sembra anzi che si rendano più evidenti, perchè l'apparecchio è più semplice, e l'espressione del fenomeno più sensibile. Riferisco un tracciato per mostrare il metodo che ho seguito in tali osservazioni. Generalmente scrivevo sempre parecchie curve contemporaneamente: la respirazione, il polso della mano, il polso del piede, i movimenti della bilancia.

Il 21 aprile del 1882, dico al mio inserviente Giorgio M. di bere un po' di vino a colazione, perchè volevo fare un' esperienza sul polso. Alle 2 incominciamo; egli si corica sulla bilancia, e gli applico il mezzo stivaletto di guttaperca al piede del lato destro, e il guanto di guttaperca alla mano pure dal lato destro. Il braccio è appoggiato col gomito sul bordo della tavola, e l'antibraccio sul torace, in modo che la mano si posa sul petto in corrispondenza dello sterno. Il braccio sinistro è sollevato e poggia sul cuscino dietro la testa in modo da abbracciare leggermente l'occipite. Intorno al torace gli metto il pneumografo di Marey. Faccio attenzione perchè i tubi di gomma, che vanno ai timpani a leva, siano tutti lunghi egualmente e non impediscano i movimenti della bilancia.

Il polso è forte tanto nella mano quanto nel piede. Giorgio sonnecchia. Tutte le volte che gli rivolgo la parola, appare una forte contrazione nei vasi della mano e del piede, e la bilancia trabocca verso il capo.

Nel principio vi è una irrequietezza grande nei vasi sanguigni delle estremità; vi sono delle forti ondulazioni pletismografiche nella curva del polso alla mano ed ai piedi che qualche volta non si corrispondono e sono indipendenti. A misura che Giorgio si addormenta la bilancia tende sempre più a rimanere ferma dalla parte dei piedi. Qualunque rumore esterno produce subito una contrazione dei vasi sanguigni nelle estremità e la bilancia trabocca verso il capo. Questo fenomeno appare evidentissimo nel tracciato della fig. 2 Tavola I dove si fece un rumore che modificò il respiro e la circolazione del sangue senza che Giorgio desse il più piccolo segno di svegliarsi.

Erano le tre pomeridiane e la bilancia oscillava regolarmente secondo il ritmo della respirazione, linea B. Nel punto R faccio un rumore battendo colla mano sul pomo di un tasto elettrico come quelli che si adoperano per la trasmissione dei telegrammi. Dopo il segno R nella linea I noi vediamo che trascorrono parecchi secondi prima che appaia una contrazione dei vasi sanguigni nella mano; ed alcuni secondi più tardi questa contrazione si manifesta anche nei piedi.

Non posso arrestarmi a fare delle considerazioni sul tempo che intercede fra l'istante in cui succede un'impressione psichica e quello in cui appare un movimento

riflesso nei vasi sanguigni, perchè questo è uno studio fatto nel mio laboratorio dal dott. Fano intorno cui verrà prossimamente pubblicata una Memoria a complemento della comunicazione preliminare già fatta all'Accademia dei Lincei nel 1882. E così pure non posso trattenermi a parlare del tempo necessario perchè in seguito ad un fatto psichico, o ad una eccitazione qualunque si modifichi il respiro, giacchè anche questo studio farà parte di una prossima memoria.

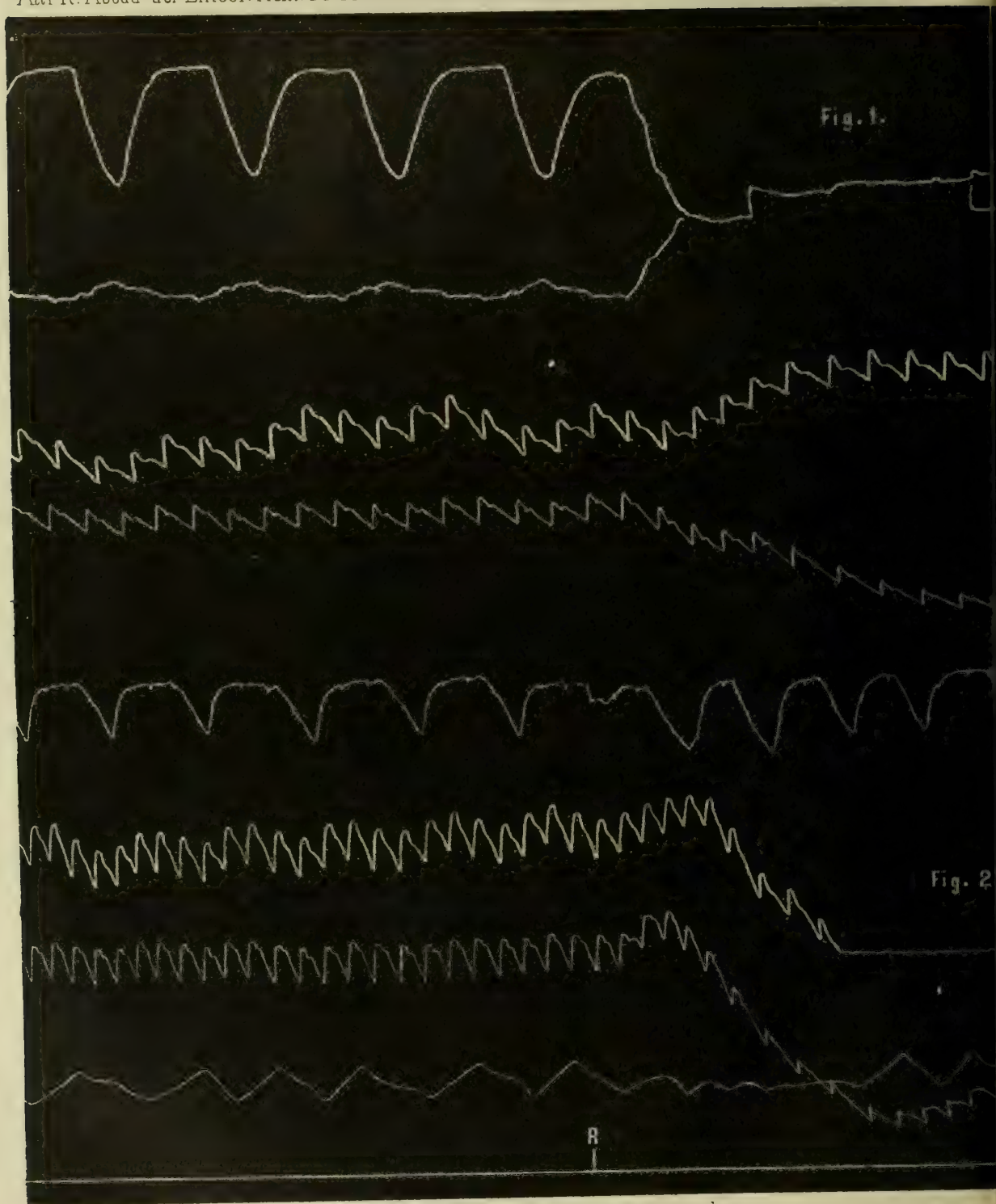
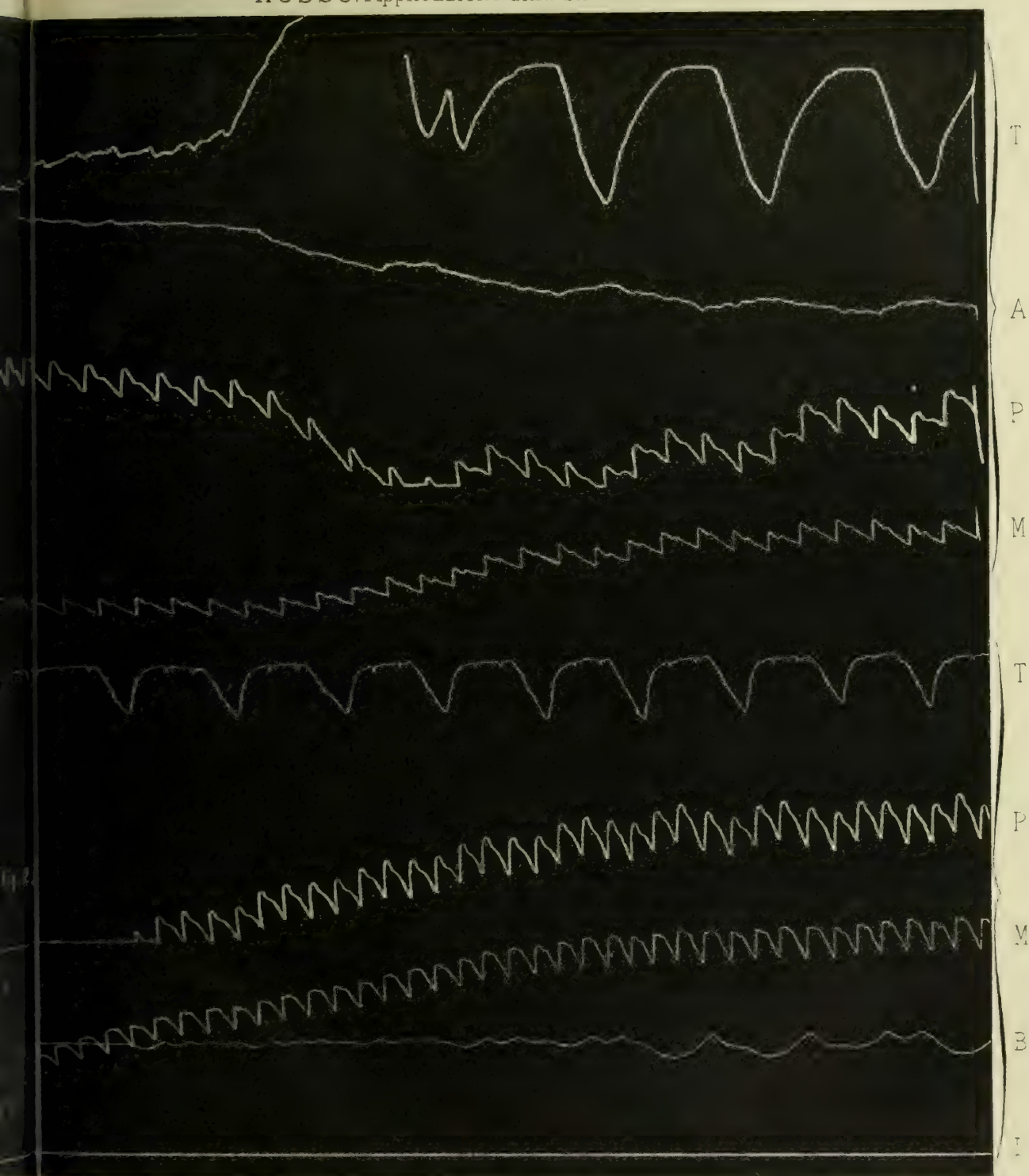
Paragonando il tracciato della respirazione toracica T colla linea I, che segna l' istante in cui si è fatto il rumore, noi vediamo che quasi immediatamente dopo il rumore il torace si arresta nel principio della inspirazione.

Quando la contrazione dei vasi sanguigni nella mano e nel piede ha raggiunto il suo massimo, la bilancia trabocca definitivamente verso il capo, e vi rimane ferma durante tutto il tempo che persiste la diminuzione di volume del piede. La linea del polso del piede non è completa, essa decorre per un tratto orizzontale dove la penna è trattenuta dal timpano sottostante. I vasi sanguigni nella mano e nel piede dopo di essersi contratti rapidamente senza che la persona si svegli, si rilasciano subito dopo seguendo la curva che vedesi completa nel tracciato della mano.

Quanto al respiro vediamo che dopo un breve arresto seguono immediatamente alcune respirazioni più rapide e più profonde e che poi riprende il ritmo di prima.

Nella linea B segnata dalla bilancia si vedono delle sinuosità che corrispondono al ritmo del polso. Potrei riferire altri tracciati dove sono meglio evidenti queste traccie delle pulsazioni cardiache, ma è inutile perchè l' inerzia dell' apparecchio lascia solamente riconoscere la frequenza del polso.

Con ciò è dimostrato che tutti i fenomeni da me osservati nei vasi sanguigni dell' uomo per mezzo del pletismografo cioè le pulsazioni, le oscillazioni respiratorie, i movimenti spontanei dei vasi sanguigni o le ondulazioni corrispondenti ai fatti psichici sono egualmente visibili per mezzo della bilancia.

Fotot. F.^{lli} Doyen

MOSSO. Applicazione della bilancia allo studio della circolazione

Influenza del calore e del magnetismo sulla resistenza elettrica del bismuto.

Memoria del prof. AUGUSTO RIGHI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 1 giugno 1884.
(con tre tavole)

PARTE PRIMA

Resistenza del bismuto alle diverse temperature.

1. Nella mia Memoria: *Ricerche sperimentali sul fenomeno di Hall, particolarmente nel bismuto* (¹) accennai alla grande influenza che ha il magnetismo sulla resistenza di questo metallo, ripromettendomi di studiare a fondo un tal fenomeno. Per accingermi a questo studio, preparai gli apparecchi adatti onde misurare con esattezza la resistenza d'una laminetta di bismuto collocata fra i poli di un'elettrocalamita, prima quando il circuito di questa era aperto, poi quando era chiuso e percorso da un'intensa corrente; ma fino dalle prime misure mi accorsi che i valori che ottenevo per la resistenza del bismuto, anche quando non era esposto all'azione del magnetismo, erano diversi, secondo la maggior o minore intensità della corrente che percorreva la lamina e che serviva per la determinazione della resistenza. Tanto più intensa era questa corrente, tanto minore era il valore della resistenza che ottenevo.

Per spiegare queste variazioni di resistenza come effetto del riscaldamento prodotto dalla corrente, giacchè nessun'altra ipotesi attendibile mi si presentava, bisognava ammettere che nel bismuto, da me adoperato, contrariamente a ciò che accade negli altri metalli, la resistenza diminuisse al crescere della temperatura. Ma dalle ricerche ben note di Matthiessen e von Bose (²) risulta invece che il bismuto non si allontana dalla regola generale.

Riflettendo tuttavia alle molte singolarità che il bismuto presenta, specialmente in causa della struttura cristallina, mi sorse il dubbio, che il modo nel quale viene preparato e lavorato, possa influire sulle variazioni di resistenza prodotte dalla temperatura.

Per cui misurai la resistenza d'una lastrina di bismuto, facendola percorrere da una debole corrente, e riscaldandola più o meno entro un bagno. Effettivamente

(¹) Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna, ser. IV t. V. N. Cimento, marzo 1884. Journal de Physique, mars 1884.

(²) Pogg. Ann. t. CXV p. 353.

riconobbi che la resistenza diminuiva col riscaldamento. Questa prova preliminare mi decise ad intraprendere uno studio dettagliato su questo soggetto, ed è così che ebbero origine le ricerche, alla narrazione delle quali è consacrata la prima parte della presente Memoria.

2. Il bismuto adoperato dai due fisici citati, non era in forma di laminette fuse aderenti ad un vetro, ma in forma di fili. Per ottenere questi fili essi adottarono lo stesso processo, già adoperato dal Matthiessen in una precedente ricerca ([1]) per altri metalli, e cioè comprimevano fortemente il metallo, riscaldato alquanto, entro un cilindro cavo d'acciaio per mezzo d'un secondo cilindro che entrava nella cavità del primo, cosichè il metallo usciva in forma di filo per un forellino praticato nel fondo del primo cilindro. Un pezzo di questo filo era fissato fra due morsetti in un bagno d'olio, la cui temperatura si elevava gradatamente sino a circa 100°, e ne era misurata alle diverse temperature la resistenza.

I risultati delle misure fatte su tre pezzi d'un tal filo, sono rappresentati dalla formola:

$$\lambda = 100 - 0,35216\, t + 0,0005728\, t^2$$

in cui t è la temperatura, e λ la conducibilità del bismuto, presa come 100 quella dell'argento. Inoltre il metallo adoperato da Matthiessen e von Bose, era ottenuto riducendo il nitrato basico di bismuto, ed era assai puro. Quello adoperato da me era quale è fornito in commercio sotto il titolo di bismuto puro.

Essi notarono poi, che il loro filo, coi successivi riscaldamenti aumentava di conducibilità, fenomeno del resto offerto da quasi tutti i metalli, ma che però tale aumento di conducibilità era notevolissimo in seguito al primo riscaldamento. Di più i risultati delle misure non erano abbastanza regolari che a patto di adoperare fili assai sottili, perciò i fili di bismuto adoperati furono alcuni di circa mezzo millimetro di diametro, altri anche più sottili.

Queste ed altre irregolarità del bismuto sogliono spiegarsi con cambiamenti interni di struttura in questo metallo eminentemente cristallino.

Oltre alle ben note singolari proprietà del bismuto, e cioè le proprietà termoelettriche, le diamagnetiche, il possedere il massimo peso atomico, alle quali si possono ora aggiungere la produzione tanto intensa del fenomeno di Hall, e le grandi variazioni della sua resistenza elettrica per effetto del magnetismo, come si vedrà nella seconda parte della presente Memoria, questo metallo offre pure un'anomalia in quanto alla sua resistenza elettrica. Infatti fu scoperto da Matteucci ([2]); che la resistenza del bismuto allo stato di fusione è assai minore che allo stato solido, ciò che fu confermato dal Matthiessen ([3]), mentre l'opposto accade in altri metalli, poichè difatti dalle ricerche di questo fisico risultò che il sodio ed il potassio aumentano alquanto di resistenza nell'atto della fusione, il primo bruscamente alla temperatura di 96° alla quale fonde, il secondo gradatamente da 46°,8 a 56°,8.

3. Nel corso delle mie ricerche non mi sono limitato a preparare i pezzi di bismuto in una sola maniera.

([1]) Pogg. Ann. t. C p. 179.
([2]) N. Cimento. t. I p. 38; Ann. de Ch. et Phys. 3me série t. 43 pag. 472.
([3]) Pogg. Ann. t. C p. 177.

Ho adoperato:

a) Laminette più o meno sottili ottenute fondendo il metallo su lastrine di vetro alle quali resta aderente, come ho spiegato nella Memoria citata.

b) Bismuto in cilindretti ottenuti aspirando il metallo fuso, in tubetti di carta, fatti arrotolandola intorno ad un filo metallico, come si arrotola la carta per fare una sigaretta. Questi cilindretti furono alcune volte limati, e ridotti in forma di spranghettine a sezione rettangolare.

c) Bismuto in fili ottenuti per pressione alla maniera di Matthiessen.

A questo scopo adoperai un cilindro AB (fig. 1 tav. I) d'acciaio alto 5 centimetri, con 3 centimetri di diametro nel quale era praticato un foro cilindrico per la massima parte, e conico ad una estremità, alla quale trovavasi un piccolo foro F. Un cilindro CD terminato in cono e grosso 12^{mm} poteva entrare esattamente nella cavità a guisa d'uno stantufo. Posto sotto lo stantufo del bismuto fuso, e mantenuto il tutto ad una temperatura di poco inferiore a quella di fusione del bismuto, l'apparecchio veniva collocato in una morsa di ferro. Girandone la vite, si obbligava il metallo ad uscire sotto forma di filo solido *ff*, perfettamente cilindrico e lucente, che si riceveva entro un cannello di vetro onde non perdesse la forma rettilinea. Fra i cilindri d'acciaio ed i labbri della morsa, era interposto un poco di amianto, onde scemare la dispersione del calore.

D'altronde con un becco a gas si compensavano continuamente le perdite, e si manteneva il bismuto caldo al grado dovuto.

Con un po' d'esercizio riuscii ad ottenere fili assai lunghi e perfetti. Stringendo a tutta forza la morsa, il filo cominciava ad uscire, e seguitava un certo tempo anche senza stringere ulteriormente. Se si arrestava, bastava stringere un po' più la vite della morsa oppure riscaldare un po' più i cilindri, per vederlo rimettersi in moto.

Se il bismuto è poco caldo, cresce tanto lo sforzo richiesto a farlo fluire in fili, che bisogna ricorrere a mezzi più potenti. Giunsi ad ottenerlo in fili alla temperatura ordinaria (15°), con un potente apparecchio, che mi permise di applicare sullo stantufo d'acciaio uno sforzo di 13500 chilogrammi [1] circa.

Questi fili li designerò colla denominazione di fili *fatti a freddo* per distinguerli da quelli ottenuti col metallo caldo quasi a fusione.

I fili ottenuti avevano un diametro di circa $0^{mm},75$. Contrariamente a quanto si potrebbe supporre, essi sono pieghevoli e poco fragili, purchè, se si vogliono deformare, si agisca con continuità e lentezza.

d) Bismuto cristallizzato, quale si trova in commercio. Da un grosso pezzo facevo segare delle sbarrettine a sezione rettangolare, come se avessi voluto costruire una pila termoelettrica.

e) Bismuto entro un cannello di vetro. Questo mi servì particolarmente per misurare la resistenza di questo metallo alle temperature prossime a quelle di

[1] Questo apparecchio è posseduto dalla Scuola di applicazione degl'ingegneri di Palermo, e potei farne uso per cortesia del prof. Salemi-Pace. Volli con questo apparecchio provare ad ottenere i fili riempendo il cilindro d'acciaio, non con metallo fuso, ma con bismuto pesto. Dovei impiegare uno sforzo maggiore di prima, ma d'un tratto si spaccò il cilindro d'acciaio, senza che il filo cominciasse ad uscire.

fusione, ed allo stato liquido. Trovai comodo dare al tubo di vetro la forma di U, assai largo in alto ma sottile nella parte curvata. Quivi il diametro interno, sensibilmente costante per tutta la sua lunghezza era di $1^{mm},006$ (misurato pesando una colonnetta di mercurio di lunghezza nota introdottavi). La lunghezza di questa porzione capillare era 60^{mm}. Alle due bocche del tubo ad U erano poi fissati per mezzo di tappi di sughero, due fili di rame incurvati come r, r' della fig. 4 tav. I, grossi circa 6^{mm}, e che giungevano fino di fronte ed a piccolissima distanza dalle estremità della parte capillare.

Questi fili di rame servivano per stabilire le comunicazioni.

Il bismuto riempiva non solo la parte capillare, ma anche buona parte dei tubi larghi, circondando così i due fili di rame.

4. In alcune delle mie misure mi sono contentato di conoscere alle varie temperature, la resistenza del pezzo di bismuto adoperato, senza occuparmi di conoscere la resistenza specifica rispetto al mercurio, e cioè il rapporto fra la resistenza effettiva, e quella del mercurio sotto egual forma e dimensioni ed a 0°. Ma il più delle volte calcolai la resistenza specifica alle varie temperature, al che si richiede la conoscenza esatta delle dimensioni del pezzo di bismuto àdoperato.

Pel bismuto contenuto nel tubo di vetro, le dimensioni erano date da quelle del tubo medesimo. Per le sbarrette a sezione costante operai così.

Con una buonissima bilancia sensibile al decimo di milligramma, pesavo la sbarretta di bismuto, già lavorata in modo da avere una sezione costante, asse rettilineo, e faccie terminali piane. Quindi per mezzo della macchina da dividere misuravo la lunghezza, colla precisione del mezzo millesimo di millimetro.

Potevo allora calcolare la sezione della sbarretta. Se l è la lunghezza della sbarra in metri, s l'area della sezione in millimetri quadrati, r la resistenza della sbarretta, b la resistenza specifica rispetto al mercurio si avrà:

$$b = \frac{rs}{l}$$

Così potevo per ogni misura di r calcolare b, cioè il valore della resistenza in U. S. che avrebbesi avuto, se la sbarretta conservando le sue proprietà, avesse posseduta la lunghezza d'un metro, e la sezione d'un millimetro quadrato.

Le sbarrette o fili di bismuto, erano fissate a due grossi pezzi di filo di rame.

Se dovevo sperimentare a temperature non superiori ai 110° circa, il pezzo di bismuto veniva saldato, per mezzo di una lega di bismuto, stagno e piombo. L'adoperare la saldatura ordinaria di stagno e piombo non era conveniente, giacchè anche con questa il bismuto si staccava dal rame a temperatura molto più bassa di quella di fusione della saldatura.

Evidentemente al contatto del bismuto si formava la lega dei tre metalli.

Difatti quando il bismuto si staccava, rimaneva solida la saldatura, conservandone la forma in incavo. Coll'ordinaria saldatura non si poteva quindi operare a temperature superiori a circa 110° come appunto adoperando la lega indicata, mentre quest'ultima aveva il vantaggio di richiedere un saldatoio poco caldo per essere applicata, d'onde eliminato il pericolo di fondere o deformare la sbarretta di bismuto.

Per operare a temperatura più elevata, cioè fin verso la temperatura di fusione

del bismuto, esso veniva fissato ai due fili di rame per pressione. E cioè, i due fili di rame erano tagliati per lungo e le due parti separate dal taglio venivano accostate a forza per mezzo di viti. I capi della sbarretta di bismuto erano introdotti in questa specie di morsetti e stretti fortemente.

Allora si prendeva come lunghezza della sbarretta, la lunghezza della porzione che rimaneva libera fra i due fili di rame. Generalmente però cominciavo col saldare la sbarretta per le sue faccie terminali ai fili di rame, e dopo misuratane la resistenza specifica a 0°, la staccavo e la collocavo nei fili a morsetto. Allora rifacendo una misura a 0°, era eliminata l'incertezza della misura della lunghezza della sbarra fra i morsetti.

5. Vediamo ora la disposizione sperimentale per la misura delle resistenze.

Non possedendo, al momento in cui ne avevo bisogno, il Gabinetto di fisica della R. Università di Palermo, nessun reocordo per misura di resistenze, ne feci improvvisare uno rozzo, ma tale da servire bene, con un filo di pach-fong di circa 20 metri di lunghezza e di 0, 22 U. S. di resistenza per metro.

Un tratto di poco più d'un metro fu teso sopra una tavola munita di due guide, fra le quali scorreva un corsoio per stabilire il contatto mobile, terminato da una lastrina d'argento premuta di taglio sul filo, da un peso; il resto fu avvolto su 5 cilindri di legno, portanti un apposito solco elicoidale, fissati verticalmente su basi rettangolari.

Tanto i capi del filo teso, quanto quelli di ciascun rocchetto, erano saldati a grossi fili di rame rivolti in basso ed amalgamati alle estremità.

I cinque rocchetti furono segnati colle lettere A, B, C, D, E per denominarli. Il primo A fu fatto con un pezzo di filo un po' minore d'un metro; il secondo B ed il terzo C con meno del doppio; D con poco meno della somma delle lunghezze dei tre precedenti; E con un tratto di filo lungo meno della somma di quello degli altri quattro.

Il filo teso misurava esattamente $1141^{mm},3$.

Alle due estremità del filo teso M N collocai due tavolette di legno X, Y (fig. 2 tav. I), portanti ciascuna allineate sei cavità equidistanti piene di mercurio. Da ciascuna parte il filo di rame saldato al filo teso s'immergeva nella prima cavità; nelle altre potevano entrare i fili di rame terminali dei rocchetti, come pure i capi degli altri fili richiesti per costituire un ponte di Wheatstone.

6. Così preparato il filo, bisognava, 1° riconoscere se era uniforme la resistenza del filo teso, 2° valutare a quanti millimetri del filo teso corrispondeva il filo di ciascuno dei cinque rocchetti.

Per l'uno e per l'altro scopo adottai il seguente metodo semplicissimo ed esatto.

Presi un pezzo del solito filo di pach-fong lungo circa 10 centimetri e saldai ai suoi estremi due grossi pezzi di rame amalgamato, che feci immergere nei pozzetti *a* e *b* (fig. 3 tav. I) di sinistra. Due fili di rame R, R′, riuniti insieme e ad uno dei capi del galvanometro a specchio G, pescavano in *b* ed *a′* insieme ai reofori della pila P. Messo il corsoio C in un dato punto del filo teso, per esempio allo zero, che era a sinistra, riducevo i fili R ed R′ tali da far rimanere a zero il galvanometro.

Allora il filo F era tolto dal posto e messo fra a' b', mentre naturalmente i fili che prima pescavano in b ed a' erano portati rispettivamente in a e b', e quindi rimettevo a zero il galvanometro spostando il corsoio. Evidentemente lo spostamento del corsoio dava sul filo teso una resistenza eguale a quella del filo F. Allora si rimetteva F nel luogo primitivo cioè tra a e b, si rimetteva a zero il galvanometro variando R ed R', e quindi si riportava F fra a' b' mettendo di nuovo a zero il galvanometro collo spostamento del corsoio. Questo nuovo spostamento doveva essere esattamente eguale al primo, se il filo teso era omogeneo nei due tratti percorsi dal corsoio. Continuando nella stessa guisa si poteva più volte percorrere tutto il filo teso, e riscontrare se eguali resistenze erano rappresentate ovunque da un'eguale lunghezza.

Col filo adoperato non trovai che differenze tanto piccole, da ritenerlo come buono all'uso al quale veniva destinato.

In modo simile operai per misurare in millimetri del filo la resistenza dei cinque rocchetti.

Posto in luogo di F il rocchetto A ed il corsoio C presso l'estremità sinistra del filo teso, portai a zero il galvanometro regolando le resistenze R ed R'.

Portai allora A fra a' e b', e per ricondurre a zero il galvanometro dovei spostare di 973^{mm} il corsoio verso destra. Il rocchetto A aveva dunque una resistenza pari a quella di 973^{mm} del filo.

Per gli altri rocchetti, la cui resistenza era maggiore di quella del filo teso, aggiunsi a questo i rocchetti precedentemente misurati. Così per esempio per B posi prima B fra a e b, ed A fra a' e b', portai a zero il galvanometro lasciando il corsoio verso l'estremità sinistra del filo teso, ma variando R od R'. Poi cambiai fra loro di posto i due rocchetti A e B, e rimisi a zero il galvanometro spostando il corsoio. Lo spostamento richiesto fu $901^{mm},4$, che evidentemente rappresenta la differenza fra la resistenza di B e quella di A. In modo simile misurai tutti i rocchetti, che risultarono del seguente valore in millimetri del filo teso.

Rocchetto	A	973^{mm}
»	B	1874,4
»	C	1871,8
»	D	4683,4
»	E	9474,1
Filo teso		1141,3
	Totale	20018,0.

Con i valori dati alle resistenze dei rocchetti era possibile collocarli alcuni a destra alcuni a sinistra del filo teso in modo da dividere col corsoio l'intera lunghezza del filo di pach-fong in un rapporto qualunque.

Quando nella misura d'una resistenza il corsoio, mosso onde mettere a zero il galvanometro, giungeva ad una delle estremità del filo teso, bastava cambiar posto a qualche rocchetto per far cadere sul filo teso la posizione voluta del corsoio.

L'essere l'intera resistenza del reocordo formata da un medesimo filo, ha

evidentemente il vantaggio che un po' di riscaldamento prodotto dalla corrente non influisce sulle misure.

7. Dopo avere constatato, come già il Matthiessen, che col contatto dell'olio caldo, non è alterata in modo sensibile la resistenza misurata, per riscaldare il bismuto, lo immersi direttamente nell'olio contenuto in un vaso di ferro V (fig. 4 tav. I) sotto al quale si ponevano dei becchi Bunsen. Nell'olio trovavansi pure un agitatore anullare ed un termometro a mercurio T. Il bismuto *b* era fissato in uno dei modi già indicati, a due fili di rame *r*, *r'* grossi circa 8^{mm} piegati in modo da entrare in due vaschette di rame S,S' piene di mercurio. Un arco A fatto collo stesso filo di rame dei pezzi *r* ed *r'* e di lunghezza all'incirca eguale alla somma di quelle dei medesimi poteva far comunicare direttamente le due vaschette, sopprimendo così virtualmente dal circuito la resistenza del bismuto.

Per ottenere temperature basse mi valsi di etere invece che d'olio. Una corrente d'aria spinta da un mantice gorgogliava nel liquido, il quale per evaporazione si raffreddava rapidamente anche fino a -16°. La presenza dell' etere all' intorno del bismuto non alterava sensibilmente il valore della resistenza.

Per temperature anche più basse che ho avuto bisogno di raggiungere due o tre volte, ho adoperato il miscuglio di anidride carbonica solida ed etere.

Sia che il bismuto si riscaldasse o si raffreddasse, non procedevo ad una misura, senza avere prima constatato che la temperatura da qualche minuto fosse mantenuta costante, specialmente alle alte temperature. L' intento si raggiungeva facilmente manovrando opportunamente il rubinetto dei becchi a gas. Per ogni temperatura si doveva misurare la resistenza del bismuto insieme ai fili delle comunicazioni, poi la resistenza di queste, sopprimendo la resistenza del bismuto dal circuito per mezzo dell'arco A, come si dirà fra poco.

8. Le comunicazioni fra il bismuto e gli apparecchi di misura, erano disposte come nel diagramma fig. 5 tav. I, ove G è il galvanometro, P la pila, C il corsoio, M una resistenza nota, i cui capi terminano in un nuovo pozzetto *h* ed in uno di quelli della tavoletta X, e forma uno dei due lati del ponte opposti al reocordo, V il recipiente col bismuto, il quale insieme ai fili di rame *p*, *q* che lo mettono in comunicazione coi pozzetti *h* e *c'*, forma l'altro lato del ponte opposto al reocordo.

La resistenza M fu alle volte la unità campione, altre volte un filo di pach-fong di resistenza minore, accuratamente misurata ad una nota temperatura.

Naturalmente il vaso V era assai lontano dagli apparecchi, onde non irradiasse su di essi, e specialmente su M, del calore.

Però la temperatura dei fili di comunicazione *p* e *q* non poteva non variare, d'onde la necessità di una doppia misura per ogni determinazione della resistenza del bismuto.

Sia M la resistenza di confronto, *r* quella del bismuto, *x* quella dei fili *p* e *q*, L la lunghezza totale del filo di pach-fong, che fu quasi sempre di 20018^{mm}, l_2 la lettura del ponte quando è messo a zero il galvanometro, l_1 la nuova lettura del ponte quando si è messo l'arco di rame che sopprime la resistenza del bismuto. Naturalmente con l_1 si comprende la lunghezza del filo teso alla sinistra del corsoio, data dalla scala annessa, più la lunghezza rappresentata da quelli dei cinque

rocchetti A, B, C, D, E, che trovansi dalla stessa parte. Lo stesso dicasi per l_2. Si avrà allora:

$$\frac{M}{x}=\frac{l_1}{L-l_1}, \quad \frac{M}{r+x}=\frac{l_2}{L-l_2},$$

da cui $r=LM\frac{l_1-l_2}{l_1 l_2}$.

Dalle due misure si ricava adunque r, resistenza del bismuto. Conoscendo poi le sue dimensioni, può calcolarsi la resistenza specifica, poichè essendo come si è visto $b=\frac{rs}{l}$, si ha $b=\frac{sLM}{l}\cdot\frac{l_1-l_2}{l_1 l_2}$.

La prima frazione del valore di b è una costante per un dato pezzo, che si calcola una sola volta.

Misurando così la resistenza del bismuto s'incontra però dapprima una seria difficoltà, per la corrente termoelettrica che si sviluppa in seguito al fenomeno di Peltier che ha luogo alle due estremità del bismuto. Con questo metallo la corrente in discorso ha un'intensità assai grande, e bisogna eliminarne l'influenza sulle misure.

L'osservatore che guarda al galvanometro, ha perciò a portata di mano due tasti: coll'uno interrompe o chiude a volontà la corrente della pila, coll'altro il circuito del galvanometro. Per un noto teorema, quando in uno dei lati del ponte esiste una forza elettromotrice, la proporzionalità fra le quattro resistenze dei medesimi ha luogo, quando la deviazione del galvanometro è, non già nulla, ma indipendente dalla resistenza della diagonale ove è inserita la pila. Per fare quindi la determinazione di l_2 dovevasi cercare la posizione del corsoio per la quale l'indicazione del galvanometro era sempre la stessa, aperto o chiuso che fosse col rispettivo tasto il circuito della pila.

La cosa sarebbe stata facile, se invece della forza elettromotrice destata in seguito al fenomeno di Peltier, si avesse avuto una forza elettromotrice chimica o altra sensibilmente costante.

Ma siccome non appena si apre il circuito della pila, le differenze di temperatura generate dalla corrente alle estremità del bismuto scompaiono rapidamente, così la deviazione galvanometrica non si mantiene costante ma decresce rapidamente, e non è possibile soddisfare alla condizione richiesta per la misura. Per ovviare a tale inconveniente mi limitai a far uso d'una sola e debole coppia per la misura, poi cercai sempre di collocare i varî fili in modo che tenendo chiuso il circuito del galvanometro, non si avesse nessuna corrente indotta apprezzabile, chiudendo od aprendo quello della pila. Allora, tenuto abbassato il tasto del galvanometro, l'osservatore che stava al cannocchiale faceva spostare il corsoio dall'altro osservatore che stava al ponte, finchè la indicazione galvanometrica non cambiasse sia chiudendo momentaneamente il circuito della pila, sia aprendolo per un istante, dopo averlo lasciato chiuso un certo tempo, durante il quale la posizione di fermata del galvanometro cambiava per il sorgere della forza elettromotrice su indicata.

Nel fare tali misure, si badava anche alle frazioni di millimetro, nel campo del cannocchiale.

Quando poi il bismuto veniva riscaldato o raffreddato nel bagno di olio o di

etere, benchè coll' agitatore si cercasse di rendere per quanto passibile uniforme la temperatura, pur tuttavia accadeva spesso che per qualche lieve differenza di temperatura alle estremità del metallo studiato, si sviluppasse qualche corrente termoelettrica. Operando nel modo indicato or ora queste correnti non recavano nessun disturbo nella misura.

Onde risparmiare di trasportare troppo spesso da destra a sinistra o viceversa i rocchetti del reocordo, e di questo trasporto v'è in generale necessità poichè la resistenza dei fili p e q suol essere assai piccola in confronto a quella del bismuto, in una serie di determinazioni a temperature successivamente diverse, le misure si facevano in ordine alternato.

Così trovato l_1 ad una data temperatura e poi l_2, alla successiva temperatura si trovava prima l_2 poi l_1 e così di seguito.

9. Le prime misure furono eseguite con una lastrina di bismuto grossa circa 1^{mm}, che fu fusa e limata sopra un vetro, dal quale poi si staccò per saldarla ai fili di rame rr' (fig. 4 tav. I).

La resistenza diminuiva visibilmente coll' innalzarsi della temperatura, cioè si comportava questo bismuto allo inverso degli altri metalli.

Prese come ascisse le temperature e come ordinate le resistenze, i punti rappresentativi delle varie misure riuscirono collocati sensibilmente sopra una retta.

Nella prima colonna della tabella I seguente sono notate le temperature, nella seconda le resistenze $r = \mathrm{L\,M}\,\frac{l_1 - l_2}{l_1 l_2}$ misurate, ed espresse in unità Siemens, nella terza i valori di r calcolati colla formola seguente:

$$r = 0,01104\,(1 - 0,000918.\,t),$$

e nella quarta le differenze fra i valori calcolati ed i misurati.

I.

t	r misurata	r calcolata	differenza
14°,8	0,01089	0,01089	0,00000
35, 8	1066	1068	— 2
50, 8	1053	1053	0
68	1032	1035	— 3
96	1011	1007	+ 4
67, 5	1039	1036	+ 3
43, 8	1058	1060	— 2
26, 3	1072	1077	— 5
18, 8	1082	1085	— 3

Un risultato simile fornì una lastrina di bismuto aderente al vetro sul quale venne fusa, grossa $0^{mm},127$, ma le variazioni della resistenza colla temperatura riuscirono più grandi:

II.

t	r misurata	r calcolata	differenza
64°	0,04210	0,04210	0,00000
56, 8	4272	4277	— 5
51	4299	4296	+ 3
41, 2	4365	4361	+ 4
31, 6	4429	4425	+ 4
24, 8	4470	4470	0
10, 9	4557	4562	— 5

I numeri della 3ª colonna furono calcolati colla formola:

$$r = 0,046346\,(1 - 0,0014323.\,t).$$

L'ultima lastrina essendosi per caso staccata dal vetro, potei saldarla ai fili di rame assai grossi della fig. 4.

Ma le sue dimensioni, che misurai accuratamente, furono variate. Rimase larga 7^{mm}, e lunga 15^{mm}. Siccome poi era grossa $0^{mm},127$, avevo gli elementi necessari a calcolarne la resistenza specifica b, alle diverse temperature, o in altre parole il valore della resistenza, sempre in U. S. che avrebbesi ottenuto se la lastrina fosse stata lunga un metro, ed avesse avuto 1^{mm}q. di sezione.

La tabella seguente contiene le temperature, le resistenze misurate della lastrina e le corrispondenti resistenze specifiche.

III.

t	r	b
17°,1	0,05831	3,456
26, 3	5775	423
35, 9	5700	378
49, 3	5593	315
60, 8	5514	268
77, 5	5405	203
95, 2	5304	144

È utile confrontare questi risultati, con quelli ottenuti da Matthiessen e von Bose, relativi a fili di bismuto. I due fisici tedeschi esposero i loro risultati, dando i valori della conducibilità del bismuto alle varie temperature e prendendo come 100 la conducibilità dell'argento a zero. È facile calcolare la resistenza specifica, presa come uno quella del mercurio a zero, sapendosi che la conducibilità dell'argento, presa per unità quella del mercurio, è 61, 4. Infatti se c è la conducibilità del bismuto rispetto all'argento presa come 100, rispetto alla conducibilità dell'argento presa come 61, 4 sarà $\frac{61,4}{100}\,c$.

Quindi $\frac{61,4}{100}\,c$ sarà la conducibilità del bismuto rispetto al mercurio.

La resistenza rispetto al mercurio sarà dunque $b = \frac{100}{61,4\,c}$

La tabella seguente contiene nelle prime due colonne le temperature e le conducibilità misurate da Matthiessen e von Bose per uno dei loro fili [1]: la terza colonna contiene le resistenze specifiche calcolate colla formola precedente.

t	c	b
9°,20	1,4059	1,1585
26, 15	3226	2314
39, 50	2609	2825
57, 25	1863	3729
68, 95	1397	4290
84, 35	0833	5034
96, 35	0428	5618

Dal confronto dei numeri dell'ultima colonna, con quelli pure dell'ultima colonna della tabella III risulta, non solo l'andamento opposto delle variazioni di resistenza colla temperatura, ma altresì il gran divario che corre fra i valori della resistenza specifica ad una data temperatura trovati da me e dagli altri sperimentatori citati.

Con altre lastrine, ebbi risultati concordanti, che trovo inutile riferire. Sempre la resistenza diminuiva col riscaldamento, ed i valori ottenuti per la resistenza specifica a 0° erano sempre notevolmente maggiori di quelli che risultano dalle misure dei due fisici tedeschi.

Credei dunque necessario ripetere le misure su bismuto preparato in diverse altre maniere.

10. Fu allora che preparai il bismuto entro cannello di vetro. Il metallo vi fu posto in piccoli frammenti, e si fuse riscaldando l'olio nel quale il tubo stava immerso.

Allora furono ben puliti e messi a posto i fili di rame per le comunicazioni, e tosto cominciate le misure, e continuate mano a mano che l'olio si raffreddava.

Nella seguente tabella ho notato le temperature t e le resistenze specifiche b di questo bismuto.

IV.

t	b
295°,5	1,325
285, 5	323
276	365
265, 5	797
248, 5	2,513
232	622
202, 5	616
181, 5	574

Le prime due misure mostrano che il bismuto liquido si comporta come ogni altro metallo, e cioè cresce la sua resistenza al crescere della temperatura. La grande

(1) Pogg. Ann. t. CXV p. 382.

variazione di resistenza che ha luogo intorno alla temperatura di fusione, conferma poi il fatto scoperto da Matteucci, dell'essere cioè il bismuto fuso assai meno resistente del bismuto solido. Si può anzi asserire che solidificandosi il bismuto raddoppia all'incirca di resistenza.

Infine dalle ultime tre misure risulta che a temperature abbastanza inferiori a quella del cambiamento di stato, il bismuto si comporta regolarmente, come gli altri metalli.

Diveniva quindi maggiormente interessante lo sperimentare anche a temperature inferiori a 100°, come già avevo fatto colle lastrine, onde vedere se il bismuto contenuto nel tubo continuava a comportarsi come fra 181°,5 e 232°, oppure se si comportava come le lastrine.

È ciò che feci ripetutamente, riscaldandolo gradatamente dalla temperatura ordinaria fino a 330° circa, poi lasciandolo lentamente raffreddare.

Le tabelle seguenti danno i risultati ottenuti in due serie di misure:

V.

t	*b*	*t*	*b*
37°,5	2, 686	286°,5	1, 327
57	636	267, 6	684
74, 5	599	261, 4	2, 436
98, 5	559	249, 5	644
115, 5	542	236	710
136, 5	556	216, 5	600
154, 6	565	190	459
176, 5	596	155, 5	349
196, 5	635	127, 5	279
216, 5	669	95, 7	238
236, 5	631	59, 5	270
256, 7	296	23, 5	331
265	1,607	16	359
285	327		
307, 5	336		
330	342		

VI.

t	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*
14°,5	2, 362	85°,5	2, 231	215°,5	2, 608	316,°5	1, 326
23, 4	339	95, 5	237	236, 4	682	295	325
33, 6	312	105, 6	245	251, 5	650	255, 5	2. 747
38, 5	304	122	261	271, 5	1, 594	195, 4	691
45, 5	288	135, 5	292	286, 4	319	157, 5	561
55	267	156, 7	355	306	321	112	504
67, 5	248	175, 5	428	326	331	85, 5	523
74, 5	241	195, 4	512			26	777
						16	882

Dall' esame di queste tabelle si vedono confermati, tanto i risultati già avuti colle laminette fuse, quanto quelli ottenuti alle temperature prossime al punto di fusione. Infatti secondo la penultima tabella al crescere della temperatura, la resistenza dapprima diminuisce, presenta un minimo intorno a 115°,5 poi cresce di nuovo fino ad una temperatura prossima a 216°,5 ove presenta un massimo. In seguito decresce di nuovo dapprima lentamente poi rapidamente, mentre il metallo passa allo stato liquido, presenta un nuovo minimo, indi cresce al crescere della temperatura come in ogni metallo.

Secondo l'ultima tabella si mostra per la resistenza lo stesso andamento, salvo le temperature cui corrispondono il massimo ed i due minimi, che sono un poco diverse. Confrontando poi in una stessa tabella i valori della resistenza nella fase di decrescimento della temperatura, a quelli della fase d'aumento, si riconosce che sono generalmente diversi per una stessa temperatura: ma concordano sensibilmente i valori della resistenza a temperatura decrescente della prima tabella, con quelli a temperatura in aumento della seconda.

Ciò rivela che nel bismuto che si raffredda avvengono dei cambiamenti persistenti di struttura, variabili da una volta all'altra. Costruendo graficamente i risultati, tutte queste conseguenze appariscono più chiaramente. Nella tavola II ho preso per ascisse le temperature, ogni millimetro corrispondendo a due gradi, e per ordinate le resistenze specifiche, un'unità essendo rappresentata da 50 millimetri, ed ho condotto una linea continua in prossimità dei punti così ottenuti (per chiarezza rappresentati con piccoli cerchietti).

Coi numeri della tabella V è risultata la linea ABCDEFGHIL la parte ABCDEF essendo relativa alle misure prese mentre si aumentava la temperatura, e la parte GHIL mentre si diminuiva.

I numeri della tabella VI non sono rappresentati nella tavola per non complicarla troppo; dirò solo che per le misure fatte a temperatura crescente, i punti rappresentativi andrebbero a collocarsi quasi esattamente sulla linea LIHGF, mentre per le misure a temperatura decrescente i punti rappresentativi formerebbero una nuova linea, però col solito andamento. È dunque raffreddandosi che il bismuto si modifica, cosicchè raffreddato più volte assume diverse strutture; ma una volta raffreddato, riprende, riscaldato di nuovo, la resistenza stessa che ebbe ad ogni temperatura durante il raffeddamento. Era naturale che mi sorgesse il sospetto, che la diversa rapidità del raffreddamento fosse la causa che modificava la resistenza del bismuto per una data temperatura, giacchè è verosimile che con un rapido raffreddamento, solidificandosi tosto le parti esterne del bismuto, quelle interne rimanendo imprigionate, non possono liberamente assumere l'ordinaria struttura che importa un aumento di volume.

Mi rammentai appunto allora che dopo le misure della tabella IV, il tubo fu sollevato fuori dall' olio, e quindi rapidamente raffreddato. La resistenza a 15°,5 fu trovata il giorno dopo 2,7344.

Lo stesso giorno, dopo di avere riscaldato il tubo per far le misure, fu lasciato lentamente raffreddare e la sua resistenza a 16° fu solo di 2,3588.

Il giorno dopo, il periodo di raffreddamento fu probabilmente più rapido, e la sua resistenza in ultimo a 16° fu 2,8322.

Sembrava adunque che realmente la resistenza del bismuto crescesse tanto più, quanto più rapido ne era il raffreddamento.

Più volte provai a scaldare il tubo fino alla fusione del bismuto, e poi raffreddarlo il più rapidamente possibile.

Trovai resistenze maggiori che prima alla temperatura ordinaria, anche 3,2413 a 16°. Invece fatto raffreddare assai lentamente il bismuto, lasciandolo nell'olio, trovai 2,3124. Il giorno dopo la resistenza era un poco cresciuta, benchè la temperatura fosse rimasta la stessa.

Prima d' occuparmi più davvicino dell'influenza che ha la rapidità del raffreddamento, volli fare una nuova serie di misure per valori poco diversi della temperatura fra 240° e 300°, onde meglio definire la maniera con cui avviene la rapida variazione di resistenza intorno al punto di fusione.

I risultati sono dati dalla tabella VII, e rappresentati a parte nella tavola II, in M.

VII.

t	b	t	b	t	b
240°	2, 841	255°,5	2, 637	275°,8	1, 324
246	805	259, 5	502	278, 5	318
248, 5	757	263, 5	266	280, 5	315
250, 3	732	268, 6	1, 751	288, 7	313
252, 5	703	270, 5	379	295, 5	317

Si vede quindi che la diminuzione di resistenza comincia prima della fusione e dura dopo, quantunque la più rapida variazione avvenga durante il cambiamento di stato.

Potrebbe nascere il dubbio, che l' andamento speciale che presenta la curva della resistenza del bismuto, fosse causata dal trovarsi questo metallo entro un cannello di vetro, che in parte deve opporsi ai cambiamenti di volume che accompagnano le variazioni di temperatura. Perciò stimai opportuno studiare le variazioni di resistenza di sbarrette di bismuto fuse nell'olio e ivi lasciate lentamente raffreddare. Le curve ottenute, furono assolutamente simili a quelle già fornite dal bismuto contenuto nel tubo di vetro.

11. Volli vedere se protraendo il raffreddamento al disotto della temperatura ordinaria, la resistenza del bismuto continua a crescere oppure raggiunge un nuovo massimo. È in quest' ultima maniera che si comporta, stando ai risultati registrati nella tabella VIII e rappresentati nella curva NO nella tavola, quantunque il massimo l'abbia appena raggiunto ([1]).

VIII.

t	b	t	b	t	b
— 53°,3	3, 017	— 17°,6	3, 031	+ 13°,3	2, 925
39, 7	040	12, 7	011	60	705
27, 6	036	8, 9	002	102	582
25	044	6, 3	2, 996		
20, 1	037	3, 7	988		

([1]) L'anidride carbonica solida che adoperai per raffreddare il tubo, fu preparata con un apparato di Natterer, posto a mia disposizione dall'illustre mio collega professore Paternò.

La curva della resistenza del bismuto ha dunque la forma della fig. 6, tav. I. A temperature bassissime la resistenza cresce colla temperatura, come avviene per tutti i metalli. Ad una certa temperatura, che nel caso mio fu di circa — 40°, arriva però ad un massimo M_1, indi decresce fino a raggiungere un minimo m_1. Dopo cresce nuovamente fino ad altro massimo M_2, dopo di che, e cioè in vicinanza della temperatura di fusione, decresce rapidamente per raggiungere un altro minimo m_2. Dopo, essendo il bismuto già liquido, la resistenza cresce colla temperatura. In certo modo è una specie di fusione parziale invisibile che accade fra M_1 ed m_1, od in altri termini è verosimilmente un cambiamento di struttura che si produce, e che avvicina il bismuto alle condizioni della liquidità nelle quali la sua resistenza è assai minore.

Una piccola sbarrettina di bismuto limata, la cui resistenza venne misurata a partire da temperature assai basse, diede un risultato simile a quello che si ebbe col bismuto contenuto nel tubo di vetro, come apparisce dalla tabella IX, nella quale però a differenza delle ultime trascritte, sono notati i valori della resistenza in U.S. della sbarretta, invece della resistenza specifica, non avendo potuto misurarne le dimensioni.

IX.

t	r	t	r	t	r
— 51°,5	0,0890	— 13°	0,0891	39°,1	0,0818
45,7	896	6,9	884	63,4	794
38,1	898	+ 0,3	872	80,1	773
24,8	895	4,5	852	100,4	760
19,5	894	15,4	838		

12. Per rendere più manifesta l'influenza della rapidità della solidificazione o del raffreddamento, pensai di sperimentare con sbarrette di bismuto, anzichè con tubi di vetro pieni di questo metallo, giacchè in questo caso le pareti del tubo devono certamente opporsi al rapido raffreddamento.

Perciò presi varî cilindretti di bismuto preparati col metodo *b*) descritto, e li riscaldai uno ad uno, collocandoli entro una scanalatura *s* fatta in una lastra di rame AB, fig. 7, tav. I. Si potevano fondere le bacchettine, senza che avessero a deformarsi, un po' per la forma della lastra un po' per la poca scorrevolezza del metallo.

Alcune le lasciai raffreddare lentamente nell'olio caldo o nella sabbia calda; altre le raffreddai più o meno rapidamente, sia lasciandole sulla lastrina di rame esposta all'aria, sia tuffandole mentre erano ancora fluide nell'acqua fredda o nell'etere.

Ciascuna fu poi volta a volta fissata ai soliti due fili di rame colle viti di pressione, e messa in esperimento.

Le tabelle X, XI, XII porgono i risultati ottenuti con tre di queste sbarrette, e la curva della resistenza è rispettivamente rappresentata con PQ, RS, TU nella tavola II.

X.

t	b
— 12°,5	3, 337
7	327
+ 0, 3	298
15, 5	232
29, 5	172
52, 6	046
76, 4	2, 940
103, 5	832
134, 5	796
147	796
163, 8	782
184	793
200, 5	772
223, 4	772
235, 5	683
244	411

XI.

t	b
0°	3, 471
17, 5	441
33, 2	398
50, 7	300
81, 2	147
121, 5	2, 975
158	895
194, 5	879
222	866
236	764
246	616

XII.

t	b
1°,6	3, 519
17, 7	579
30, 3	604
40	624
53, 5	622
73	604
94, 7	561
126, 5	462
191, 5	2, 973
229, 7	415
243, 6	1, 796

È notevole la forma della curva P Q, poichè fa vedere che la resistenza del bismuto rimase sensibilmente costante da 134° a 223°.

Il cilindretto che diede la curva T U fu raffreddato rapidamente dopo la fusione; quelli che fornirono le curve P Q ed R S furono invece raffreddati più lentamente. Come ho avvertito altrove le sbarrette raffreddate in modo lentissimo danno curve simili alla A F. Si vede quindi che più il bismuto è rapidamente raffreddato, più la curva si eleva nella parte che corrisponde alle temperature basse, e quindi si eleva il massimo M_1; con bismuto raffreddato di più in più rapidamente i due massimi M_1 M_2 (fig. 6, tav. I), si spostano in senso contrario, accostandosi, continuando il primo ad elevarsi, ed il minimo intermedio m_1 sparisce. Poi i due massimi si fondono in uno solo, come appunto è il caso della curva T U. La rapida discesa che ha luogo presso il punto di fusione comincia in questo caso a temperatura più bassa, come vedesi dal confronto della curva A C colla L H, oppure della T U con una di queste.

13. Volli sperimentare ancora con fili di bismuto ottenuti per pressione col metodo *c*), sperando di ottenere con questi, risultati meno dissimili da quelli dei fisici più volte citati.

Sperimentai dapprima con fili fatti mantenendo il metallo ed il cilindro d'acciaio che lo contiene, a temperatura prossima a quella di fusione, ed ecco i risultati che ebbi con alcuni di quei fili.

XIII.

t	b
18°,5	3, 074
29, 6	087
46, 5	132
68, 7	159
80, 4	164
107, 5	155
94, 5	157
71	195
58	171
46, 3	133
37, 5	123
19, 9	081

XIV.

t	b
0°	3, 306
15, 5	273
33, 5	216
49, 5	146
75, 4	058
90, 5	007
104	2, 966
120, 4	932
139, 6	889
165, 5	854
199, 5	723
228	570
239	433

XV.

t	b
— 10°,3	4, 123
15, 9	095
6	147
+ 1, 5	164
5, 9	175
16, 6	184
34, 1	163
56, 3	095
80	3, 989
97, 3	904

XVI.

t	b
— 13°,1	3, 847
2, 7	940
0	955
+ 18, 6	4, 044
34 ,3	086
56, 1	100
68, 8	084
81, 9	063
102, 3	006
124	3, 898
145, 5	747
162, 5	557
184	307
204, 5	045
223, 5	2, 717
235, 7	276

I numeri delle tavole XIV, XV, XVI, sono stati costruiti graficamente nelle curve *a b*, *c'd*, *e f*, (tav. II). Col filo della tabella XIV, la curva della resistenza lascia scorgere ancora la tendenza ad un minimo e a due massimi, e cioè è simile affatto alla P Q. Le curve *cd*, *ef*, danno invece il caso estremo opposto, e cioè rassomigliano piuttosto alla T U. In generale i fili che si comportarono in quest'ultima maniera erano meno lucidi e lisci di quelli che diedero una curva simile alla *a b*. Ora anche raffreddando rapidamente del bismuto assai caldo, la sua superficie acquista un aspetto

un poco opaco. Verosimilmente adunque il diverso modo di comportarsi dei fili da me ottenuti, proveniva dal più o meno rapido loro raffreddamento, all'uscire dal cilindro d'acciaio.

I fili si comportano dunque come il bismuto fuso, e la curva della resistenza subisce le stesse modificazioni, a norma della diversa rapidità del raffreddamento.

Tuttavia una differenza si scorge fra le curve dei fili (che nella tavola II sono punteggiate) e quelle del metallo fuso; e cioè le prime sono più elevate. Il metallo che ha subìto una forte compressione, resta dunque più resistente.

14. Per evitare il raffreddarsi dei fili di bismuto nell'atto in cui sono fabbricati, cercai di farli alla temperatura ordinaria, e li ottenni nel modo descritto.

Questi fili si comportarono alla solita maniera, salvo che la curva della resistenza è ancora più elevata, ciò che era da prevedersi se veramente una forte compressione determina un aumento permanente di resistenza nel bismuto. Ecco infatti due serie di misure.

XVII.

t	*b*
0°	4, 903
48	387
117, 5	3, 684
152, 5	539
113	507
171, 4	513
183, 5	524
195	658
205	693
214, 5	660
239	214
21, 3	5, 007
0	634

XVIII.

t	*b*
— 16°,2	5, 103
0, 2	4, 913
+ 16, 5	718
38, 5	418
57	160
83, 5	3, 850
100	699
121, 5	606
144	534
157	518
175	497
184, 5	637
201, 5	680
213, 5	608
239	2, 706

Le due ultime misure della tab. XVII furono fatte, dopo avere tuffato rapidamente nell'etere, il filo, estratto appena dall'olio caldo, e confermano ciò che si asserì altrove, e cioè che col rapido raffreddamento si produce un notevole aumento di resistenza.

La curva $g\,h$, tratteggiata nella tavola, rappresenta i risultati della tabella XVII. Questa curva ha l'aspetto generale di quelle date dal bismuto fuso e lentamente raffreddato.

Col medesimo filo che alla fine delle misure della tabella XVII fu rapidamente raffreddato, feci il giorno dopo le misure seguenti.

XIX.

t	b	t	b
0°	6, 309	196°	3, 608
16	159	213, 5	518
48	5, 732	221, 6	449
93, 5	4, 652	237, 8	202
111, 5	185	244, 6	2, 924
150	3, 787		

Si vede dapprima che la resistenza a 0° variò nell'intervallo trascorso (circa 18 ore) fra l'ultima misura della tab. XVII e la prima della XIX.

Rappresentando poi i numeri della tabella XIX con una curva si ha la *i l* tratteggiata nella tavola II, la quale in confronto alla *g h*, rende palesi le solite modificazioni che produce un rapido raffreddamento nel bismuto.

La forma della curva *i l* può considerarsi come bene determinata, quantunque poche sieno le misure fatte nell'intervallo di circa 244° di temperatura. Ma in questa serie di misure, come in molte altre, durante il riscaldamento tenendo l'occhio al cannocchiale sorvegliavo continuamente il variare della resistenza, in modo da poter essere in grado di fare delle misure frequenti solo quando la curva della resistenza presentava forte curvatura.

È notevole, nel filo fatto per pressione a freddo e poi *temprato*, cioè raffreddato rapidamente, la rapidità con cui diminuisce la resistenza al crescere della temperatura.

Un' ultima serie di misure riporto quì, fatte con un filo simile a quelli delle ultime tabelle, cioè fabbricato per pressione a freddo; questo filo fu dapprima riscaldato nel bagno d'olio sino quasi alla temperatura di fusione, poi lasciato lentamente raffreddare; anzi le misure vennero fatte durante il raffreddamento, mantenendo con una fiamma costanti successivamente diverse temperature.

XX.

t	b	t	b
259°,5	3, 337	190°,5	3, 354
253, 5	508	166	263
246	569	134, 5	229
239, 5	570	113, 5	260
233	560	93, 1	310
222	504	20, 3	735
207, 6	424	0	923

La curva tratteggiata *m n* è ottenuta con questi numeri. Essa sta alle precedenti precisamente come la L F sta alle A F e P Q.

Salvo dunque ad un aumento permanente dovuto al modo di fabbricazione del filo, la resistenza varia colla temperatura nella stessa guisa che col bismuto fuso.

15. Infine misurai la resistenza a varie temperature, di sbarrette di bismuto tagliate da un grosso pezzo, senza fonderle. La tabella XXI dà i risultati di una serie di misure.

XXI.

t	*b*	*t*	*b*
— 12°,2	4,059	94°	4,032
+ 0,1	155	114,5	3,910
16,5	202	132,6	772
38,5	236	161,5	369
59,4	197	200	100

La curva che si costruirebbe con questi numeri sarebbe simile alla *e f*. Si avrebbe cioè un solo massimo, ed una temperatura vicina a 38°. Il bismuto tagliato da grossi pezzi si comporta dunque come quello che subì un rapido raffreddamento ed una compressione. Probabilmente nell'interno di una grossa massa di bismuto, come in una sbarra raffreddata rapidamente, la cristallizzazione sarà incompleta o di diversa specie, in causa dell'ostacolo che oppongono le parti esterne all'aumento di volume che accompagna la solidificazione del metallo.

16. La diversa inclinazione che mostrano alle temperature prossime a quella di fusione, le curve di resistenza del bismuto più o meno lentamente raffreddato, mi fecero sospettare che anche la temperatura di fusione fosse diversa nei varî casi.

Feci perciò più volte l'esperienza seguente. In un vaso di vetro pieno d'olio collocai un termometro un agitatore, ed un anello metallico orizzontale, al quale erano legati molti pezzetti di bismuto. Alcuni di questi pezzetti erano di filo compresso a freddo, altri erano sbarrettine cilindriche o prismatiche fuse, due infine erano sbarrettine prismatiche tagliate da un grosso pezzo di bismuto. Alcuni dei fili compressi erano quali risultano dall'apparecchio con cui sono fatti; ma altri furono riscaldati prima fino quasi a fusione e tosto raffreddati nell'etere. Così pure alcune delle sbarrette fuse erano state solidificate e raffreddate lentamente, altre invece rapidamente.

Riscaldando gradatamente l'olio era facile vedere a qual temperatura fondevano i diversi pezzi.

Colle sbarrettine fuse ebbi risultati non troppo sicuri, benchè sembrasse che quelle che erano state raffreddate rapidamente fossero un po' più pronte a fondersi.

Ma coi fili il risultato fu nettissimo.

Quelli che avevano subìto il raffreddamento rapido fusero a temperature variabili da 269°, 6 a 271°.

Gli altri invece fusero sempre fra 263° e 264°.

Il bismuto tagliato da un grosso pezzo fuse sempre fra 267° e 268°; le sbarrette fuse fra 265° e 268°.

Il risultato che danno i fili compressi, conferma l'ipotesi di cambiamenti nella struttura del bismuto, dipendenti dalle condizioni nelle quali si compie il raffreddamento

e la solidificazione. Generalmente i fili raffreddati rapidamente, come pure, benchè meno nettamente le sbarrette, sono molto fragili. Qualche volta osservai nei fili riscaldati quasi a fusione poi raffreddati nell'etere, una fragilità estrema.

17. Vedendo dal complesso delle molte misure fatte, che in nessun caso la resistenza del bismuto aveva i valori assegnati da Matthiessen e von Bose, cominciai a dubitare che la causa della divergenza di risultati risiedesse, non già nel modo di preparazione del pezzo, ma dalla composizione chimica del medesimo.

Feci dunque analizzare ([1]) il bismuto sedicente puro, fino allora adoperato, e si trovò che conteneva l'1,18 per cento d'arsenico e tracce di stagno, indubitate ma troppo scarse per essere dosate.

Liberato dai due corpi estranei, il busmuto puro che rimase fu da me sperimentato nella solita maniera, dopo averne fatto delle sbarrtine col metodo *b*).

Nella tabella XXII ho riprodotto i risultati avuti con una di tali sbarrettine; non avendone misurate le dimensioni, ho notato solo le resistenze misurate e non le resistenze specifiche. Nella tab. XXIII invece sono inscritti i valori della resistenza specifica alle varie temperature, d'un' altra sbarretta.

XXII.

t	*r*	*t*	*r*
18°	0, 0281	235°,5	0, 0507
32, 5	287	241	519
54, 7	303	246, 6	530
82	322	251	541
106	339	256, 5	552
128, 5	360	263, 5	558
150	381	266	558
174	413		
201	449		
213, 8	469		
222, 5	482		

XXIII.

t	*b*
0°	1, 153
17, 5	196
37, 4	277
77, 5	425
120	638
155, 6	833
197, 6	2, 151
227, 5	388
252	633
259, 5	691
263, 6	735
265, 5	679

Coi numeri della tabella XXIII si è costruita la curva A della tavola III. Sia dalla forma di questa curva, sia dal confronto dei valori di *b* con quelli avuti da Matthiessen e von Bose (art. 9), costruiti nella stessa tavola con piccole croci, si vede chiaramente come i risultati da me ottenuti col bismuto purificato, concordino con quelli dei due fisici tedeschi.

Avendo più volte tentato di temprare il bismuto puro, e cioè riscaldarlo fino a fusione o quasi, poi raffreddarlo rapidamente, non ottenni mai in modo sicuro nessun sensibile cambiamento nè nelle sue proprietà fisiche, nè nella sua resistenza.

([1]) Dal dott. G. Spica.

18. Sembrava dunque evidente che alla presenza di quell'1,18 per cento d'arsenico nel bismuto da me sempre adoperato, si dovessero i singolari fenomeni fin qui studiati.

Ma per persuadermene volli tentare di ottenere di nuovo le curve della tav. II, aggiungendo al bismuto purificato e fuso, una conveniente quantità d'arsenico.

Feci molte serie di misure, che qui non trascrivo, con bismuto al quale avevo aggiunto più o meno arsenico ([1]).

La resistenza era in generale aumentata, ma l'andamento della curva fu sempre affatto simile a quello della curva A.

Provai, a far subire rapide variazioni di temperatura alle sbarrette ottenute; ma la curva della resistenza non variò di forma.

Mi sarei dunque mal apposto attribuendo all'arsenico le singolarità prima notate.

Provai quindi ad aggiungere varie sostanze al bismuto, facendovi combinare o un po' di zolfo, o tenendolo fuso onde si ossidasse alquanto ecc.; ma non giunsi mai a riprodurre le curve della tavola II.

Infine, benchè non mi sembrasse verosimile che le piccole traccie di stagno che conteneva il bismuto adoperato dapprima potessero esercitare nessuna influenza, pure provai ad aggiungere stagno al bismuto fuso in quantità diverse, accuratamente pesate.

Riporterò qui nelle tab. XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII i risultati ottenuti in cinque serie di misure, sopra 5 sbarrette contenenti ordinatamente 0,1; 0,23; 0,556; 2; 10 per cento di stagno.

XXIV.

t	*b*
0°	2,469
17,5	423
37,4	347
59,5	320
78,6	299
103,5	304
137,5	360
185,5	530
217,6	745
241,5	931
257,8	3,007
264,7	071
267,5	047

XXV.

t	*b*	*t*	*b*
0°	3,468	256°	3,280
17,5	456	242,5	222
25	444	230,6	157
46,5	373	199,5	039
88,5	220	157,5	2,929
135,6	092	147	922
180,5	098	126,5	957
201,4	141	101,8	3,008
224,5	203	81,5	054
233,5	250	54	137
247,5	275	24,5	214
259,6	228	0	231
264,5	186		

([1]) Nell'atto in cui al bismuto fuso si aggiunge, anche in piccola quantità, l'arsenico, si nota una notevole variazione nella tensione superficiale del metallo fuso; prima restava disteso aderendo alla porcellana della capsula; dopo invece se ne ritira d'un tratto in forma di globetto schiacciato, come una goccia di mercurio purissimo.

XXVI.

t	b
0°	4,238
18	283
59	349
74,5	326
115,5	234
161,5	065
197,5	3,962
236,6	877

XXVII.

t	b
0°	3,650
16,5	750
52,5	870
101,5	895
143,6	803
160	751

XXVIII.

t	b
0°	1,837
23,5	866
40	967
54	2,065
90,5	246
130	472
163,5	605
193	393
229	1,816

Le cinque serie di misure sono state costruite nella tavola III, e per ciascuna si è tracciata una curva che passi il più prossimamente possibile in vicinanza dei punti dati dall'esperienza.

Le curve B, C, D, E, F corrispondono quindi rispettivamente a verghette di bismuto contenenti 0,1; 0,23; 0,556; 2; 10 per cento di stagno. La curva C′ è quella che rappresenta la resistenza della seconda sbarretta (tab. XXV) misurata a temperature decrescenti lentamente, e quindi meno temprata.

Dall'osservazione comparativa di queste curve e di quelle della tavola II, risùlta in modo evidentissimo che contrariamente ad ogni previsione, le traccie di stagno che conteneva il bismuto, erano la causa della diversità fra i risultati miei e quelli di Matthiessen e von Bose.

Le curve B, C, D della tav. III rassomigliano perfettamente alle L, A, R della tavola II.

Confrontando la resistenza a zero gradi delle varie leghe si ha:

Bismuto puro	. . . .				1,1534
»	con	0,1	per cento	di stagno	2,4686
»	»	0,23	»	»	3,4585
»	»	0,556	»	»	4,2379
»	»	2	»	»	3,6503
»	»	10	»	»	1,8368

E cioè, mentre una piccolissima quantità di stagno, l'uno per mille, basta a far più che duplicare la resistenza del bismuto, questa stessa resistenza cresce ancora aumentando un po' la dose dello stagno; ma poi crescendo ancora in quantità questo metallo, la resistenza della lega torna a diminuire.

La curva di resistenza del bismuto contenente traccie di stagno, si trasforma al crescere della quantità di questo, nello stesso modo in cui la curva stessa si trasforma colla tempera.

Difatti come la curva L della tav. II si cambia successivamente nelle A, P, R, T, con tempra di più in più forte, la B, tavola III, si cangia nelle C, D, E, corrispondenti a quantità di più in più grandi di stagno, e la forma delle curve nelle due serie è la stessa.

Il bismuto puro al quale avevo aggiunto 0,1 per cento di stagno raffreddato più o meno rapidamente, offrì tutti i cambiamenti di aspetto, fragilità, resistenza elettrica, e forma della curva di resistenza, che già avevo ottenuti col bismuto così detto puro, del commercio.

Dall'insieme dei fenomeni che produce l'aggiunta dello stagno al bismuto, sembrami risultare fondata una certa analogia fra il bismuto puro e quello contenente piccole quantità di stagno, da una parte, e il ferro e l'acciaio dall'altra. Il bismuto puro come il ferro puro non è suscettibile di tempra, mentre lo sono tanto l'acciaio quanto il *bismuto-acciaio,* ossia bismuto con traccie di stagno. La tempra del *bismuto-acciaio* ne aumenta la resistenza elettrica specifica. La tempra del ferro-acciaio ne aumenta di $^1/_6$ circa la resistenza, come constatò Mousson.

PARTE SECONDA

Influenza del magnetismo sulla resistenza del bismuto.

19. Ritornando al punto di partenza, esporrò le esperienze da me eseguite sulla variazione di resistenza che presenta il bismuto per azione del magnetismo.

Le sbarre, lamine o fili di bismuto, furono saldati o fissati con viti, a fili grossi di rame, come si è detto nella parte prima. I due fili di rame si immergevano nei due pozzetti di mercurio S,S′ (fig. 4 tav. I) (¹) in cui poteva collocarsi ancora l'arco di rame A destinato ad eliminare la resistenza del bismuto. Il tutto era portato da un sostegno mobile, talchè potevasi a volontà collocare il bismuto fra i poli di una forte elettro-calamita, o rimetterlo lontano da essi (²). Le comunicazioni furono poste come nella figura 5 tav. I. Per cui detta x la resistenza dei fili p e q, l_1 la lunghezza del reocordo a sinistra del corsoio C quando il galvanometro è a zero, e l'arco di rame sopprime la resistenza del bismuto, l_2 la lettura analoga dopo aver levato l'arco di rame e così introdotta la resistenza r del bismuto, l_3 l'analoga lettura dopo aver collocato il bismuto fra i poli, si ha:

$$\frac{M}{x}=\frac{l_1}{L-l_1},\quad \frac{M}{r+x}=\frac{l_2}{L-l_2},\quad \frac{M}{r_1+x}=\frac{l_3}{L-l_3},$$

ove M ed L hanno lo stesso significato che nell'articolo 8, e r_1 è la resistenza del bismuto quand'è fra i poli.

Se ne deduce:

$$\delta=\frac{r_1-r}{r}=\frac{l_1(l_2-l_3)}{l_3(l_1-l_2)}.$$

In questo caso dunque per misurare il rapporto δ fra la variazione di resistenza prodotta dal magnetismo e la resistenza primitiva, ossia la variazione di resistenza

(¹) Naturalmente il vaso V ed il termometro T erano soppressi.

(²) Se invece di togliere dalla vicinanza dei poli il bismuto, s'interrompesse solo la corrente dell'elettro-calamita, non si avrebbe la resistenza vera del metallo, giacchè il magnetismo rimanente del ferro dell'elettro-calamita basta ad alterarla.

che produce il magnetismo sopra una sbarra di resistenza uno, non solo non occorre conoscere x, ma neppure M ed L, purchè restino queste due quantità costanti durante le tre misure di l_1, l_2, l_3.

Per pezzi di bismuto assai grossi e corti e quindi pochissimo resistenti, dovei disporre le comunicazioni un po' diversamente.

Alle estremità del grosso pezzo di bismuto AB (fig. 8 tav. I) fissai per saldatura due grossi pezzi di rame AD, BE, ciascuno dei quali portava, vicinissimo alla saldatura, un piccolo foro con vite a pressione, costituendo così un serrafilo. La resistenza dei tratti di rame compresi fra i fori a, b ed il bismuto era così al certo trascurabile. Un filo di pach-fong BS, della stessa matassa di quello con cui fu fatto il reocordo, fu passato nel foro b, e posto coll'altra estremità S in comunicazione col reocordo.

Al di là del foro fu questo filo congiunto ad uno dei poli della pila P. Del pari, un filo di rame GaT introdotto nel foro a servì a far comunicare A col galvanometro G da una parte e col reocordo in T dall'altra. In T faceva capo il secondo polo della pila.

Con queste comunicazioni il bismuto AB forma uno dei lati del ponte di Wheatstone, e gli altri tre lati sono aT, TC, CSb. Il filo bS resta così aggiunto al reocordo.

Detta L la lunghezza totale di questo, cioè filo teso, rocchetti e filo bS, x la resistenza del filo aT, l_1, l_2 le letture fatte a sinistra del corsoio C (compresi sempre i rocchetti che sono dalla stessa parte) la prima quando il bismuto non è fra i poli, e la seconda quando è influenzato dalla elettro-calamita, e chiamando r ed r_1 la sua resistenza nei due casi, si ha:

$$\frac{x}{l_1} = \frac{r}{L - l_1}, \quad \frac{x}{l_2} = \frac{r_1}{L - l_2},$$

da cui:

$$\delta = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{L(l_1 - l_2)}{l_2 (L - l_1)}.$$

Non è dunque necessario conoscere x per calcolare δ e bastano le due misure l_1, l_2. Il metodo è buono anche per pezzi di resistenza assai piccola.

Le precauzioni per collocare a posto il corsoio ad ogni misura, furono già precedentemente spiegate (art. 8).

20. Il campo magnetico era ottenuto con una forte elettro-calamita, quella che serve d'ordinario per le esperienze sulla rotazione del piano di polarizzazione della luce.

Vi si applicarono i poli piani di ferro dolce, e si attivò con un numero di coppie Bunsen variabile da 2 a 20.

Per misurare la forza magnetica alla quale veniva esposto il bismuto, mi attenni al solito metodo dell'induzione.

Perciò feci due rocchetti l'uno di 6 giri di filo di rame, l'altro di 35 giri.

Nel primo i giri avevano $12^{mm},3$ di diametro, nel secondo 522^{mm}. Il piccolo rocchetto fissato all'estremo di una riga di legno mobile intorno ad un asse orizzontale, perpendicolare alla sua lunghezza, veniva collocato fra i poli, e poi rapidamente allontanato parallelamente a se stesso, girando a tal fine la riga che lo portava. Il grande rocchetto invece fu collocato verticalmente sopra un asse verticale, al quale si poteva far compiere rapidamente un quarto di giro, in virtù del quale il piano di ciascuna

delle spire del filo, da perpendicolare che era al meridiano magnetico diventava parallelo. O meglio ancora gli si faceva fare un mezzo giro in modo da ritornare perpendicolare al meridiano.

I due rocchetti furono posti nello stesso circuito insieme ad un galvanometro a specchio, reso sensibile e lento a deviare da una calamita, e le deviazioni del quale erano lette con cannocchiale e scala.

Dette a, A le aree complessive dei giri di ciascuno dei due rocchetti, d la deviazione impulsiva ottenuta col piccolo rocchetto, in causa dell'induzione dell'elettrocalamita, D la deviazione ottenuta col rocchetto grande in causa dell'induzione terrestre, F la forza magnetica del campo della calamita, M la componente orizzontale del magnetismo terrestre nel luogo ove mi trovavo, si ha per determinare F la formola:

$$F = \frac{2Ad}{aD} M.$$

Il coefficiente 2 dovrebbe sopprimersi se al grande rocchetto si facesse fare solo un quarto di giro.

Nel caso mio era $\frac{2A}{a} = 21012,5$.

Mancando al momento dei mezzi di misurare M, ho notato nelle mie misure il valore di $\frac{F}{M}$, ciò che è sufficiente nel caso attuale, interessando solo di avere i valori relativi dell'intensità del campo magnetico, ed un valore assoluto approssimato onde aver idea della entità degli effetti prodotti.

21. Verificata la buona disposizione degli strumenti ecco come ogni giorno eseguiva le misure.

Dopo che la corrente magnetizzante era stata chiusa un certo tempo, e che perciò le variazioni della sua intensità erano assai lente, si faceva la lettura di D, girando il rocchetto grande, poi quella di d allontanando rapidamente il piccolo rocchetto dai poli. Poi si faceva la lettura l_3 al ponte relativa alla resistenza del bismuto fra i poli, poi le letture l_2, l_1 la prima col bismuto levato dallo spazio interposto fra i poli, e la seconda coll'arco che sopprime virtualmente dal circuito la resistenza del bismuto. Col bismuto poco resistente, si adottava la disposizione della fig. 8 tav. I, e si avevano a fare solo due letture l_2, l_1.

Dopo, cambiato il bismuto, o variatane la temperatura, o variata la intensità della corrente magnetizzante si procedeva ad una nuova serie di letture.

Trovai conveniente di tener chiusa la corrente magnetizzante anche mentre si faceva fare il mezzo giro al grande rocchetto per avere la deviazione prodotta dal magnetismo terrestre, acciocchè la piccola influenza che poteva avere da lontano l'elettro-calamita sul galvanometro adoperato a questo scopo, restasse la stessa, come quando si faceva la osservazione collo spostamento del piccolo rocchetto.

22. Come ho avvertito altrove, le variazioni di resistenza che produce il magnetismo nel bismuto, sono incomparabilmente più grandi che nel ferro o in altri metalli, e sempre è un aumento di resistenza che si produce.

A parità di forza magnetica il valore di δ che si ottiene, e cioè la variazione unitaria di resistenza, è diversa in varî pezzi di bismuto. Essa dipende dalla temperatura, e sopra tutto dalla struttura del metallo. Una stessa lastrina di bismuto

messa fra i poli in direzione equatoriale, e percorsa dalla corrente in questa stessa direzione, dà in generale effetti un po' diversi, secondo che il suo piano è perpendicolare all'asse dei poli o passa per quest'asse. Colle lastrine sottili aderenti al vetro è in generale maggiore l'effetto in quest'ultima posizione. È verosimile che queste variazioni di risultati che si ottengono con un pezzo di bismuto disposto trasversalmente, dipendono dall'orientazione diversa dei suoi cristalli.

Disponendo un pezzo di bismuto fra i poli in modo che la corrente lo percorra in direzione parallela alle linee di forza, si ha pure aumento di resistenza, ma minore di quando lo stesso pezzo viene girato in modo che la corrente che lo percorre divenga perpendicolare alla forza magnetica.

Anche questa circostanza differenzia il bismuto dal ferro.

Difatti è noto che con questo metallo mentre aumenta la resistenza nella direzione equatoriale, diminuisce invece nella direzione delle linee di forza.

Ecco, come esempio due misure comparative fatte con una lastrina di bismuto lunga 46^{mm}, larga 10^{mm} e grossa $0^{mm},175$.

Col piano passante per l'asse dei poli, e la corrente diretta parallelamente alle linee di forza magnetica $\delta = 0,009498$.

Col piano perpendicolare alle linee di forza, e la corrente pure perpendicolare a queste linee $\delta = 0,016429$.

L'intensità magnetica era la stessa nei due casi.

Una sbarretta di bismuto diede nei due casi rispettivamente: $\delta = 0,011072$ e $\delta = 0,015650$.

La rapidità diversa con cui avviene la solidificazione del bismuto, e che tanto influisce sulle variazioni di resistenza prodotte dal calore, ha pure influenza grande sulle variazioni di resistenza che determina la calamita.

Prendendo diverse sbarrette di bismuto, e fondendole nella lastra della fig. 7, poi raffreddandone alcune rapidamente nell'acqua fredda, ed altre lasciandole solidificare nel modo più lento possibile, si riconosce che nelle prime il magnetismo produce più piccole variazioni che nelle ultime.

Nella tabella seguente δ' sono le variazioni unitarie di resistenza delle sbarrette A, B, C che furono fuse e lentamente solidificate, δ'' sono le variazioni analoghe ottenute dopo che le sbarrette vennero temprate e cioè nuovamente fuse e poi rapidamente solidificate.

XXIX.

Sbarre	δ'	δ''
A	0,043603	0,035362
B	79822	46351
C	93039	45889

Naturalmente l'intensità magnetica fu mantenuta costante.

Il bismuto in fili, ottenuti colla compressione, si mostra meno sensibile al magnetismo; esso dà infatti a parità di condizioni, valori per δ più piccoli di quelli forniti da sbarrette fuse.

Riscaldando uno di tali fili fino a rammollirlo, si ha un aumento di δ; dopo di che si comporta come le sbarre fuse.

Per uno di tali fili infatti si ebbe $\delta = 0{,}037517$.

Riscaldato fino a rammollirsi e poi raffreddato naturalmente $\delta = 0{,}085703$.

Riscaldato a fusione e raffreddato rapidamente $\delta = 0{,}053813$.

Riscaldato di nuovo a fusione e lentamente raffreddato $\delta = 0{,}089674$.

Se non si fosse fatta la seconda misura, si avrebbe potuto credere che col bismuto in fili il rapido raffreddamento faccia aumentare δ anzichè diminuire.

D'ordinario feci uso del bismuto puro del commercio, cioè non chimicamente puro, sia perchè ne avevo maggior quantità, sia perchè sembravami utile adoperare un corpo più facilmente alla portata degli sperimentatori. Feci però alcune prove anche con sbarrette di bismuto puro chimicamente.

Il valore di δ relativo a queste sbarrette fu sempre un po' maggiore, a parità di condizioni, che quello relativo al bismuto non puro.

Le grandi variazioni di resistenza che produce il magnetismo nel bismuto, costituiscono dunque una proprietà caratteristica di questo metallo, che si conserva quasi inalterata anche quando è mescolato a piccole quantità di corpi estranei.

23. Ho eseguite varie serie di misure mantenendo tutto costante all'infuori della forza magnetica sviluppata dalla elettro-calamita.

Le tabelle seguenti danno i risultati ottenuti in due serie di misure.

XXX.

F : M	δ
3492, 6	0, 002557
7808, 7	15549
10506, 2	26842
11104, 2	30238
11926, 0	35846

XXXI.

F : M	δ
3673, 5	0, 004382
6200, 9	09590
7857, 7	15079
9824, 0	21493
12074, 8	32053
13871, 8	41621
17013, 1	56949
—	0, 119852

I due ultimi valori di δ nella tabella XXXI, furono ottenuti con una corrente magnetizzante data da 20 coppie Bunsen in due serie.

L'ultimo valore di δ fu ottenuto accostando i poli in modo che appena potevasi introdurvi la lastrina di bismuto, ma non il rocchettino per la misura della forza magnetica.

Questo valore, che è poco meno di $\frac{1}{8}$, mostra quanto grande può divenire la variazione di resistenza prodotta dal magnetismo sul bismuto.

I risultati della tabella XXXI sono costruiti graficamente nella parte superiore della tavola III. Sulla linea ZZ si sono portati i valori di $\frac{F}{M}$, prendendo ogni millimetro come 100 unità. Le ordinate che rappresentano i valori di δ, sono state costruite prendendo ogni millimetro come 0,001 di δ.

I piccoli cerchi indicano i punti che si ottengono coi numeri della suddetta tabella. Tracciando una linea ZM che passi in vicinanza dei punti determinati dalle misure, si riconosce che questa curva è convessa in basso dapprima, poi diviene sensibilmente retta. Dunque per piccoli valori della forza magnetica, la variazione di resistenza cresce più rapidamente che non la forza stessa; ma a partire da circa $F = 10000\,M$, δ cresce sensibilmente in proporzione di F.

24. Feci alcune esperienze a temperature superiori all'ordinaria, onde vedere se la variazione di resistenza prodotta dal magnetismo nel bismuto, cangiava valore col riscaldamento.

A questo scopo la lastrina in esame era circondata da una cassettina di rame piena d'olio, contenente inoltre un termometro ed un filo ripiegato che serviva da agitatore.

Riscaldavo grado a grado l'olio, e a temperature successivamente elevate facevo le misure. Dapprima facevo la lettura l_1 sul reocordo, coll'arco di rame che escludeva la resistenza del bismuto, poi la l_2 senza l'arco, e tenendo sempre la cassettina entro cui stava il bismuto, lontana dai poli dell'elettro-calamita, quindi la l_3 colla cassettina fra i poli. Osservavo poi in pari tempo le temperature t, t' al momento in cui facevo le due misure l_2 ed l_3. Colla formola dell'articolo 8 potevo quindi calcolare la resistenza del bismuto alla temperatura t fuori del campo magnetico, ed alla temperatura t' esposto al magnetismo. La temperatura t' era in generale qualche poco inferiore a t, per il raffreddamento che subiva l'olio fra l'una e l'altra misura.

Coi valori ottenuti, potevo allora costruire due curve, la prima prendendo per ascisse le temperature t e per ordinate le corrispondenti resistenze del bismuto lontano dai poli, l'altra prendendo come ascisse le temperature t' e per ordinate le resistenze offerte dal bismuto collocato nel campo magnetico. In tutti i casi trovai sempre che le due curve non hanno un andamento parallelo; ma che invece al crescere della temperatura la curva superiore, che è quella delle resistenze misurate sotto l'azione del magnetismo, si accosta di più in più alla curva inferiore. Dunque δ diminuisce sempre al crescere della temperatura; anzi diviene in generale piccolissimo verso 110°.

La diminuzione del valore di δ è assai più rapida colle sbarrette temprate che colle altre. Le seguenti tabelle XXXII, XXXIII, XXXIV offrono i risultati ottenuti con tre diverse sbarrette di bismuto; r ed r' indicano le resistenze del bismuto senza o con azione del magnetismo.

XXXII.

t	r	t'	r'
19°,3	0,03564	19°,3	0,03659
39,2	3499	37,1	3589
45,9	3479	44,5	3554
58,3	3425	56,5	3490
74,9	3361	71,3	3411
90,5	3316	85,9	3359
110,5	3271	108,5	3299

XXXIII.

t	r	t'	r'
20°,5	0,07119	20°,5	0,07238
32,3	7060	31,1	7176
40,5	6996	39,3	7111
56,3	6883	51,5	6981
73,1	6710	69,5	6790
93,5	6552	87	6611
103,5	6459	100,5	6500

XXXIV.

t	r	t'	r'
18°	0,1422	18°	0,1431
28,6	1413	27,4	1422
54,3	1384	52	1388
74,5	1351	65,3	1358
92,7	1311	87	1311
106,5	1282	105,5	1279

XXXV.

t	δ
19°,3	0,026657
37,1	23674
44,5	20152
56,5	16486
71,3	10608
85,9	08921
108,5	07266

La tabella XXXV mostra il decrescere di δ all'aumentare della temperatura, calcolato coi dati della tabella XXXII. Coi valori delle colonne t ed r, si sono calcolati per interpolazione le resistenze r corrispondenti alle temperature t' poi si è calcolato $\delta = \frac{r' - r}{r}$.

Come si vede, in queste misure non ho oltrepassato la temperatura di fusione della lega colla quale le sbarrette di bismuto erano saldate pei loro estremi ai conduttori di rame.

CONCLUSIONI

25. I risultati ai quali sono giunto, si possono riassumere nelle proposizioni seguenti.

1° La resistenza elettrica del bismuto del commercio (contenente traccie di stagno) cresce col riscaldamento fra certi limiti di temperatura e diminuisce fra altri, presentando generalmente due massimi e due minimi. Cosicchè, costruendo una curva che abbia per ascisse le temperature e per ordinate le resistenze, questa curva presenta in generale la forma della lettera M (fig. 6 tav. I).

Il secondo massimo precede di poco la fusione, il secondo minimo la segue dopo poco.

2° Per pochi gradi di riscaldamento a temperature che comprendano quella della fusione, la resistenza del bismuto diminuisce moltissimo, riducendosi almeno alla metà circa.

3° Le temperature a cui corrispondono i due massimi ed il minimo intermedio di resistenza, variano colle condizioni della solidificazione e del raffreddamento del bismuto.

4° Considerando successivamente delle sbarre di bismuto raffreddate dopo la fusione di più in rapidamente, si riconosce che le temperature corrispondenti ai due massimi si accostano, crescendo quella del primo massimo, diminuendo quella del secondo. In pari tempo il valore della resistenza al primo massimo diviene sempre maggiore. Poi sparisce il minimo che si trova fra i due massimi, rimanendo la curva rappresentativa della resistenza con due flessi. Infine anche le inflessioni spariscono,

e si ha una curva che all'aspetto rassomiglia ad una parabola, dotata quindi d'un solo massimo. Allora non restano che due fasi nelle variazioni della resistenza; al disotto del massimo la resistenza cresce colla temperatura, ed al disopra invece diminuisce, protraendosi la diminuzione fino alla completa fusione del metallo.

A questi cambiamenti corrispondono variazioni nei caratteri fisici del metallo; raffreddato rapidamente acquista una specie di tempra, e si eleva la sua temperatura di fusione, almeno quando è in forma di fili compressi.

5° Con fili ottenuti facendo effluire il metallo allo stato solido da un piccolo foro, a temperatura un po' inferiore a quella di fusione, si hanno analoghi risultati, se non che la resistenza specifica a parità di condizioni si mostra un po' maggiore.

6° Con fili fatti per compressione alla temperatura ordinaria si hanno ancora gli stessi risultati; ma a parità di condizioni la resistenza specifica è ancora notevolmente maggiore.

7° La resistenza a 0° del bismuto del commercio è variabile quindi, colle condizioni del raffreddamento, e diversa secondo che fu fuso o compresso, come apparisce dalla tabella seguente:

Bismuto fuso e lentamente raffreddato	2,4122
» » e meno lentamente »	2,9341
» » ancor meno »	3,2977
» » rapidamente »	3,4711
» » anche più »	3,5095
Fili fatti a caldo per pressione da	3,3061
» » » » a	4,1537
Filo fatto a freddo	4,9030
» » poi riscaldato quasi a fusione e raffreddato rapidamente	6,3089
» » poi riscaldato e lentamente raffreddato	3,9228
Minima resistenza in fusione	1,3134

8° Il bismuto chimicamente puro si comporta come gli altri metalli puri.
Nel momento della fusione ha luógo una rapidissima diminuzione di resistenza.
Esso non è suscettibile di tempra.
La sua resistenza specifica a 0° è in media 1,15.

9° La differenza fra il bismuto puro e quello che col nome di puro trovasi in commercio non dipende dall' arsenico che può contenere anche in quantità non piccole, ma da stagno anche in minime proporzioni, che gli conferisce proprietà simili a quelle per le quali l'acciaio diversifica dal ferro.

10° Aggiungendo al bismuto puro una quantità di più in più grande di stagno, la resistenza specifica a 0° dapprima cresce notevolmente ma poi, raggiunto un massimo decresce di nuovo. Così la resistenza specifica a 0° fu rispettivamente 2,47, 3,47, 4,24, 3,65, 1,84 pel bismuto che conteneva o l'uno per mille o il 0,23, il 0,556, il 2, il 10 per cento di stagno. Naturalmente questi valori della resistenza specifica non hanno niente di assoluto, essendo suscettibili di variare colla diversa tempra che può conferirsi al bismuto.

11° L' aggiunta dello stagno in quantità di più in più grande al bismuto puro, modifica la curva della resistenza, nello stesso modo che è modificata nel bismuto contenente stagno in piccola quantità, col temperarlo di più in più.

12° Il magnetismo influisce grandemente sulla resistenza del bismuto sia esso puro o no, aumentandola.

Questo aumento di resistenza giunse fino ad $\frac{1}{8}$ della resistenza primitiva, e può certamente crescere ancora impiegando forze magnetiche assai intense.

13° Questo aumento di resistenza ha luogo tanto quando la sbarretta percorsa dalla corrente nel senso della sua lunghezza, è collocata fra i poli nella direzione delle linee di forza, come quando è posta trasversalmente, ma in quest' ultimo caso è notevolmente maggiore.

14° Il bismuto del commercio è tanto più sensibile al magnetismo quanto meno è temprato, in questo senso, che il valore del rapporto fra la variazione di resistenza dovuta all' azione magnetica e la resistenza primitiva, diminuisce colla tempra.

Così pure il bismuto compresso è meno sensibile del fuso, ed il bismuto del commercio lo è un po' meno del puro.

Se si considerassero le variazioni di resistenza a parità di dimensioni, i risultati sarebbero un po' diversi, e forse diminuirebbero le differenze prodotte dalla compressione e dalla tempra.

15° Per forze magnetiche non troppo piccole, la variazione di resistenza è proporzionale sensibilmente alla forza magnetica; ma per piccoli valori di questa, la variazione di resistenza cresce più rapidamente della semplice proporzionalità.

16° Aumentando la temperatura del bismuto l' azione del magnetismo in quanto a variarne la resistenza, si fa di più in più piccola, almeno sino a circa 100°.

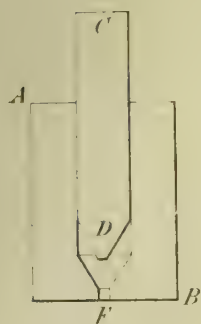
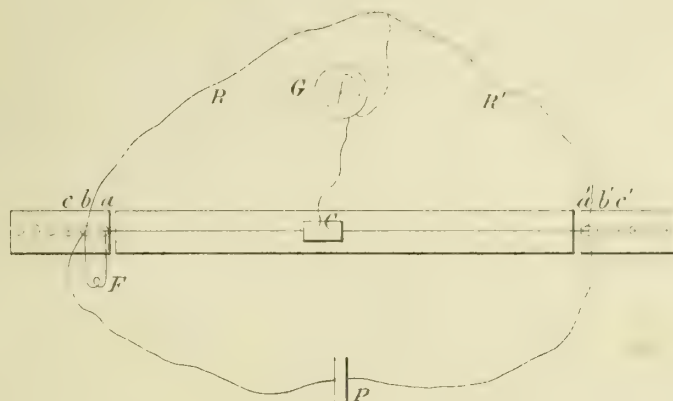
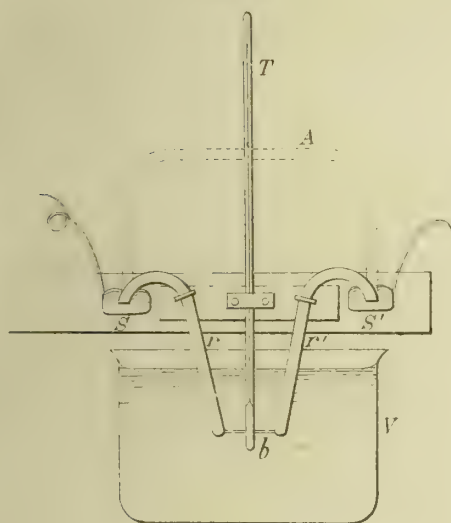
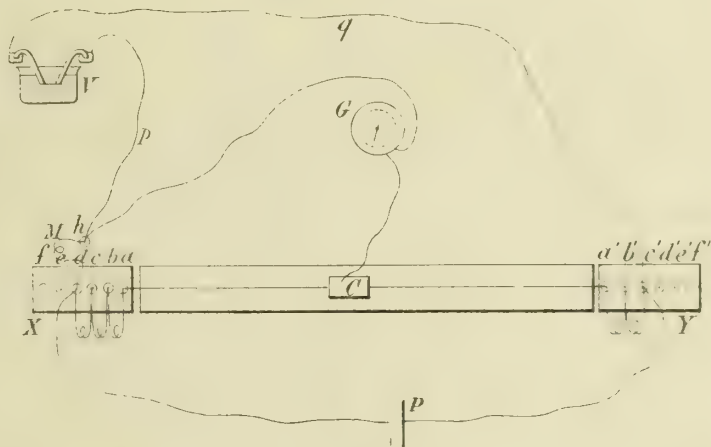
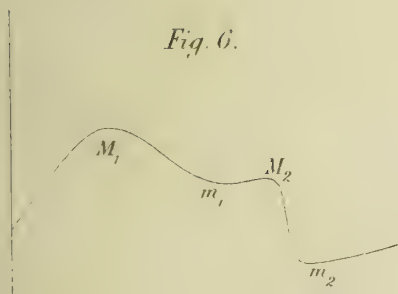
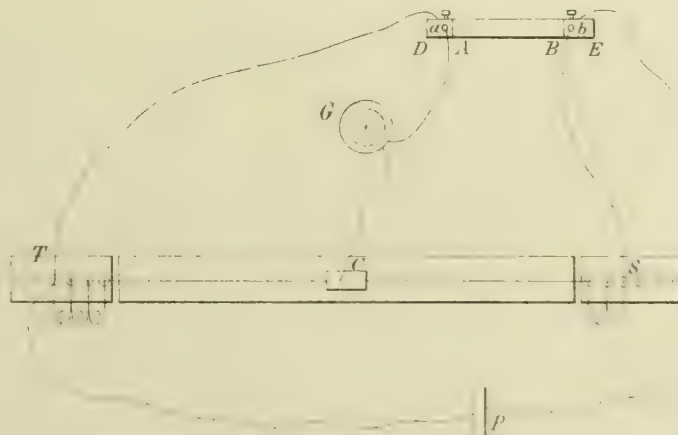
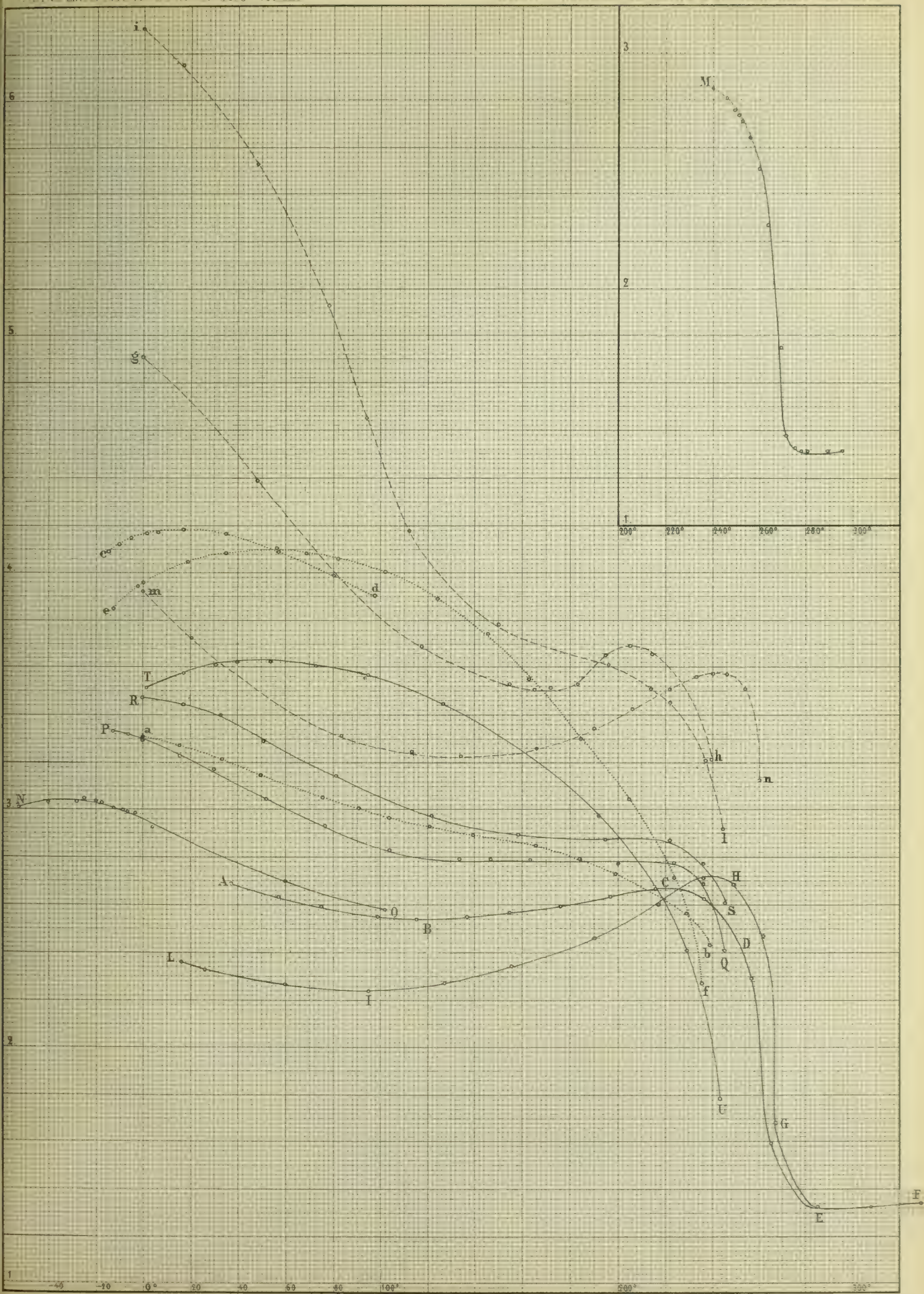



Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.

6
5
4
3
2
1
-40
-20
0°
20
40
60
80
100°
200°
300°
200°
220°
240°
260°
280°
300°
i
g
c
e
d
m
T
R
P
a
N
A
O
B
L
I
C
H
S
D
Q
b
f
U
G
E
F
h
n
M

I volumi molecolari e le dilatazioni dei liquidi alle temperature corrispondenti [1].

Memoria I^a del prof. ADOLFO BARTOLI

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

Il peso molecolare di una sostanza diviso pel suo peso specifico, è stato chiamato successivamente, volume atomico, volume specifico, e volume molecolare.

La prima denominazione fu abbandonata perchè impropria, la seconda non dovrebbe esser conservata oggi che nella fisica matematica è impiegata a designare il volume dell'unità di massa o dell'unità di peso: è rimasta generalmente accettata la terza [2].

Furono soggetto di molti lavori i volumi molecolari dei solidi cristallizzati, e così pure dei liquidi: in questa Memoria mi occuperò solamente dei liquidi.

Il Kopp paragonando i volumi molecolari dei varî liquidi alle rispettive temperature di ebullizione normale (cioè sotto la pressione di 76 centimetri di mercurio) osservò certe relazioni fra la composizione del liquido ed il suo volume molecolare mentre *nessuna regolarità* potè constatare se i volumi molecolari erano paragonati ad una temperatura uguale per tutti.

Queste regolarità osservate dal Kopp, possono essere enunciate nei termini seguenti:

1° « Il volume molecolare di un liquido composto è uguale alla somma dei « volumi atomici che ne occupano gli elementi ».

2° « Nei composti che posseggono una costituzione chimica simile, lo stesso « elemento possiede sempre lo stesso volume atomico ».

Il volume atomico degli elementi carbonio, idrogeno, ossigeno vien determinato dal Kopp con le considerazioni seguenti che risultano dall'esame dei dati dell'esperienza.

a) Nei composti omologhi per ciascun accrescimento di CH_2 il volume molecolare cresce di circa 22.

b) Due composti, nei quali l'uno possiede nC in più ed nH_2 in meno, hanno lo stesso volume molecolare.

(1) Chiamo col Clausius temperature corrispondenti di due liquidi quelle alle quali i loro vapori saturi hanno la stessa tensione. Qualche volta chiamerò temperatura corrispondente barometrica quella in cui la tensione del vapore saturo è di 760 millimetri. — Clausius, *Sopra due leggi* ecc. *relative alla tensione ed al calor latente di diversi vapori.* Pogg. Ann. Bd. LXXXII, pag. 274 (anno 1854).

(2) Gl'Inglesi adoperano ancora oggi la parola *Specific volume*, per indicare il volume molecolare.

Da queste due proposizioni segue subito che il volume atomico di C deve essere 11 e quello di H la metà di 11.

Se i volumi atomici di C e di H sono prontamente determinati con le considerazioni precedenti, il Kopp trova maggiore imbarazzo a fare la stessa determinazione per l'ossigeno: infatti questo elemento ha nell'acqua il volume atomico 7,8: nello acetone da 11,3-11,6 (secondo i diversi sperimentatori): nell'aldeide ordinaria un volume atomico 12,0-12,9.

Il Kopp viene così costretto ad ammettere un volume atomico diverso per l'ossigeno, secondochè esso è contenuto allo stato d'ossigeno tipico, o secondochè fa parte di un radicale: nel primo caso egli prende per volume atomico 7,8 dedotto dal volume molecolare dell'acqua; nel secondo caso egli fra i valori variabili fra 11 e 13 circa che gli fornisce l'osservazione, sceglie un po' arbitrariamente il numero intermedio 12,2.

Stabiliti i volumi atomici A, B, C, D del carbonio, idrogeno ecc. il volume molecolare di un composto che contiene a atomi di carbonio, b di idrogeno, c di ossigeno, contenuto nel radicale, d di ossigeno tipico, vien calcolato da Kopp con la formula seguente:

$$V = aA + bB + cC + dD \tag{1}$$

la quale, sostituendovi i valori delle costanti A, B, C, D sopra trovati, diventa:

$$V = 11a + 5,5b + 12,2c + 7,8d. \tag{2}$$

Il Kopp calcola pure i volumi atomici del cloro, del bromo e dell'iodio, sottraendo dal volume molecolare dei cloruri, bromuri, ioduri, quello dei corrispondenti gruppi idrocarburati.

Trova i numeri 22,8; 27,8; 37,5 pel cloro, bromo, iodio rispettivamente: ma questi valori si allontanano da quelli che l'osservazione diretta assegna al cloro ed al bromo.

Per lo *solfo* il Kopp è costretto ad ammettere due volumi atomici diversi; l'uno 22,6 quando come nel mercaptano sostituisce l'ossigeno tipico: mentre ha un valore più grande 28,6 nel solfuro di carbonio.

Il volume atomico dello azoto, nelle basi volatili è 2,3; nel cianogeno è 17; e quando è combinato coll'ossigeno come nel gruppo nitrossilo NO_2 è 17,4.

Ho voluto riassumere le regole del Kopp, servendomi quasi delle stesse parole che adopera il Wurtz nel più diffuso fra i dizionarî di chimica [1].

Queste regole di Kopp fanno parte dell'insegnamento della chimica e si trovano esposte in quasi tutti i trattati più recenti adoperati per le scuole, dove in unione a quelle relative ai punti di ebullizione dei composti omologhi (le quali portano pure il nome dello stesso scienziato) ed a quelle relative al potere refrangente molecolare, formano direi quasi l'introduzione di obbligo alla chimica delle combinazioni del carbonio [2].

[1] A. Wurtz, *Dictionnaire de Chimie*, Paris 1844, t. I, pag. 475-480. L'articolo è del Wurtz. Compara anche Watt's, *Dictionary of Chemistry*, Third supplement, part II, vol. VIII, pag. 2117 a 2129; alla parola *Volume specific*, e vol. I, pag. 440 (articolo *Atomic Volume*).

[2] Compara per. es. Kekulé, *Lehrbuch der organischen Chemie*, I Bd. s. 253-270, Erlangen 1861. Cahours, vol. III. — Schorlemmer, *Trattato delle combinazioni del carbonio*, pag. 48 dell'ediz. italiana. — Richter, *Chimica organica*, pag. 30 dell'ediz. italiana (Torino 1881).

Anzi recentemente si è cercato, appoggiandosi sopra le leggi di Kopp, di trovare nuove prove in favore di alcune ipotesi relative ai cosidetti legami dei varî gruppi di atomi che costituiscono le molecole di certi composti, all' imitazione di chi per appoggiare le stesse teorie ha ricorso al calore di formazione dei varî idrocarburi ecc.

Ma quale idea dobbiamo formarci sul grado di esattezza delle regole precedenti? Per certo esse costituiscono una prima approssimazione più o meno grossolana.

Ma l'incertezza dello stesso illustre scopritore di queste regolarità (così il Kopp le chiama), il metodo poco rigoroso, quantunque semplicissimo, tenuto per stabilire i valori delle costanti A, B, C, D ecc., le differenze fra i volumi molecolari degli isomeri [1], infine anche il fatto stesso che il Kopp fu costretto ad ammettere per alcuni elementi diversi volumi molecolari, mentre per certi altri *elesse un valore unico*, bastano a far nascere qualche incertezza nell'animo di chi spregiudicatamente si accinga ad esaminare la questione.

Ma al tempo in cui il Kopp scoprì quelle regolarità, poterono essere considerate di sufficiente approssimazione, atteso anche il disaccordo che vi era fra il volume molecolare calcolato con le esperienze dei diversi sperimentatori: disaccordo che in molti casi superava la differenza fra il volume calcolato e quello medio osservato. Ma oggi che si sono assai perfezionati i mezzi di ottener pure certe sostanze, se ne sono anche meglio studiate le proprietà: il peso specifico e la dilatabilità sono state determinate con somma cura per un numero ben considerevole di liquidi.

Rese più esatte le osservazioni, la formula (2) di Kopp si è trovata insufficiente a rappresentarle rigorosamente: è bisognato ammettere che il volume atomico di certi elementi variasse a seconda della loro concatenazione con gli altri della molecola ed anche a seconda della complessità della molecola ecc.

A questo punto, noi ci spingeremo ancora un passo innanzi, e per volere essere esatti diremo: « che per ciascheduna sostanza sono sensibilmente diversi i valori delle « costanti A, B, C, D che esprimono il volume atomico degli elementi dai quali è « composta » e di questa verità sarà persuaso chiunque avvezzo al rigore dei calcoli, voglia rideterminare le costanti A, B, C, D ecc. servendosi dei valori più certi che si conoscono ora per i volumi molecolari delle sostanze.

Chi dunque volesse, quando sarà preparato più numeroso materiale di osservazioni sicure, portare efficace contribuzione alle questioni che collegano la struttura molecolare dei composti col loro volume molecolare determinati a temperature corrispondenti oppure a temperature scelte con qualche miglior criterio, per esempio a temperature che corrispondano ad uno stesso *grado critico;* potrebbe procedere in questa guisa.

Ordinati i varî composti in classi, secondo la qualità ed il numero dei loro elementi, e le loro relazioni di costituzione, cioè nelle classi seguenti: paraffine, olefine ecc.; alcoli monoacidi; acidi monobasici; anidridi; aldeidi; eteri semplici; eteri

[1] Vero è che il Kopp credeva che le sostanze isomere appartenenti ad una stessa famiglia avessero lo stesso volume molecolare: sono le ricerche posteriori, quelle del Thorpe e quelle dello Staedel specialmente che infirmano l'asserzione del Kopp. — Thorpe, Journal of the chemical Society March 1880. — Staedel, Chem. Ber. 15, pag. 2559 (1882).

composti, ecc. e i composti di ciascheduna serie scritti secondo il loro peso molecolare crescente, si determinino fra i primi n composti di una stessa serie le n costanti A, B, C, ecc. per mezzo delle n equazioni:

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D + \text{ecc.} = V_1 \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + d_2 D + \text{ecc.} = V_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n A + b_n B + c_n C + d_n D + \text{ecc.} = V_n \end{cases}$$

nelle quali A, B, C, D, ecc. rappresentano i volumi atomici degli elementi carbonio, idrogeno, ossigeno, ecc., bene inteso che a ciascheduno di questi elementi si dia, per tentativi giudiziosi, quel numero di valori differenti che la costituzione delle sostanze studiate può far supporre; tanti valori per esempio quante sono le funzioni diverse e i legami diversi che ha l'atomo di quell'elemento nella formula.

Determinati questi valori di A, B, C, D, E ecc., si rideterminino col sistema di equazioni:

$$(4)\quad \begin{cases} a_2\, A + b_2\, B + c_2\, C + d_2\, D + \text{ecc.} \dots = V_2 \\ a_3\, A + b_3\, B + c_3\, C + d_3\, D + \text{ecc.} \dots = V_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n\, A + b_n\, B + c_n\, C + d_n\, D + \text{ecc.} \dots = V_n \\ a_{n+1} A + b_{n+1} B + c_{n+1} C + d_{n+1} D + \text{ecc.} \dots = V_{n+1} \end{cases}$$

e così di seguito.

Se i componenti della serie sono $n+m$, avremo così m sistemi di *valori perequati* (¹) i quali dovrebbero essere uguali se le regole di Kopp fossero rigorosamente applicabili: nel caso opposto si potrà riconoscere se quei valori vanno o no con qualche legge, dipendendo per es. dalla complessità della formula.

Gli stessi calcoli eseguiti sulle altre classi di composti permetteranno di riconoscere se sul valore delle costanti abbia influenza la qualità della funzione organica del composto ecc. e ciò con tanta maggior probabilità di non ingannarsi, per quanto più grande sarà il numero dei componenti di ciascheduna classe di composti.

Ma è tempo di rientrare nel campo delle ricerche che costituiscono lo scopo della presente Memoria.

Una osservazione di gran peso può farsi alla teoria dei volumi molecolari, osservazione che non sfuggì allo stesso Kopp.

« *Infatti, se le regolarità osservate dal Kopp, e le loro stesse eccezioni, le* « *quali secondo alcuni spiegano la diversa concatenazione degli atomi del carbo-* « *nio ecc., costituissero una* legge fisica, *esse dovrebbero valere a punti di ebul-* « *lizione sotto qualunque pressione diversa da* 760 *ma uguale per tutti i liquidi:* « *altrimenti sopra una alta montagna o sopra un altro pianeta le stesse leggi non* « *varrebbero* ».

Cerchiamo ora la condizione più semplice, perchè le leggi di Kopp supposte esatte per un certo numero di liquidi alla temperatura corrispondente normale, siano vere per gli stessi liquidi, a tutte le altre temperature corrispondenti. Siano A, B, C, D, E ecc.

(¹) Schiaparelli, Nuovo Cimento, t. XXV, pag. 238 (1ª serie).

le n costanti di Kopp; sia $n+m$ il numero del liquidi, per i quali i volumi molecolari:

$$V_1 \; V_2 \; V_3 \; \dots \; V_{n+m-1} \; V_{n+m}$$

soddisfano esattamente alla temperatura normale di ebullizione, alle $n+m$ equazioni:

$$\left\{\begin{array}{llllll} V_1 & = a_1 & A + b_1 & B + c_1 & C + d_1 & D + \text{ecc.} \\ V_2 & = a_2 & A + b_2 & B + c_2 & C + d_2 & D + \text{ecc.} \\ V_3 & = a_3 & A + b_3 & B + c_3 & C + d_3 & D + \text{ecc.} \\ \dots & & & & & \\ V_{n+m} & = a_{n+m} & A + b_{n+m} & B + c_{n+m} & C + d_{n+m} & D + \text{ecc.} \end{array}\right.$$

Dovranno perciò essere soddisfatte le relazioni:

$$(5) \quad \left|\begin{array}{lllll} V_1 & a_1 & b_1 & \dots & p_1 \\ V_2 & a_2 & b_2 & \dots & p_2 \\ V_3 & a_3 & b_3 & \dots & p_3 \\ \dots & & & & \\ V_{n+1} & a_{n+1} & b_{n=1} & \dots & p_{n+1} \end{array}\right| = 0 \quad \left|\begin{array}{lllll} V_2 & a_2 & b_2 & \dots & p_2 \\ V_3 & a_3 & b_3 & \dots & p_3 \\ V_4 & a_4 & b_4 & \dots & p_4 \\ \dots & & & & \\ V_{n+2} & a_{n+2} & b_{n+2} & \dots & p_{n+2} \end{array}\right| = 0$$

le quali saranno:

$$\frac{(m+n+1)\,(m+n)\,(m+n-1)\,(m+n-2)\,\dots\,(m+2)\,(m+1)\,m}{1.2.3\,\dots\,n(n+1)}\,.$$

Ad un'altra temperatura corrispondente le costanti A, B, C, D ecc. potranno essere diverse, e diverranno A', B', C' ecc. ed i volumi molecolari V_1 V_2 V_3 ecc. diverranno V'_1 V'_2 V'_3 ecc.

Poniamo:

$$\begin{array}{l} V'_1 = V_1\,(1+v_1) \\ V'_2 = V_2\,(1+v_2) \\ V'_3 = V_3\,(1+v_3) \\ \dots \end{array}$$

dove v_1 v_2 v_3 . . . . sono costanti aventi tutte lo stesso segno.

Dovranno anche questa volta coesistere le $n+m$ equazioni:

$$\begin{array}{llllll} V_1\,(1+v_1) & = a_1 & A' + b_1 & B' + c_1 & C' + d_1 & D' + \text{ecc.} \\ V_2\,(1+v_2) & = a_2 & A' + b_2 & B' + c_2 & C' + d_2 & D' + \text{ecc.} \\ V_3\,(1+v_3) & = a_3 & A' + b_3 & B' + c_3 & C' + d_3 & D' + \text{ecc.} \\ \dots & & & & & \\ V_{n+m}\,(1+v_{n+m}) & = a_{n+m} & A' + b_{n+m} & B' + c_{n+m} & C' + d_{n+m} & D' + \text{ecc.} \end{array}$$

E perciò dovranno essere soddisfatte le:

$$\frac{(m+n+1)\,(m+n)\,(m+n-1)\,(m+n-2)\,\dots\,(m+2)\,(m+1)\,m}{1.2.3\,\dots\,n(n+1)}$$

relazioni:

$$(6) \quad \left|\begin{array}{llllll} V_1 & (1+v_1) & a_1 & b_1 & \dots & p_1 \\ V_2 & (1+v_2) & a_2 & b_2 & \dots & p_2 \\ V_3 & (1+v_3) & a_3 & b_3 & \dots & p_3 \\ \dots & & & & & \\ V_{n+1} & (1+v_{n-1}) & a_{n+1} & b_{n+1} & \dots & p_{n+1} \end{array}\right| = 0 \quad \left|\begin{array}{llllll} V_2 & (1+v_2) & a_2 & b_2 & \dots & p_2 \\ V_3 & (1+v_3) & a_3 & b_3 & \dots & p_3 \\ V_4 & (1+v_4) & a_4 & b_4 & \dots & p_4 \\ \dots & & & & & \\ V_{n+2} & (1+v_{n+2}) & a_{n+2} & b_{n+2} & \dots & p_{n+2} \end{array}\right| = 0$$

Tenuto conto delle relazioni (5), si vede che l'ipotesi più semplice che si possà fare è che (7) $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v_{n+m}$ dalla quale consegue subito:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \ldots = \frac{V'_1}{V_1} = \frac{V'_2}{V_2} = \ldots = \frac{V'_{n+m}}{V_{n+m}} = 1 + v_1 .$$

La condizione (7) è *sufficiente;* ma non è *però necessaria, perchè le regole di Kopp* valgano alla nuova temperatura corrispondente. La condizione (7) equivale all'altra: *Volumi uguali dei diversi liquidi, misurati alla temperatura ordinaria di ebullizione, rimangono uguali a tutte le altre temperature corrispondenti.* — Il Kopp [1] proponeva di calcolare i volumi molecolari dei liquidi di cui era determinata la dilatazione, alle temperature corrispondenti a pressioni più basse di 760 millimetri, applicando la legge Dalton [2]. Ma la legge di Dalton non è vera, e le temperature equidistanti dal punto di ebullizione sono lungi dal coincidere con le nuove temperature corrispondenti.

Il Gay-Lussac molto prima aveva confrontati i volumi dell'alcool e del solfuro di carbonio, a temperature equidistanti dal punto di ebullizione; ed aveva trovato che presa come unità il volume alla ebullizione, questi due liquidi si contraevano ugualmente a temperature equidistanti dalle prime. Il Pierre [3] dopo il Gay-Lussac, studiando le dilatazioni di un gran numero di liquidi, provò che volumi uguali di questi, misurati alla temperatura di ebullizione non rimanevano uguali a temperature equidistanti, ma che però si potevano distinguere i liquidi da lui esaminati in varî gruppi, nei quali i liquidi serbavano volumi uguali fra loro ad ugual distanza dalla ebullizione.

Così il bromuro di etile ed il bromuro di metile, l'ioduro di etile e l'ioduro di metile, il formiato di etile e l'acetato di etile formavano tre di questi gruppi: del resto, osservava allora il Pierre, che i composti isomeri o di sostituzione di cloro a bromo o a jodio non seguivano la stessa legge di contrazione.

Oggi però si posseggono in numero abbondante, almeno più che sufficiente i dati necessarî per vedere se la relazione (7) sia valevole, e nel caso negativo, se le dilatazioni o contrazioni fra due punti corrispondenti presentino qualche regolarità: e ad ogni modo per calcolare i volumi molecolari a temperature corrispondenti a pressioni molto più alte di quella barometrica.

Grazie ai bei lavori del Regnault principalmente, e poi anche dello Schumann, del Naccari e Pagliani, del Landolt, dello Staedel, del Brown, del Hahn, ecc. si conoscono ora per molte sostanze pure, le formule che collegano la tensione massima del vapore con la temperatura; e per molte altre si hanno i dati sufficienti per determinarle. D'altra parte i lavori del Pierre, del Kopp, del Rossetti, dell'Hirn, del

(1) H. Kopp, Annalen der Chemie und Pharmacie, t. XCII, pag. 1.

(2) La legge di Dalton cui si accenna qui era la seguente « i vapori di tutti i liquidi volatili « hanno la stessa tensione massima a distanze uguali dalla temperatura ordinaria di ebullizione ». Essa fu dal Regnault, riconosciuta completamente inesatta. — Regnault, *Relation des expériences* ecc. Mémoires de l'Académie des sciences, t. XXVI, pag. 659-661 (1862).

(3) J. Pierre, *Recherches sur la dilatation des liquides.* Ann. de Chim. et de Phys. anno 1845, 3ª s. t. XV, pag. 325 e pag. 405.

Drion, dell'Andreeff, del Louguinine, del Naccari e Pagliani, del Paternò e Pisati, del Pierre e Puchot, del Thorpe, del De Heen, dello Staedel ecc. ci hanno fatto conoscere per un numero anche molto maggiore di liquidi puri le formule della dilatazione termica.

Unica difficoltà la lunghezza enorme dei calcoli, derivante specialmente dalla natura della formula che esprime la tensione massima in funzione della temperatura. Questa difficoltà spaventando quelli che si sono occupati di simili ricerche, ne ha ritardata fino ad oggi l'effettuazione (¹).

Per temperature corrispondenti ho scelto quelle alle quali le tensioni massime erano in millimetri di mercurio:

20^{mm}; 60; 160; 260; 360; 460; 560; 660; 760; 1260; 1760; 2260; 2760; 3260; 3760; 4260; 5260; 6260; 7260; 8260; 9260; 10260.

Per alcuni liquidi come l'acqua, l'alcool, l'etere, il solfuro di carbonio, il tetracloruro di carbonio, il calcolo dei volumi molecolari si può grazie alle esperienze di Hirn e di Regnault estendere fra i limiti sopracitati senza lacuna di sorta: per gli altri liquidi è bisognato arrestarsi a tensione inferiori ai 1760^{mm}, mancando ogni dato sperimentale per temperature superiori a quelle della ebullizione sotto tale pressione, per altri liquidi poi quantunque mancasse pei punti corrispondenti ad alte tensioni, uno dei dati sperimentali (la densità), pure tenuto conto della regolarità delle curve che ne esprimevano la legge di dilatazione, e l'analogia di queste con quelle di altro liquido di simile composizione di cui la tensione era studiata fra limiti più estesi ho creduto di estendere le formule che esprimono il volume in funzione della temperatura oltre i limiti entro i quali erano state dagli sperimentatori verificate. Però in tal caso ho segnato un asterisco a destra, in alto del numero calcolato.

Quanto al modo di seguire i calcoli è presto detto.

La tensione F del vapore saturo è collegata con la temperatura T con la formula empirica:

$$\log F = a + b\alpha^T + c\gamma^T \tag{8}$$

e nel caso nostro si trattava, dato un valore f di F calcolare la temperatura T con un errore non superiore ad un centesimo di grado centigrado. Perciò non potendosi direttamente risolvere l'equazione precedente rispetto a T era duopo procedere per approssimazioni successive (²). Trovati cioè due primi valori piuttosto vicini T_1 e T_2 cui corrispondessero per la tensione dei vapori F_1 ed F_2 rispettivamente, fra i quali

(¹) Mentre la tensione dei vapori saturi è stata studiata fino ad alte temperature (Regnault) per molti liquidi, e per alcuni anche fino al punto critico (Saiotschewschy), la dilatabilità invece non è stata studiata in generale che fino al punto di ebullizione normale; se ne eccettuino le bellissime esperienze dell'Hirn sull'acqua, sull'alcool, sull'etere, sul solfuro di carbonio, sul tetracloruro di carbonio, spinte a temperature molto più alte di quelle dell'ebullizione; e quelle dell'Andreeff e del Drion sull'ammoniaca, sull'anidride solforosa ecc. liquefatte. Sarebbe da desiderare per il più pronto avanzamento degli studi fisico-chimici che tali determinazioni di tensioni e di densità fino al punto critico, venissero intraprese da chi ha mezzi per farle.

(²) In quei casi, come nelle esperienze dello Schumann, in cui l'autore non dà i coefficienti della formula (8), ho supplito con una costruzione grafica ottenuta coi dati sperimentali fornitimi dalla Memoria dell'autore.

fosse compresa la tensione data f; si cercava un valore T_3 compreso fra T_1 e T_2 per mezzo della proporzione:

$$F_2 - F_1 : T_2 - T_1 :: F_2 - f : T_2 - T_3$$

oppure dell'altra:

$$F_2 - F_1 : F_2 - T_1 :: f - F_1 : T_3 - T_1$$

secondochè f era più vicino ad F_2 o ad F_1. Ottenuto questo valore V_3 si calcolava con la (8) il valore di F_3 corrispondente, e si ripeteva il calcolo precedente tante volte chè i due valori consecutivi T_n T_{n+1} fra i quali doveva corrispondere la tensione data f non differissero meno di un centesimo di grado.

Il peso specifico del liquido a questa temperatura si calcolava con la formula:

$$D_T = D_0 (1 - aT - bT^2 - cT^3 - \text{ecc.}) \tag{9}$$

se questa era data: oppure dal peso specifico a zero diviso pel volume a T gradi, dato dalla formula:

$$V_T = 1 + \alpha\, T + \beta\, T^2 + \gamma\, T^3 + \delta\, T^4 + \text{ecc.} \tag{10}$$

oppure dall'altra:

$$\log V_T = AT + BT^2 + CT^3 + \text{ecc.} \tag{11}$$

i cui coefficienti erano dati dai diversi sperimentatori.

Però invece di calcolare i volumi molecolari alle temperature corrispondenti ho creduto più semplice e più conveniente per lo scopo mio di dividere i volumi V_T calcolati alle temperature corrispondenti per il volume V_E (che qualche volta indico anche con V_{760}) del liquido alla temperatura di ebullizione; oppure che fa lo stesso di dividere il peso specifico D_E del liquido alla temperatura di ebullizione per il peso specifico D_T alle temperature corrispondenti, quando nella Memoria dell'autore che ha studiata la dilatazione fosse stata prescelta la formula (9).

Nelle tavole che seguono sono per ciaschedun liquido quattro colonne: nella prima segnata F sono scritte le pressioni in millimetri di mercurio; nella seconda segnata T le temperature corrispondenti in gradi centigradi, lo zero corrispondendo alla fusione del ghiaccio ecc.; nella terza segnata V_T i volumi corrispondenti; nella quarta sono inscritti i valori $V_T : V_E$ oppure quelli $D_E : D_T$, i quali rappresentano i volumi del liquido alle temperature corrispondenti, avendo presa come unità il volume alla temperatura normale di ebullizione, cioè sotto 76 centimetri. Nel caso che più sperimentatori abbiano studiata la stessa sostanza, le colonne $T, V_T; V_T : V_E$ possono essere ripetute più volte.

In fine di ciascheduna tavola sono scritte le formule alle quali ho ricorso per calcolarla; con la citazione esatta dell'opera da cui quella formula è stata estratta, accompagnandole di quelle osservazioni che ho credute necessarie.

I calcoli lunghissimi per compiere e rivedere queste tavole furon cominciati da me or sono varî lustri; li ho compiuti nell'ultimo biennio con l'assistenza del mio aiuto prof. Enrico Stracciati principalmente, e con quella dei signori Principe Galitzine di Pietroburgo ed A. Mochi di Firenze. Ma soprattutto ringrazio il ch. prof. Stracciati di Arezzo il quale ha spinto la sua compiacenza fino a rivederle e riconfrontarle dopo trascritte.

Spero pertanto che non vi siano incorsi che ben pochi errori, avendo fatto di tutto perchè non se ne incontrassero punti. Che se qualcheduno ne fosse sfuggito credo che

mi terranno per iscusato quelli che vorran tener conto della lunghezza dei calcoli e del loro numero [1].

I millimetri di mercurio che esprimono le tensioni, i gradi centigradi che misurano le temperature sono *quelli antichi* quali li adoperava Regnault, non si è fatta cioè la riduzione indicata dal Broch per la latitudine e per l'altitudine, riduzione che per altro era un po' difficile a farsi non sapendo molte volte in quale laboratorio sono fatte le misure [2]: del resto le differenze che porterebbero queste correzioni sono piccolissime e in quasi tutti i casi (eccetto per l'acqua forse, così bene studiata) inferiori assai agli errori di osservazione. In ogni modo più gravi differenze porta di certo la pressione diversa e variabile con la temperatura sotto cui si è misurata la dilatazione di certi liquidi, pressione che si conosce bene (perchè costante): solo nelle esperienze di Hirn; che è grande e variabile in quelle del Drion e dell'Andreeff: è piccolissima di certo, ma da tenerne conto (a volere essere scrupolosi) negli altri casi, quando il cannello del dilatometro è verticale. E più grandi differenze ancora, specialmente per le temperature superiori a 100, son quelle che provengono dalla poca cura che avevano per lo passato molti sperimentatori (e non già Regnault ben s'intende), di confrontare accuratamente i loro termometri col termometro ad aria [3], difetto da cui non sono immuni molte delle misure a cui io ho ricorso. Seguono senz'altro le tavole.

[1] La stessa celebre Memoria del Regnault, *Relation des expériences* ecc. ne contiene diversi, dovuti proprio a sviste di calcolo. Ad alcuni non notati dallo Zeuner, e dagli altri, si troveranno le correzioni nelle note alle tavole seguenti.

[2] Compara, Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures. Paris, Gauthier-Villars, t. I, Memoria I e II.

[3] Si deve appunto all'avere il Joule trascurato di paragonare il suo termometro calorimetrico col termometro ad aria, che egli trova nelle sue ultime esperienze (che sono le meglio condotte) (Philos. Transactions, ecc. 1878, parte II, pag. 365) il numero 423,8 per l'equivalente meccanico del calore. Il Rowland che ha potuto paragonare il termometro Joule col campione Baudin n. 6166 da lui con somma cura confrontato col termometro ad aria, ha corretto le temperature nelle esperienze Joule, e così deduce dalle ultime esperienze di Joule per l'equivalente meccanico a Baltimora i numeri 427,1 a 12°,7 (temperatura iniziale dell'acqua) 426,3 a 17°,3: compara Rowland, *Appendix to paper on the mechanical equivalent of heat, containing the comparison with D^r Joule's Thermometer,* Proceedings of the american Academy, March 1880, pag. 38. Memoria gentilmente favoritami dall'autore. Non so perchè in alcune recenti pubblicazioni, si dia il numeno di Joule senza la correzione Rowland!! Eppure negli Atti dell'Istituto veneto, t. VII, serie V, 1882 comparve in italiano un lungo lavoro del Rowland sull'equivalente meccanico del calore. E a dir vero io non so se nemmeno nel congresso internazionale per la cosidetta determinazione dell'*Ohm* si sia tenuto conto della correzione alle esperienze di Joule, che deriva dal confronto accurato che il Rowland fece del termometro di Joule col termometro ad aria ecc. Compara *Procès verbaux — Conférence internationale pour la détermination des unités electriques*, pubblicata dal Ministero degli Affari Esteri di Francia. Paris, Imprimerie Nationale (Deuxième session 1884, pag. 43).

Ma non posso affermare sul semplice dubbio che si abbiano potuto commettere un errore così enorme come quello di prendere il numero di Joule senza tener conto delle correzioni fatte dal Rowland dopo il confronto del termometro di Joule col termometro ad aria; ma il dubbio è lecito, poichè in quei *Procès verbaux* si tace, sopra un punto d'importanza così capitale.

TAVOLA I.

Acqua H_2O

F	T Regnault	V_T	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$	T Broch	V_T	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$
20	+ 22,27	1,002237	0,96081	+ 22,307	1,002247	0,96081
60	41.66	1,00835	0,96667	41,681	1,00836	0,96667
160	61.56	1.01774	0,97567	61,556	1,01774	0,97567
260	72.53	1.02411	0,98178	72.518	1,02410	0,98176
360	80.36	1,02910	0,98656	80,354	1,02910	0,98656
460	86,54	1,03326	0,99055	86,538	1,03326	0,99054
560	91,68	1.03687	0,99409	91,682	1,03687	0,99408
660	96,14	1,04018	0,99718	96,107	1,04014	0,99714
760	100	1,04312	1	100	1,04312	1
1260	114,77	1.055278	1,011655	—	—	—
1760	125,29	1,064839	1,020821	—	—	—
2260	133,61	1,072943	1,028590	—	—	—
2760	140.55	1,080071	1,035423	—	—	—
3260	146.54	1,086486	1.041573	—	—	—
3760	151,83	1,092355	1,047199	—	—	—
4260	156,58	1,097784	1,05244	—	—	—
5260	164,89	1,108653	1,062824	—	—	—
6260	172,03	1,116504	1,070350	—	—	—
7260	178.33	1,124591	1,078103	—	—	—
8260	183,98	1.132066	1,085269	—	—	—
9260	189.11	1.139034	1.091949	—	—	—
10260	193,84	1,145607	1,098250	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T nella seconda colonna sono dati calcolati sino a $T = 100°$ con interpolazioni alla tavola che il Moritz ha calcolato dietro le esperienze di Regnault (Wüllner Bd III, s. 609). Per valori di T superiori a 100° si è calcolato T con la formula: $\log F = a - b\alpha_1^{x} - c\gamma_1^{x}$
dove: $\log \alpha_1 = \bar{1},994049292$ $\log \gamma_1 = \bar{1},998343862$ $\log b = 0,1397743$
$\log c = 0.6924351$ $a = 6,2640348$ $x = T + 20$
formula data dal Regnault, Mémoires de l'Académie des sciences, t. XXI, pag. 606. Si è preso questa e non quella data dal Regnault a pag. 610 perchè lo stesso Regnault dice a pag. 611 che essa rappresenta meglio i resultati delle esperienze. Le esperienze di Regnault furon fatte fra — 20 e + 220°.

Nella 5ª colonna sono calcolati i valori di T per interpolazione alla tavola che il dott. Broch ha calcolata di decimo in decimo di grado fra —30° e 101° sulle esperienze di Regnault (Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, t. I, pag. 33. (Paris, Gauthier-Villars, 1881).

I valori di V_T sono calcolati fino a 100° per interpolazioni alla nota tavola del nostro illustre e benemerito prof. Rossetti (Atti dell'Istituto veneto (3) XIII). Per temperature superiori a 100° con la formula:

$$V_T = 1 + 0,00010867875\ T + 0,0000030073653\ T^2 + \\ + 0,0000000028730422\ T^3 - 0,00000000000066457031\ T^4$$

verificata dall'Hirn fra 100° e 200°.

Hirn, *Mémoire sur la thermodinamique.* Paris, Gauthier-Villars, 1867, pag. 19.

Il Mendelejeff ha fatto alcune misure del volume dell'acqua sopra 100° ed ha trovato:

a 0°	vol.	1
a 99°,8	»	1,0426
a 131,0	»	1,0722
a 156,8	»	1,1016

volumi che sono vicini a quelli calcolati con la formula di Hirn (Zeitsch. Chem. Pharm. 1861, 33. Compara anche Watt's, *Dict. of Chem.* III, pag. 59).

Il Waterston (Phil. Mag. 4ª s. XXVI, pag. 116-134 e Fortschritte, XIX, pag. 355) ha studiato la dilatazione dell' acqua fino a 320°: i volumi da lui trovati sono appena più grandi di quelli calcolati con la formula dell'Hirn.

Il Sorby (Phil. Mag. 4ª s. XVIII, pag. 81-91 e Fortschritte der Physik, XV, 341), esprime la dilatazione dell'acqua fino a 200° con la formula:

$$V = 0,9977 + 0,0001231\,T + 0,00000330\,T^2.$$

Tavola II.

Alcool etilico C_2H_6O

F	T Regnault	V_T Hirn	$\frac{V_T}{V_E}$ Hirn	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Pierre	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Kopp
20	7,01	1,005667	0,919803	1,007437	0,921305	1.007345	0,920938
60	25.18	1,023982	0,936556	1,027535	0,939685	1,026999	0,938072
160	43,53	1,045983	0,956678	1,049075	0,959384	1,048269	0,957496
260	53,53	1,058924	0,968515	1.061356	0,970615	1.060692	0,968843
360	60.61	1,068414	0,977184	1,070289	0,978784	1,069918	0,977271
460	66.19	1,076079	0,984205	1.077470	0,985351	1,077471	0,984169
560	70.82	1.082572	0,990144	1,083522	0,990886	1,083938	0.990076
660	74,80	1,088260	0,995346	1.088798	0,995719	1.089652	0.995296
760	78,30	1,093348	1	1,093488	1	1,094802	1
1260	91,57	1,113347	1.018291	1.111737	1.016597	1.115457	1,018866
1760	101.05	1.129132	1,032728	1,125231	1.029029	1,131411	1.033438
2260	108,56	1,142389	1.044854	1,136195	1,039055	1,144827	1,045693
2760	114,84	1,154252	1,055704	1,145553	1,047613	1,156610	1,056455
3260	120,28	1,165199	1,065716	1,153801	1.055156	1,167251	1,066175
3760	125,12	1,175549	1.075182	1.162249	1,062882	1,177074	1,075147
4260	129,48	1,185424	1.084213	1,168050	1,068187	1,186220	1,083502
5260	137,14	1,204215	1,101401	—	—	—	—
6260	143,78	1,222216	1,117865	—	—	—	—
7260	149,67	1.239710	1,133865	—	—	—	—
8260	155,00	1,256933	1,149618	—	—	—	—
9260	159,89	1,274023	1,165249	—	—	—	—
10260	164,41	1,291012	1,180788	—	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula di Regnault: $\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove $\alpha = 5,4562028$ $b = -4,9809960$ $c = 0,0485397$ $\log \alpha = \bar{1},9970857$ $\log \gamma = \bar{1},9409485$ $t = T + 20$ verificata da $T = -20°$ a $T = +150°$: Regnault, Mémoires de l'Académie des sciences, t. XXVI, pag. 372.

Per i valori di V_T hanno servito le formule:

$$V_T = 1 + 0,00073892265\,T + 0,00001055235\,T^2 - 0,000000092480842\,T^3 + 0,0000000004041 3567\,T^4$$ valevole fra $T = 63°,6$ e $T = 150°,4$

Hirn, *Mémoire sur la théorie dinamique.* Paris, Gauthier-Villars, 1867, pag. 19 e Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. X, pag. 32 92; t. XI, pag. 1-112.

$$V_T = 1 + 0,001048630106\,T + 0,000001750991\,T^2 + 0,000000001345\,T^3$$

verificata fra $-32°$ e $+77°$: Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 354.

$$V_T = 1 + 0,00104139\,T + 0,0000007836\,T^2 + 0,000000017618\,T^3$$

Kopp, Pogg. Ann. Bd. 72, s. 60 (anno 1847).

Mendelejeff (Zeitsch. Chem. Pharm. 1861,33) ha misurati i volumi dell'alcool ad alte temperature ed ha trovato:

a 0° . . 1,0000
a 99°,9 . 1,1294
a 130°,9 1,1895

numeri che concordano con quelli calcolati con la formula di Hirn (compara Watt's, *Dictionary of Chem.* vol. III, pag. 66).

TAVOLA III.

Etere etilico $C_4H_{10}O$

F	T Regnault	V_T Hirn	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Hirn	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Pierre	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Kopp
20	— 41,64	0,958600	0,909331	0,938187	0,887182	0,942480	0,891512
60	— 22,58	0,973367	0,923339	0,966571	0,914033	0,968048	0,915697
160	— 3,07	0,995921	0,944734	0,995375	0,940326	0,995487	0,941653
260	+ 7.71	1,010783	0,958832	1,011825	0,956827	1,011633	0,956925
360	15,44	1,022281	0,969730	1,024074	0,968410	1,023789	0,968424
460	21,55	1,031840	0,978816	1,034106	0,977897	1,033797	0,977891
560	26,65	1,040119	0,986661	1,042761	0,986082	1,042450	0,986076
660	31,06	1,047500	0,993662	1,050477	0,993378	1,050168	0,993376
760	34,95	1,054181	1	1,057479	1	1,057170	1
1260	49.88	1,081398	1,025820	1,086320	1,027273	1,085912	1,027187
1760	60,67	1.102834	1,046152	1.109436	1,049132	1,108749	1,048789
2260	69,30	1.121263	1,063634	1,129524	1,068129	1,128416	1,067393
2760	76,57	1,138157	1,079659	1.147680	1,085298	1,146037	1,084061
3260	82,90	1,153164	1,093895	1,164478	1,101183	1,162213	1,099362
3760	88,54	1,167617	1,107606	1,180285	1,116131	1,177316	1,113648
4260	93.63	1.181397	1,120680	1,195241	1.130273	1,191529	1,127093
5260	102,59	1,207528	1,145465	—	—	—	—
6260	110.32	1,232287	1,168952	—	—	—	—
7260	117,13	1,256052	1,191495	—	—	—	—
8260	123,20	1,278966	1,213231	—	—	—	—
9260	128,68	1,301203	1,234326	—	—	—	—
10260	133,66	1,322804	1,254816	—	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla formula $\log F = a + b\alpha' + c\gamma$ dove:

$$t = T + 20 \qquad a = 5{,}0286298 \qquad b = 0{,}0002284 \qquad c = -3{,}1906390$$
$$\log\alpha = 0{,}0145775 \quad \log\gamma = \bar{1}{,}9968777$$

verificati dal Regnault fra T = — 18 e T = 173°: Regnault, Mémoires de l'Académie ecc., t. XXVI, pag. 392.

Per i valori di V_T hanno servito le formule:

$$V_T = 1 + 0{,}0013489509\ T + 0{,}0000065537\ T^2 - 0{,}000000034490756 T^3 + 0{,}0000000000337720 62 T^4$$

verificata dall'Hirn fra T = 19°,7 e T = 120°: Hirn, *Mémoires sur la thermodinamique,* ibidem, pag. 23-25.

$$V_T + 1 + 0{,}00148026\ T + 0{,}00000350316\ T^2 + 0{,}000000027007\ T^3$$

Kopp, Pagg. Ann. Bd. 72, s. 231 (anno 1847).

$$V_T = 1 + 0{,}001513244795\ T + 0{,}000002359183\ T^2 + 0{,}000000040051\ T^3$$

verificata dal Pierre fra — 15° e + 38°: Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 361.

Una serie di tensioni del vapore saturo di etere fu misurata recentemente dal sig. Sayotchewski; questa serie si estende da 100° fino alla temperatura critica dell'etere che è 190°: Beiblätter, t. III, p. 741 (anno 1879).

Mendelejeff (Zeitsch. Chem. Pharm. 1861, 33) ha determinati i volumi dell'etere ad alte temperature ed ha trovato:

0° 1,0000
78,2 1,1508
99,8 1,2091
131,2 1,3150
157,0 1,4235

che concordano con quelli calcolati con la formula dell' Hirn (compara Watt's, *Dictionary of Chemistry,* III, pag. 66).

TAVOLA IV.

Solfuro di carbonio $C.S_2$

F	T Regnault	V_T Hirn	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Hirn	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_E}$ Pierre	V_T Thorpe	$V_T : V_\varepsilon$ Thorpe
20	— 34,84	0,961431	0,908929	0,911122	0,908816	0,960530	0,908137
60	— 15,52	0,982275	0,928625	0,982569	0,929096	0,984767	0,931360
160	+ 5,00	1,005881	0,950952	1,005736	0.951003	1,005782	0,951235
260	16,56	1,019796	0,964107	1,019337	0,963863	1,019438	0,964151
360	24,92	1,030143	0,973889	1,029551	0,973522	1,029635	0,973791
460	31,57	1,038553	0,981839	1,037950	0,981463	1,037984	0.981691
560	37,15	1,045743	0,988637	1,045215	0,988333	1,045179	0,988495
660	41.98	1,052070	0,994618	1,051679	0,994445	1,051560	0,994531
760	46,26	1,057762	1	1,057553	1	1,057343	1
1260	62,68	1,080434	1,021339	1,081537	1,022678	1,080790	1,022175
1760	74,59	1,097849	1.037897	1,100579	1,040684	1,099282	1,039661
2260	84,11	1,112478	1.051718	1,116941	1.056156	1,115067	1,054593
2760	92,15	1,125398	1,063942	1,131637	1,070052	1,129177	1,067938
3260	99,15	1,137122	1.075205	1,145122	1,082803	1,142085	1,080146
3760	105,40	1,148004	1,085305	1,157749	1,094743	1,154130	1,091538
4260	111,05	1,158205	1.094958	1,169666	1,106011	1,165467	1,102260
5260	121,04	1,177182	1.112898	—	—	—	—
6260	129,74	1.194795	1,129549	—	—	—	—
7260	137,50	1,211459	1.145304	—	—	—	—
8260	144,55	1,227454	1,160425	—	—	—	—
9260	151,03	1,242939	1,175064	—	—	—	—
10260	157,05	1,258048	1,189348	—	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla formula $\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove:

$$t = T + 20 \qquad a = 5,4011662 \qquad b = -3,4405663 \qquad c = -0,2857386$$

$$\log\alpha = \bar{1},9977628 \quad \log\gamma = \bar{1},9911997$$

che rappresenta i resultati delle esperienze di Regnault fra T = — 16 e T = 136. Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 401.

Per i valori di T hanno servito le formule:

$$V_T = 1 + 0,0011680559\ T + 0,0000016489598\ T^2 -$$
$$- 0,0000000081119062\ T^3 + 0,000000000060946589\ T^4$$

verificata fra T = 22° e T = 146°.

Hirn, *Mémoire sur la thermodinamique*, pag. 29.

$$V_T = 1 + 0,001139803834\ T + 0,000001370651\ T^2 + 0,000000019123\ T^3$$

verificata da T = — 34 a T = 59,55.

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 360.

$$V_T = 1 + 0,00115056\ T + 0,00000111621\ T^2 + 0,000000017476\ T^3$$

data dal Thorpe.

Vedi Watt's, *Dictionary of Chemistry*, vol. VIII, pag. 2120 e Journal of the chemical Society, March 1880.

TAVOLA V.

Tetracloruro di carbonio C Ch_4

F	T Regnault	V_T Hirn	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Hirn	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Pierre	V_T Thorpe	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Thorpe
20	— 8,68	0,989985	0,900921	0,989549	0,897019	0,989564	0 897693
60	+ 11,38	1,012585	0,921572	1,013793	0,918996	1,013842	0,919717
160	32,77	1,038372	0,945011	1,040769	0,943450	1,040753	0,944129
260	44,92	1,054123	0,959376	1,056949	0,958117	1,056802	0,958688
360	53,75	1,066051	0,970232	1,069203	0,969225	1,068917	0,969679
460	60,82	1,075895	0,979192	1,079358	0,978431	1,078935	0,978767
560	66,76	1,084378	0,986921	1,088148	0,986398	1,087593	0,986621
660	71,93	1,091925	0,993781	1,096006	0,993522	1,095321	0,993631
760	76,52	1.098758	1	1,103152	1	1,102341	1
1260	94,25	1,126456	1,025208	1,132411	1.026523	1,131022	1,026018
1760	107,17	1,148154	1,044956	1,155575	1,047521	1,153970	1,046835
2260	117,52	1.166638	1,061778	1,175386	1,065479	1,173012	1,064109
2760	126,27	1,183154	1,076810	1,193078	1,081517	1,190266	1,079762
3260	133.89	1,198290	1.090585	1.209232	1,096160	1,206010	1,094044
3760	140,66	1.212389	1,103417	1,224203	1.109731	1,220589	1,107269
4260	146.78	1,225714	1.115545	1,238254	1,122469	1,234270	1,119680
5260	157.48	1,250482	1,138086	—	—	—	—
6260	166,81	1,273784	1,159294	—	—	—	—
7260	175,02	1,295768	1,179302	—	—	—	—
8260	182,40	1,316834	1,198475	—	—	—	—
9260	189,11	1,337156	1,216970	—	—	—	—
10260	195,28	1,356904	1,234943	—	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula di Regnault: $\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove $a = 12,0962331$ $b = -9,1375180$ $c = -1,9674890$

$$t = T + 20 \qquad \log\alpha = \bar{1},9997120 \qquad \log\gamma = \bar{1},9949780$$

verificata da T = — 36° a T = 182.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 438 (in fine).

Per i valori di V hanno servito le formule:

$$V_T = 1 + 0,0010671883\ T + 0,0000035651378\ T^2 - 0,000000014949281\ T^3 + 0,000000000085182318\ T^4$$

valevole fra T = 30° a T = 150°.

Hirn, *Mémoire sur la thermodinamique*, pag. 34.

$$V_T = 1 + 0,001183844392\ T + 0,000000898811\ T^2 + 0,0000000135135\ T^3$$

valevole da 0° a + 75°,75.

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XXXIII, pag. 213.

$$V_T = 1, + 0,00120719\ T + 0,00000067109\ T^2 + 0,000000013478\ T^3$$

data dal Thorpe.

Vedi Watt's, *Dictionary of Chemistry*, Third Supplement, part II, pag. 2120 (Londra 1881) e Journal of the chemical Society, March 1880.

Tavola VI.

Cloroformio $CHCl_3$

F	T Regnault	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Pierre	V_T Thorpe	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Thorpe
20	— 20,01	0,979575	0,900629	0,976005	0,901764
60	— 0,32	0,999615	0,919082	0,999607	0,923571
160	+ 19,93	1,024056	0,941525	1,025257	0,947260
260	31,34	1,039815	0,956014	1,010491	0,961345
360	39,55	1,052163	0,967367	1,051848	0,971838
460	46.05	1,062579	0,976944	1,061093	0,980380
560	51,49	1,071754	0,985748	1.069020	0,987704
660	56,19	1,080032	0,992990	1.076011	0,994163
760	60,36	1,087656	1	1,082328	1
1260	76,34	1,119160	1,029248	1,107605	1,023354
1760	87,93	1,145270	1,052971	1,127086	1,041353
2260	97,23	1,167771	1,073842	1,143469	1,056490
2760	105,09	1,188100	1,092349	1,157879	1,069804
3260	111,96	1,206895	1,109629	1.170909	1,081843
3760	118,09	1,224502	1,125817	1,182897	1.092919
4260	123,66	1,241207	1,141176	1,194093	1,103263

Osservazioni. — I valori di T son calcolati con la formula di Regnault
$\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$
dove:

$a = 2,9986315 \qquad b = 1,4702471 \qquad c = -2,2634847$

$t = T - 20 \qquad \log\alpha = 0,0004506 \qquad \log\alpha = \bar{1},9966043$

verificata da $T = +7$ a $T = 129$.

Regnault, Mémoires. t. XXVI, pag. 412. Il Regnault dà a pag. 415 un'altra formula la quale dà per T valori pochissimo diversi da quelli calcolati con la precedente.

I valori di V_T sono stati calcolati con la formula di Pierre:

$$V_T = 1 + 0,00110715\ T + 0,00000466473\ T^2 + 0,000000017433\ T^3$$

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XXXIII, pag. 209, e con l'altra:

$$V_T = 1 + 0,00123024\ T + 0,00000171380\ T^2 + 0,000000008338\ T^3$$

dovuta al Thorpe.

Watt's, *Dictionary of Chemistry*, Third Supplement, part. II, pag. 2120 (Londra 1881) e Journal of the chemical Society, March 1880.

TAVOLA VII.

Cloruro d'etilo $C_2 H_5 . Ch$

F	T Regnault	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Pierre	V'_T Drion	$V_T = V'_T(1+KT)$ Drion	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Drion
20	— 54,77	0,919619	0,901408	0,922053	0,921670	0,903960
60	— 40,01	0,940509	0,921885	0,942423	0.942143	0,924040
160	— 23,13	0.964876	0,945769	0,966179	0,966017	0,947455
260	— 13,27	0,979563	0,960165	0,980386	0,980303	0,961466
360	— 6,05	0,990573	0,970957	0,990981	0,990939	0,971898
460	— 0,27	0,999574	0,979780	0,999594	0,999592	0,980385
560	+ 4,58	1,007272	0,987326	1,006967	1,006998	0,987551
660	8,79	1,014069	0,993988	1,013533	1,013593	0.994117
760	12,53	1,020202	1	1,019504	1,019591	1
1260	26,84	1,044592	1,023907	1,043639	1,043826	1,023769
1760	37,19	1,063258	1,042203	1,062506	1.062766	1,042345
2260	45,44	1,078832	1,057469	1,078502	1,078820	1,058091
2760	52,39	1,092472	1,070839	1,092689	1,093056	1,072053
3260	58,41	1,104700	1,082824	1,105547	1,105956	1,084607
3760	63,81	1,116009	1,093909	1,117553	1,117999	1,096517
4260	68,67	1,126478	1,104171	1,128764	1,129244	1,107546

Osservazioni. — I valori di T son calcolati con la formula di Regnault $\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove $t = T + 32$

$$a = 5{,}3517889 \qquad b = -3{,}2622870 \qquad c = -0{,}0969484$$
$$\log \alpha = \overline{1}{,}9972423 \qquad \text{gol}\, \gamma = \overline{1}{,}9797147$$

verificata da $-32°$ a $+92°$.

Regnault, Mémoires, ecc. t. XXVI, pag. 446 (¹).

I valori di V_T sono stati calcolati con la formula:

$$V_T = 1 + 0{,}0015746\ T + 0{,}0000028137\ T^2 + 0{,}000000015698\ T^3$$

verificata fra $-31°$ e $+28°$ dal Pierre (Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 365, e con l'altra:

$$\log V'_T = 0{,}000652267\ T + 0{,}000001315\ T^2 + 0{,}000000004977\ T^3$$

dovuta al Drion (Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. LVI, pag. 31) valevole da 0° a +80°. I volumi V'_T non sono corretti della dilatazione del dilatometro di vetro: la correzione approssimativa è stata fatta nella penultima colonna aggiungendo la dilatazione presunta del vetro. Si vede però che i numeri del Drion concordano assai bene con quelli del Pierre.

(¹) Nella tavola che dà il Regnault a pag. 466 sono incorsi due errori di stampa non corretti. È data a +40° la tensione F uguale a 1619,58 invece che 1919,58 e la tensione F a +55° è data uguale a 2668,13 invece che 2968,43.

TAVOLA VIII.

Bromuro di etilo $C_2 H_5 . Br$

F	T Regnault	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Pierre
20	— 36,96	0,951758	0,902322
60	— 19,75	0,974036	0,923638
160	— 0,69	0,999078	0,947384
260	+ 10,24	1,013872	0,961412
360	18,17	1,024901	0,971870
460	24,48	1,033892	0,980396
560	29,78	1,041612	0.987717
660	34,36	1,048419	0,994172
760	38,12	1,054565	1
1260	53.98	1,079238	1,023396
1760	65,20	1,098279	1,041152
2260	74,18	1,114385	1,056724
2760	81,73	1,128578	1,070183
3260	88,31	1,141474	1,082412
3760	94,17	1,153391	1,093710
4260	99,47	1,164540	1,104284

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla formula di Regnault: $\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove:

$a = 5,2894363$ $b = -3,4977248$ $c = -0,1214656$
$t = T + 24$ $\log \alpha = \bar{1},9973769$ $\log \gamma = \bar{1},9823164$

verificata dal Regnault fra — 31° e + 126°.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 453.

I valori di V_T sono calcolati con la formula:

$$V_T = 1 + 0,001337627\ T + 0,00000150134\ T^2 + \\ + 0,000000016900\ T^3$$

verificata dalle esperienze del Pierre fra — 31,9 e + 53,7.

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 369.

TAVOLA IX.

Ioduro di etilo $C_2 H_5 . J$

F	T Regnault	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Pierre
20	— 13,53	0,984883	0,889175
60	+ 7,07	1,008177	0,919542
160	28,61	1,034480	0,943533
260	40,84	1,050485	0,958048
360	49.68	1,062579	0,969343
460	56,76	1,072663	0,978359
560	62,74	1,081425	0,986350
660	67,94	1,089183	0,994338
760	72.58	1,096390	1
1260	90,70	1,125884	1,026901
1760	104,23	1,149688	1,048612
2260	115,34	1,170469	1,067566
2760	124,96	1,189418	1,084849
3260	133,56	1,207146	1,101018
3760	141,39	1,223961	1,116355
4260	148,66	1,240174	1,131143

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla formula di Regnault:

$\log F = a + b\alpha^t$ dove $a = 4,5800247$ $b = -2,7820651$
$t = T - 8$ $\log \alpha = \bar{1},9966846$

verificata dal Regnault fra T = + 7⁴ e T = + 49°.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 456.

I valori di V_T sono calcolati con la formula:

$$V_T = 1 + 0,0011423\ T + 0,0000019638\ T^2 + \\ + 0,000000006206\ T^3$$

date dal Pierre (fra — 34°,8 e + 71,9). Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 373.

TAVOLA X.

Bromuro di etilene $C_2H_4Br_2$

F	T Regnault	V_T Thorpe	$V_T : V_\varepsilon$ Thorpe
20	+ 33,18	1,032512	0,900740
60	57,80	1,058119	0,923070
160	82,86	1,085891	0,947306
260	96,68	1,102075	0,961425
360	106,58	1,114097	0,971912
460	114,42	1,123885	0,980452
560	120,97	1.132254	0.987758
660	126,64	1,139646	0,994202
760	131,65	1,146293	1
1260	150,87	1,172868	1,023183
1760	164,82	1,193289	1,040998
2260	176,03	1,210439	1,055959
2760	185,53	1,225516	1,069112
3260	193,85	1,239147	1,081003
3760	201,63	1,252267	1,092156
4260	208,10	1,263159	1,102212

Osservazioni. — I valori di T son calcolati con la formula di Regnault: $log\,F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove:
$a = 5{,}0188136$ $b = -5{,}2589812$ $c = 0{,}4162589$
$t = T + 28$ $\log\alpha = \bar{1}{,}9975516$ $\log\gamma = \bar{1}{,}9712880$
verificata da $T = -28$ a $T = 236$.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 468 (in principio) (¹).

$$V_T = 1 + 0{,}000952845\,T + 0{,}000000683455\,T^2 + 0{,}00000000394763\,T^3$$

data dal Thorpe (Proc. Roy. Soc. London, t. XXIV, pag. 283; Wurtz, *Dict. de Chimie*, Suppl. pag. 704 e Journal of the chemical Society, March 1880).

TAVOLA XI.

Cloruro di silicio Si Ch_4

F	T Regnault	V_T Pierre	$V_T : V_\varepsilon$ Pierre
20	— 24,73	0,968713	0,890184
60	— 5,17	0,993362	0,903645
160	+ 15,32	1.020485	0.937759
260	26,86	1.037127	0,953052
360	35.23	1,050089	0.964964
460	41,93	1,061114	0.975095
560	47,58	1,070919	0,984103
660	52,51	1,079893	0,992351
760	56,89	1.088216	1
1260	74,22	1,124788	1,033607
1760	86,78	1,155457	1.061790
2260	97,26	1.184122	1,088131
2760	106,31	1,211360	1,113161
3260	114,40	1,237813	1,137469
3760	121,71	1,263536	1.161107
4260	128,59	1,289416	1,184889

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula:
$\log F = a + b\alpha^t$
dove $t = T + 26$ $a = 4{,}5959425$ $b = -3{,}3287708$
$log = \bar{1}{,}9965260$
che rappresenta bene i resultati trovati dal Regnault fra $T = -26$ e $T = 63$ col metodo da lui detto statico.

Regnault, Mémoires, ecc. t. XXVI, pag. 476.

I valori di V_T sono stati dedotti dalla formula:

$$V_T = 1 + 0{,}0012941191\,T + 0{,}000002184144\,T^2 + 0{,}000000040864220\,T^3$$

verificata dal Pierre fra —32 e +59.

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XX, pag. 27.

(¹) Nella tavola che dà il Regnault a pag. 470 è incorso un errore di stampa. Vi è dato il numero 3833,45 per tensione del vapore a 195° mentre invece la tensione calcolata secondo la formula è 3333,45 e l'errore non è corretto negli errata.

TAVOLA XII.

Cloruro fosforoso Ph Ch_3

F	T Regnault	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Pierre	V_T Thorpe	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Thorpe
20	— 11,76	0,986819	0,900968	0,986516	0,900797
60	+ 9,03	1,010275	0,913932	1,010566	0,922758
160	30,65	1,035927	0,945793	1,036853	0,946761
260	42,73	1,051217	0,959755	1.052282	0,960849
360	51,46	1.062833	0.970360	1,063827	0,971391
460	58,41	1,072472	0,979161	1,073278	0,980021
560	64,25	1,080857	0,986816	1,081410	0,987446
660	69,32	1,088401	0,993704	1,088621	0,994031
760	73,83	1.095297	1	1.095158	1
1260	91,30	1,123959	1,026168	1,121645	1,024185
1760	104,18	1,147311	1,047488	1,142473	1,043203
2260	114,65	1,167878	1,066266	1,160298	1,059480
2760	123,63	1,186730	1,083477	1,176269	1,074063
3260	131,58	1,204446	1,099652	1,190964	1,087481
3760	138.76	1.221300	1,115046	1.204707	1,100030
4260	145,38	1,237599	1,129921	1,217789	1,111975

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula di Regnault:

$$\log F = a + b\alpha^t \quad \text{dove } a = 4,7479108 \qquad b = -3,1683558$$
$$t = T \qquad \log \alpha = \bar{1},9968895$$

verificata dal Regnault da 0° a +67°.

Regnault, Mémoires, ecc. t. XXVI, pag. 478.

I valori di V_T sono calcolati con la formula di Pierre:

$$V_T = 1 + 0,001128619\ T + 0,000000872880\ T^2 + 0,0000000179236\ T^3$$

valevole da —36° a +74,9.

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XX, pag. 10.

Nella Memoria del Pierre (pag. 10) il coefficiente di T^3 è stato stampato per errore mille volte più grande. Il vero valore di questo coefficiente l'ho ottenuto rifacendo i calcoli delle costanti coi dati stessi del Pierre.

Il Thorpe ha dato la formula seguente, con la quale sono stati calcolati i valori della 5ª colonna:

$$V_T = 1 + 0,00115920\ T + 0,00000116370\ T^2 + 0,000000008029\ T^3.$$

Vedi Watt's, *Dictionary of Chemistry*, vol. VIII, pag. 2120 e Journal of the chemical Society, March 1880.

Tavola XIII.

Anidride solforosa SO_2

F	T Regnault	D'_T Andreeff	$D_T=\frac{D'_T}{1+KT}$ Andreeff	$\frac{D\varepsilon}{D_T}$ Andreeff	V'_T Drion	$V_T-V'_T(1+KT)$ Drion	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Drion	V_T Pierre	$\frac{V_T}{Ve}$ Pierre
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—
60	—	—	—	—	—	—	—	—	—
160	—	—	—	—	—	—	—	—	—
260	—	—	—	—	—	—	—	—	—
360	— 25,65	1,504143	1,504443	0,971266	0,955430	0,955251	0,972432	1,000299	0,97355
460	— 20,80	1,490775	1,491013	0,980015	0,963815	0,963670	0,981003	1,008062	0,98131
560	— 16,75	1,479601	1,479778	0,987523	0,970807	0,970790	0,988251	1,015093	0,98815
660	— 13,15	1,469663	1,469809	0,994153	0,977032	0,976940	0,994512	1,021591	0,99454
760	— 10,05	1,461099	1,461215	1	0,982408	0,982331	1	1,027264	1
1260	+ 2,00	1,427759	1,427736	1,023449	1,003675	1,003689	1,021742	1,048290	1,02047
1760	10,70	1,403702	1,403582	1,041061	1,019519	1,019594	1,037933	—	—
2260	17,55	1,384620	1,384431	1,055462	1,032747	1,032870	1,051448	—	—
2760	23,40	1,368356	1,368104	1,068084	1,044572	1,044736	1,063527	—	—
3260	28,45	1,354303	1,353999	1,079184	1,055216	1,055415	1,074398	—	—
3760	32,90	1,341907	1,341563	1,089188	1,064956	1,065186	1,084345	—	—
4260	37,00	1,330476	1,330082	1,098590	1,074014	1,074273	1,093616	—	—

Osservazioni. — I valori di T li ho ottenuti graficamente ricostruendo una curva con i valori di F e T registrati nella 1ª e nella 3ª serie di Regnault (Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 583 e pag. 585) e con quelli della tavola calcolata dal Regnault a pag. 590.

I valori di D_T e di V_T sono stati calcolati con le formule seguenti:

$$D'_T = 1{,}433298 - 0{,}00276894\ T - 0{,}00000027086\ T^2$$

trovata dall'Andreeff (Liebig's Ann. CX 1-16; Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. LVI, pag. 325; Fortschritte der Physik, XV, s. 344) dove D'_T esprime la densità senza aver riguardo alla dilatazione del vetro del dilatometro; D_T è la densità vera.

Il Drion (¹) (Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. LVI, pag. 36) dà la formula:

$$\log V_T = 0{,}00076711\ T + 0{,}000001485\ T^2 + 0{,}0000000137\ T^3$$

valevole fra 0° e 80°, dove V'_T è il volume non corretto della dilatazione del vetro: nella settima colonna è scritto il valore di V_T corretto di questa dilatazione.

Il Pierre (Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XXI, pag. 341) dà la seguente formula valevole da —36° a —9°:

$$V_T = 1 + 0{,}001496377\ \theta + 0{,}00002233748\ \theta^2 - 0{,}0000004957592\ \theta^3$$

dove $\theta = 25°{,}85 + T$.

(¹) La citazione di questa Memoria è nel Rammelsberg (opera citata) interamente sbagliata.

Tavola XIV.

Ammoniaca Az H_3

F	T Regnault	D'_T Andreeff	$D_T = \frac{D'_T}{1+KT}$ Andreeff	$\frac{D\varepsilon}{D_T}$ Andreeff
20	— 85,82	0,721633	0,722138	0,934522
60	— 72,73	0,711896	0,712323	0,947398
160	— 59,17	0,700560	0,700910	0,962825
260	— 51,65	0.693725	0,694003	0,972408
360	— 46,25	0,688576	0,688851	0,979681
460	— 41,97	0,684352	0,684557	0,985823
560	— 38.40	0,680732	0,680936	0,991068
660	— 35,32	0,677437	0,677640	0,995888
760	— 32,59	0,674652	0,674854	1
1260	— 22,18	0,663174	0,663306	1,017409
1760	— 14,69	0,654453	0,654583	1,030967
2260	— 8.72	0,647222	0,647286	1,042590
2760	— 3,72	0,640978	0,640997	1,052819
3260	+ 0,63	0,635405	0,635408	1,062079
3760	4,49	0,630575	0,630552	1,070259
4260	7,97	0,626137	0,626106	1,077859

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula di Regnault:

$$\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$$

dove: $a = 11,5043330$ $\quad b = -7,450352$ $\quad c = -0,9499674$

$t = T + 22$ $\quad \log\alpha = \bar{1},9996014$ $\quad \log\gamma = \bar{1},9939729$

che interpetra le esperienze di Regnault fra -31° e $+33^\circ$.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 606.

Il D'Andreeff (Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. LVI, pag. 325) dà la densità D'_T dell'ammoniaca in funzione della temperatura senza far la correzione per la dilatazione del vetro del dilatometro:

$$D'_T = 0,63622 - 0,0012919\ T - 0,0000034567\ T^2.$$

Nella quarta colonna ho calcolato i valori della densità a varie temperature corretti per la dilatazione termica del vetro: è impossibile però fare la correzione per l'espansione del dilatometro dovuta alla varia tensione del vapore; ma questa si deve supporre piccolissima atteso che l'Andreeff impiegava tubi a grosse pareti e di piccolo diametro interno.

Tavola XV.

Benzolo $C_6 H_6$

F	T	V_T	$\frac{V_T}{V_E}$	V_T	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$	V_T	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$
	Regnault	Louguinine	Louguinine	Kopp	Kopp	Paternò e Pisati	
		Il benzolo è solido a questa temp.					
20	— 4,09	—	—	—	—	—	—
60	+ 15.07	1,017986	0,919274	1,018043	0,919854	1,017999	0,879125
160	36,79	1,045689	0,944291	1,047404	0,944576	1,043105	0,900806
260	49.03	1,062219	0,959218	1,061693	0,959294	1,062889	0,917805
360	57,85	1.074555	0,969454	1,073882	0,970308	1,082033	0,934423
460	64,81	1,084572	0,979403	1,083838	0,979304	1,101135	0,950920
560	70.69	1.093123	0,987125	1,092382	0,987024	1,120026	0,967182
660	75,75	1,100643	0,993916	1,099937	0,993854	1,139017	0,983625
760	80.22	1,107380	1	1,106743	1	1.157968	1
1260	97,41	1,134117	1.024144	1.134175	1,024768	1.252810	1,081902
1760	109.91	1.154385	1,042446	1,155423	1,043984	1,347444	1,163619
2260	119,96	1.171186	1,057618	1,173410	1.060237	1,441890	1,241735
2760	128,48	1,185791	1,070807	1,189318	1,074610	—	—
3260	135,95	1,198844	1,082594	1,203788	1,087685	—	—
3760	142.65	1,210771	1,093365	1,217200	1,099894	—	—
4260	148,75	1,221803	1,103327	1,229779	1,111165	—	—

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla formula di Regnault:
$\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove $a = 4,9948978$ $b = -4,1097538$ $c = -0,4379860$
$t = T + 24$ $\log\alpha = \bar{1},9972300$ $\log\gamma = \bar{1},9612855$
verificata da -23° a 171° (Regnault, Mémoires ecc. t. 26, pag. 422).

Il benzolo solidificava a $+4^\circ,45^\circ$. Il Regnault dà a pag. 427 un'altra formula più esatta ma che conduce a valori di T pochissimo diversi da quelli qui riportati.

I valori di V_T sono calcolati con le formule:

$$V_T = 1 + 0,00117626\ T + 0,00000127755\ T^2 + 0,0000000080648\ T^3$$

data dal Kopp (Pogg. Ann. Bd. 72, pag. 242, anno 1847).

$$V_T = 1 + 0,00116\ T + 0,000002226\ T^2$$

data dal Louguinine (Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XI, pag. 453.

Pisati e Paternò danno la formula:

$$V_T = 1 + 0,0013753\ T - 0,000016496\ T^2 + 0,000000297921\ T^3$$

Vedi Naccari e Bellati, *Manuale di Fisica*, pag. 612.

Questa ultima formula dà per V_T valori troppo più alti di quelli dati dagli altri sperimentatori quando T è vicino al punto ordinario di ebullizione.

TAVOLA XVI.

Toluene $C_6H_5 . CH_3$

F	T Naccari	D_T Naccari	$\frac{D_E}{D_T}$ Naccari	D_T Louguinine	$\frac{D_E}{D_T}$ Louguinine
20	+20,61	0,86[illegible]24	0,89773	0,86516	0,89982
60	40,89	0,84420	0,91916	0,84627	0,91991
160	63,65	0,82235	0,94358	0,82446	0,94424
260	76,75	0,80954	0,95852	0,81176	0,95901
360	86,24	0,80016	0,96900	0,80248	0,97015
460	93,78	0,79263	0,97896	0,79504	0,97918
560	100,08	0,78631	0,98683	0,78879	0,98694
660	105,51	0,78083	0,99376	0,78338	0,99376
760	110,30	0,77596	1	0,77849	1
1260	128,44	0,75736	1,02455	0,76024	1,02400
1760	—	—	—	—	—
2260	—	—	—	—	—
2760	—	—	—	—	—
3260	—	—	—	—	—
3760	—	—	—	—	—
4260	—	—	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T furon calcolati con la formula:

$$\log F = 6{,}381604 - a\alpha^T - b\beta^T$$

dove:

$$\log a = 0{,}7043350 \quad \log \alpha = \bar{1}{,}9985175$$

$$\log b = \bar{1}{,}8185182 \quad \log \beta = \bar{1}{,}9874157$$

verificata da +54 a +116° dai sigg. Naccari e Pagliani, Atti della r. Acc. delle scienze di Torino, Vol. XVI e Nuovo Cimento, 3ª s. t. X, pag. 49 (anno 1881) (¹).

I valori di D_T sono calcolati con le formule:

$$D_T = a - bT - cT^2 \text{ dove } a = 0{,}88218 \qquad \log b = \bar{4}{,}9584796$$

(valevole da 0° a 105°) $\log c = \bar{7}{,}6912505$

Naccari e Pagliani, Memoria sopra citata.

$$D_T = 0{,}8841 - 0{,}0009101\ T - 0{,}0000004226\ T^2$$

formula trovata dal Louguinine (Ann. de Chim. et de Phys. 4ᵉ s. t. XI, pag. 468) (anno 1867).

(¹) La bella Memoria dei sigg. Naccari e Pagliani offre uno dei pochi esempî nei quali diverse importanti proprietà fisiche sono studiate sullo stesso campione di una sostanza; condizione quasi indispensabile per uno studio serio delle relazioni fra le proprietà fisiche dei varî composti. In una mia Memoria stampata nel 1879 nel Nuovo Cimento (*Relazione fra la coesione specifica, la densità e il calorico specifico*) io aveva insistito sulla necessità di studiare le proprietà fisiche di un liquido sulla stessa porzione di liquido; e non ha guari ho messo in atto questo divisamento, studiando in unione al prof. E. Stracciati, quasi tutte le proprietà fisiche degli idrocarburi dei petrolii di Pensilvania, sempre operando su una stessa porzione di liquido.

Tavola XVII.

Essenza di trementina $C_{10}H_{16}$

F	T	V_T	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$	V_T	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$	V_T	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$
	Regnault	Hirn	Hirn	Kopp	Kopp	Frankenheim	
20	+ 53,68	1 047885	0,890168	1,053278	0,896551	1,049981	0,899334
60	79,47	1,076078	0,914118	1,081663	0,920713	1,075225	0,921744
160	105,65	1,106803	0,940218	1,111681	0,946264	1,103158	0,94 947
260	120,34	1,124956	0,955639	1,128877	0,960901	1,120049	0,960170
360	131,06	1,138680	0,967298	1,141521	0,971664	1,132496	0,970843
460	139,68	1,150055	0,976969	1,151721	0,980346	1,142713	0,979599
560	147,00	1,159989	0,985399	1,160394	0,987729	1,151535	0,987676
660	153,42	1,168940	0,993003	1,167997	0,994200	1,159363	0,993872
760	159,18	1,177176	1	1,174810	1	1,166511	1
1260	182,06	1,212267	1,029724	1,201703	1,022891	1,195643	1,024973
1760	—	—	—	—	—	—	—
2260	—	—	—	—	—	—	—
2760	—	—	—	—	—	—	—
3260	—	—	—	—	—	—	—
3760	—	—	—	—	—	—	—
4260	—	—	—	—	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula di Regnault:

$\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$ dove $a = 4{,}2647889$ $b = -4{,}67749$ $c = 0{,}7286714$

$t = T$ $\log\alpha = \bar{1}{,}9966890$ $\log\gamma = \bar{1}{,}9868328$.

Questa formula non può estendersi oltre i 180° perchè a tale temperatura l'essenza provava rapidamente delle trasformazioni facili a riconoscere otticamente col misurarne il potere rotatorio.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 501.

I volumi V_T son calcolati con le formule:

$$V_T = 1 + 0{,}00068661346\ T + 0{,}0000050019897\ T^2 -$$
$$- 0{,}000000025586316\ T^3 + 0{,}000000000069055495\ T^4$$

dovuta all'Hirn, *Memoire sur la thermodinamique* ecc. p. 26.

$$V_T = 1 + 0{,}0008474\ T + 0{,}000001248\ T^2.$$

Frankenheim, Pogg. Ann. Bd. 72, pag. 422 e Bibl. Univ. de Genève, t. VII, pag. 222.

$$V_T = 1 + 0{,}0009003\ T + 0{,}0000019595\ T^2 - 0{,}000000044998\ T^3$$

formula dovuta al Kopp, V. Rammelsberg, opera citata, vol. II, pag. 477, ed anche Landolt e Börnstein, *Physikalisch-Chemische Tabellen*, Berlin, 1883 pag. 66 (32.a).

TAVOLA XVIII.

Alcool metilico CH_4O

F	T Regnault	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_E}$ Kopp	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V_E}$ Pierre
20	— 4,39	0,994924	0,917648	0,994824	0,903443
60	+ 13,05	1,015074	0,936233	1,015757	0,922666
160	31,29	1,036696	0,956176	1,038907	0,943914
260	41,41	1,049292	0,967793	1,051824	0,955786
360	48,66	1,058705	0,976475	1,062443	0,974721
460	54,38	1,066409	0,983581	1,070573	0,983105
560	59,14	1,073030	0,989688	1,077472	0,989440
660	63,24	1,078902	0,995104	1,083537	0,995009
760	66,85	1,084210	1	1,088971	1
1260	80,55	1,105675	1,019890	1,110412	1,019689
1760	90,31	1,122421	1,035243	1,126542	1,034501
2260	98,02	1,136614	1,048333	1,139824	1,046698
2760	104,45	1,149153	1,059898	1,151287	1,057223
3260	110,00	1,160541	1,070402	1,161474	1,066579
3760	114,91	1,171072	1,080115	1,170722	1,075072
4260	119,32	1,180912	1,089191	1,179220	1,082875

Osservazioni. — I valori di T son calcolati con la formula di Regnault:

$$\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$$

dove: $a = 5{,}9051569$ $b = -4{,}5376050$ $c = -0{,}3666842$

$t = T + 14$ $\log\alpha = \bar{1}{,}9977329$ $\log\gamma = \bar{1}{,}9891933$

verificata da $T = -14$ a $T = 148$.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 460.

I valori di V_T sono calcolati con le formule:

$$V_T = 1 + 0{,}00115435\ T - 0{,}00000028046\ T^2 + 0{,}000000027766\ T^3$$

verificata da Kopp fra ($T = 0$ e $T = 61{,}2$) Pogg. Ann. Bd. 72, pag. 52.

$$V_T = 1 + 0{,}001185569707\ T + 0{,}000001564933\ T^2 + 0{,}0000000091113\ T^3$$

verificata da ($-37{,}99$ a $+69{,}38$).

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. 15, pag. 358. La dilatazione termica dell'alcole metilico è stata pure studiata dal sig. P. De Heen, *De la dilatabilité de quelques liquides organiques et des solutions salines.* Tomo XXXI delle Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique (1880). Egli trova:

$$V = 1 + 0{,}001\,1490\,\vartheta + 0{,}000\,002\,416\,\vartheta^2$$

dove $\vartheta = -5 + T$.

TAVOLA XIX.

Alcool propilico primario C_3H_8O

F	T Naccari	D_T Naccari	$\frac{D_E}{D_T}$ Naccari
20	+ 23,63	0,80153	0,91901
60	41,89	0,78672	0,93632
160	60,52	0,77085	0,95559
260	70,76	0,76161	0,96720
360	78,08	0,75471	0,97603
460	83,85	0,74909	0,98335
560	88,67	0,74426	0,98973
660	92,83	0,73998	0,99545
760	96,49	0,73662	1
1260	110,51	0,72053	1,02233
1760	—	—	—
2260	—	—	—
2760	—	—	—
3260	—	—	—
3760	—	—	—
4260	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula:

$$\log F = 5{,}160074 - a\alpha^T$$

dove $\log a = 0{,}6606584$ $\log\alpha = \bar{1}{,}9968615$ verificata sperimentalmente da T = 59,73 a T = 101,06 ed i valori di D_T con l'altra:

$$D_T = 0{,}8203 - a\,T + b\,T^2 - c\,T^3$$

dove:
$\log a = \bar{4}{,}90228$ $\log b = \bar{7}{,}66482$ $\log c = \bar{8}{,}10469$
verificata da T = 0 a T = 94,40.

Naccari e Pagliani, Atti della r. Acc. delle scienze di Torino, vol. XVI e Nuovo Cimento, 3ª s. t. X, pag. 52 (anno 1881).

Una tavola della densità del liquido e della tensione del vapore (di 10 in 10 gradi) da zero a 98° si trova nella Memoria dei sigg. Pierre e Puchot, Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXII, pag. 276-277 (anno 1871). La dilatazione dell'alcole propilico è stata pure studiata dal sig. De Heen, *De la dilatabilité de quelques liquides organiques et des solutions salines*. Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, T. XXXI anno 1880.

TAVOLA XX.

Alcool isobutilico $C_4H_{10}O$

F	T Naccari	D_T Naccari	$\frac{D_E}{D_T}$ Naccari
20	+ 32,63	0,79119	0,91459
60	51,14	0,77615	0,93232
160	70,12	0,75970	0,95250
260	80,59	0,75009	0,96464
360	88,10	0,74292	0,97402
460	94,04	0,73707	0,98175
560	99,01	0,73205	0,98848
660	103,29	0,72763	0,99448
760	107,09	0,72362	1
1260	121,63	0,70758	1,02266

Osservazioni.— I valori di T son calcolati con la formula:

$$\log F = 5{,}037817 - a\alpha^T$$

dove: $\log a = 0{,}6771178$ $\log\alpha = \bar{1}{,}9967946$
e i valori di D_T con l'altra:

$$D_T = 0{,}81624 - AT - BT^2 - CT^3$$

dove:
$\log A = \bar{4}{,}87551$ $\log B = \bar{7}{,}43912$ $\log C = \bar{9}{,}86857$
formule dovute ai sigg. Naccari e Pagliani, la prima verificata nelle loro esperienze da 70°,7 a 113°,1 e la seconda da 0° a 102°.

Naccari e Pagliani, Nuovo Cimento, 3ª s. t. X, pag. 53, ed Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, vol. XVI.

TAVOLA XXI.

Acetone C_3H_6O

F	T Regnault	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_E}$ Kopp	V_T Thorpe	$V_T : V_E$ Thorpe
20	— 17,06	0,977704	0,900060	0.977800	0,900585
60	— 0.90	0,998788	0,919469	0,998785	0,919913
160	+ 17,48	1,024423	0,943069	1,024570	0.943662
260	28,25	1,041026	0,958353	1,040626	0,958450
360	36,12	1,052641	0,969046	1,052799	0,969662
460	42,41	1,062747	0,978319	1,062794	0,978867
560	47,69	1,071478	0,986387	1,071368	0,986764
660	52,27	1,079243	0,993535	1,078938	0,993737
760	56,32	1,086265	1	1,085738	1
1260	71,84	1,114597	1,026082	1,112695	1,024828
1760	83,04	1,136556	1,046297	1,133035	1,043562
2260	91,98	1,155062	1,063333	1,149803	1,059006
2760	99,50	1,171352	1,078329	1,164273	1,072333
3260	106,04	1,186071	1,091879	1,177126	1,084171
3760	111,86	1,199622	1,104355	1,188774	1,094899
4260	117,13	1,212272	1,116000	1,199493	1,104772

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati dietro le esperienze di Regnault con la formula:

$$\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t \qquad \text{dove } a = 5,3085419$$

$$t = T - 22 \qquad \log(b\alpha^t) = +0,5312766 - 0,0026148\,t$$

$$\log(c\gamma^t) = -0,9645222 - 0,0215592\,t$$

formula calcolata dallo Zeuner (*Théorie mécanique de la chaleur*, pag. 245) dietro le esperienze di Regnault. Le due formule che dà il Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 472 e pag. 474 sono sbagliate come osserva lo Zeuner. La formula precedente si trova verificata da T=21° a T=140°.

I valori di V sono calcolati con la formula:

$$V_T = 1 + 0,0013481\ T + 0,000002609\ T^2 + 0,0000000115592\ T^3$$

data dal Kopp (Rammelsberg, t. II, pag. 152; Fortschritte der Physik für 1850, vol. 3, pag. 28 e Landolt und Börnstein, *Physikalisch-Chemische Tabellen*. Berlin, 1884, pag. 65.

E con l'altra:

$$V_T = 1 + 0,00135293\ T + 0,00000302426\ T^2 - 0,000000000290\ T^3$$

data dal Thorpe.

Watt's, *Dictionary of Chemistey*, vol. VIII, pag. 2120 e Journal of the chemical Society, March 1880.

TAVOLA XXII.

Mercurio

F	T Regnault	V_N Regnault	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Regnault
20	+ 200,23	1,003628	0,997160
60	240,77	1,004365	0,997813
160	281,34	1,005102	0,998624
260	303,30	1,005502	0,999022
360	318,84	1,005785	0,999303
460	331,00	1,006006	0,999523
560	341,09	1,006190	0,999705
660	349,74	1,006348	0,999862
760	357,34	1,006486	1
1260	386,04	1,007009	1,000519
1760	406,39	1,007380	1,000888
2260	422,43	1,007673	1,001181
2760	435,81	1,007917	1,001421
3260	447,35	1,008128	1,001631
3760	457,56	1,008315	1,001817
4260	466,74	1,008482	1,001983

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula di Regnault:
$\log F = a + b\alpha^t + c\gamma^t$
dove: $t = T$ $\quad a = 5,6640459 \qquad b = -7,7449870 \qquad c = 0,3819711$
$\log\alpha = \bar{1},9987562 \qquad \log\gamma = \bar{1},9880938$
verificata dal Regnault da 0° a +508°.

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 520 (¹).

I volumi T_T sono calcolati dietro le esperienze di Regnault con la formula corretta dal Mendelejeff:

$$V_T = 1 + 0,0001801\ T + 0,00000002\ T^2$$

Mendelejeff, Journal de Physique, t. V, pag. 259. Il dott. O. J. Broch direttore del Bureau international des poids et mesures ha recentemente ricalcolati i valori delle costanti che entrano nella formula precedente, fondandosi sopra le esperienze di Regnault. Egli giunge alla formula:

$$V_T = 1 + 0,000181808\ T + 0,000000000175\ T^2 + 0,000000000035125\ T^3$$

dove le temperature T sono espresse in gradi centigradi secondo la vecchia definizione. Vedi Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, t. II, Paris 1883, pag. 20 delle Mémoires personnels. I valori di V_T calcolati con la formula di Broch differiscono pochissimo (pel caso nostro) da quelli calcolati con la formula Mendelejeff.

(¹) Regnault alla pag. 521 dello stesso volume dà alla temperatura di 200° per tensione del vapore di mercurio calcolata con la formula precedente il numero 19,90: invece deve dire 19,85. Lo Zeuner (opera citata più sopra) riproduce lo stesso numero del Regnault.

TAVOLA XXIII.

Formiato di etilo $C_2 H_5 . CHO_2$

F	T Naccari	D_T Naccari	$\frac{D_E}{D_T}$ Naccari	V_T Pierre	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Pierre
20	— 23,04	0,96410	0,90008	0,970906	0,897719
60	— 3,67	0,94114	0,92204	0,995175	0,920159
160	+ 16,10	0,91692	0,94639	1,022105	0,945059
260	26,66	0,90364	0,96030	1,037489	0,959283
360	34,78	0,89329	0,97143	1,049830	0,970694
460	40,93	0,88535	0,98014	1,059487	0,979923
560	46,00	0,87875	0,98755	1,067659	0,987179
660	50,42	0,87295	0,99406	1,074939	0,993910
760	54,34	0,86777	1	1,081525	1
1260	69,29	0,84775	1,02361	1,107766	1,024263

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula:

$\log F = 5{,}119465 - a\alpha^T$ dove $\log a = 0{,}5129019$ $\log \alpha = \bar{1}{,}9970019$

verificata tra $+20{,}26$ e $+60°{,}50$ dalle esperienze dei sigg. Naccari e Pagliani, Nuovo Cimento, 3ª s. t. X, pag. 57.

I valori di D_T e V_T sono calcolati con le formule $D_T = 0{,}9367 - a\,T - bT^2$ dove: $\log a = \bar{3}{,}08376$ $\log b = \bar{6}{,}01176$

data dal Naccari ecc. (Memoria citata, pag. 58) e verificata fra 0° e 51°,94

$V_T = 1 + 0{,}001325205\ T = 0{,}000002862\ T^2 + 0{,}000000006618\ T^1$

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 384 (anno 1845).

TAVOLA XXIV.

Acetato di etilo $C_2 H_5 . C_2 H_3 O_2$

F	T Naccari	D_T Naccari	$\frac{D_E}{D_T}$ Naccari	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$ Kopp	V_T Pierre	$V_T : V_E$ Pierre
20	— 3,07	0,92621	0,89392	0,996140	0,893787	0,9961505	0,901122
60	+ 15,52	0,90395	0,91593	1,020340	0,915501	1,0199014	0,922607
160	35,19	0,88040	0,94043	1,048052	0,940365	1,0462630	0,946454
260	46,38	0,86637	0,95567	1,064913	0,955494	1,0618738	0,960576
360	54,55	0,85595	0,96729	1,077919	0,967164	1,0735711	0,971157
460	61,13	0,84744	0,97701	1,088751	0,976883	1,0831832	0,979853
560	66,70	0,84017	0,98546	1,098212	0,985372	1,0914575	0,987338
660	71,57	0,83376	0,99304	1,106716	0,993002	1,0987976	0,993977
760	75,93	0,82796	1	1,114515	1	1,1054548	1
1260	93,12	0,80471	1,02889	1,147143	1,029275	1,1325177	1,024481

Osservazioni. — I valori di F sono calcolati con la formula:

$$\log F = 4{,}4291497 - a\alpha^T$$

dove: $\log a = 0{,}4833884$ $\log \alpha = \bar{1}{,}9961346$

verificata dal Naccari fra $+36{,}83$ e $+76{,}85$. Gli autori osservano che sopra 77° il liquido sembrava alterato.

Nuovo Cimento, 3ª s. t. X, pag. 56.

I valori di D_T e di V_T son calcolati con le formule:

$$D_T = 0,92266 - aT - bT^2$$

dove: $\log a = \bar{3},06495$ $\log b = \bar{6},05357$

Naccari ecc. ibidem.

$$V_T = 1 + 0,0012738\ T + 0,0000021914\ T^2 + 0,000000011797\ T^3$$

formula data dal Kopp, Fortschritte der Physik für 1847, Bd. III, s. 29; Rammelsberg, Bd. II, s. 155:

$$V_T = 1 + 0,001258495886\ T + 0,000002956880\ T^2 + 0,000000001492150\ T^3.$$

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XIX, pag. 208.

Tavola XXV.

Propionato d'etilo $C_2 H_5 . C_3 H_5 O_2$

F	T Naccari	D_T Naccari	$\frac{D_E}{D_T}$ Naccari
20	+ 13,59	0,89576	0,88638
60	34,60	0,87178	0,91076
160	56,33	0,84635	0,93813
260	68,44	0,83189	0,95444
360	77,15	0,82136	0,96667
460	84,08	0,81291	0,97672
560	89,88	0,80579	0,98535
660	94,22	0,79956	0,99303
760	99,39	0,79399	1
1260	116,64	0,77227	1,02812

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati con la formula:

$$\log F = 4,839293 - a\alpha^T$$

dove $\log a = 0,5894836$ $\log \alpha = \bar{1},9970062$ data dal Naccari (Memoria citata, pag. 55) e verificata fra +49,53 e 105,34.

I valori di D_T sono calcolati con la formula:

$$D_T = 0,91089 - aT - bT^2$$

dove: $\log a = \bar{3},04370$ $\log b = \bar{7},84998$

verificata da T = 0 a T = 92°,96: Naccari ecc. (ibidem).

Tavola XXVI.

Propionato d'etilo $C_2 H_5 . C_3 H_5 O_2$

F	T Schumann	V_T Kopp	$V_T : V_E$ Kopp
—	—	—	—
60	+ 34,9	1.0462429	0,911507
160	55,0	1,0751635	0,936703
260	67,6	1,0946276	0,953661
360	76,1	1,1084669	0,965718
460	82,9	1,1200997	0,975852
560	88,7	1,1301876	0,984641
660	93,8	1,1394295	0,992693
760	98,3	1,1478164	1
1260	115,6	1,1822612	1,030009

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti graficamente dalla tavola che dà lo Schumann per la tensione dei vapori del propionato di etile.

Schumann, *Ueber Dampfspannung homologer Ester.* Ann. der Physik und Chemie (1881) Bd. XII, s. 48.

I valori di V_T della formula:

$$V_T = 1 + 0,0012860\ T + 0,00000051386\ T^2 + 0,000000017305\ T^3$$

Kopp, Fortschritte der Physik, Bd. XI, s. 44.

Anche nelle Memorie del Pierre e Puchot (Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXII, pag. 351) è una tavola delle densità del propionato di etilo procedente di dieci in dieci gradi da zero a 100 gradi.

Il De Heen (Mém. cour. par l'Académie Royale de Belgique, T. XXXI, 1880) trova per esprimere il volume del propionato etilico:

$$V_\vartheta = 1 + 0{,}001\,229\,1\,\vartheta + 0{,}000\,002\,850\,\vartheta^2$$

dove $\vartheta = T - 15°$.

Tavola XXVII.

Ossalato di metilo $(CH_3)_2 . C_2O_4$

F	T Regnault	V_T Kopp	$V_T : V\varepsilon$ Kopp
20	—	—	—
60	+ 93,49	1,0504109	0,919970
160	117,11	1,0794168	0,945374
260	130,13	1,0964472	0,960289
360	139,49	1,1090160	0,971297
460	146,83	1,1190630	0,980097
560	152,98	1,1275070	0,987492
660	158,30	1,1350987	0,994141
760	163.00	1.1417878	1
1260	180,99	1,1680228	1,022977
1760	194,02	1,1876557	1,040172
2260	204,46	1,2037708	1.054286
2760	213,29	1,2176626	1,066452
3260	221,01	1,2300065	1,077263
3760	227,91	1,2423426	1,088943
4260	234,19	1,2515094	1,096096

Osservazioni.— I valori di T son calcolati con la formula:

$$\log F = a + b\alpha^t$$

dove:

$a = 5{,}0794019$ $b = -2{,}997335$ $\log\alpha = \bar{1}{,}9974606$

$t = T - 110$ (verificata da $T = 110°$ a $T = 250°$).

Regnault, Mémoires ecc. t. XXVI, pag. 486: la formula è a pag. 654.

$$V_T = 1 + 0{,}001079\,\delta + 0{,}000001554\,\delta^2$$

dove $\delta = T - 50$.

Il punto di fusione dell'etere metilossalico era appunto $+50°$ e Kopp assume come unità il volume del liquido al punto di fusione.

Kopp, Fortschritte der Physik, Bd. XI, s. 44 (1855).

Tavola XXVIII.

Formiato di metilo $CH_3 . CHO_2$

F	T Schumann	V_T Kopp	$V_T : V\varepsilon$ Kopp
20	—	—	—
60	— 23,0	0,9680207	0.923184
160	— 1,1	0,9984561	0,952209
260	+ 6,5	1,0092206	0,962475
360	13.5	1,0193994	0,972183
460	19,5	1,0283990	0,980765
560	24,2	1,0356675	0,987698
660	28,4	1,0423503	0,994071
760	32,2	1,0485673	1
1260	46,3	1,0733072	1,023593

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti graficamente dalla tavola dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881. Bd. XII, s. 46.

I valori di V_T con la formula del Kopp

$$V_T = 1 + 0{,}0014055\ T + 0{,}0000017131\ T^2 + 0{,}000000045947\ T^3$$

verificata da zero a $+39°$.

Kopp, Pogg. Ann. Bd. 72, s. 1-223; Fortschritte des Physik, Bd. III, s. 28 (Berlin, 1850).

Tavola XXIX.

Formiato d'etilo $C_2H_5.CHO_2$

F	T Schumann	V_T Kopp	$V_T : V_\varepsilon$ Kopp	V_T Pierre	$V_T : V_\varepsilon$ Pierre
20	—	—	—	—	—
60	— 4,3	0,9941381	0,919808	0,9943541	0,919312
160	+ 15,2	1,0209539	0,944618	1,0208276	0,943788
260	26,6	1,0372179	0,959666	1,0374002	0,959110
360	34,5	1,0489381	0,970511	1,0493982	0,970202
460	40,6	1,0583116	0,979183	1,0589645	0,979047
560	45,8	1,0665621	0,986817	1,0673346	0,986785
660	50,8	1,0740838	0,993776	1,0749086	0,993788
760	54,4	1,0808104	1	1,0816276	1
1260	69,6	1,1081795	1,025322	1,1083317	1,024688

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti graficamente dalla tavola dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, s. 47.

I valori di V_T dalle formule seguenti:

$$V_T = 1 + 0,00136446\ T + 0,00000042502\ T^2 + 0,000000033084\ T^3$$

data dal Kopp, vedi Rammelsberg, *Handbuch der Krist. Physik. Chemie* Bd. II, s. 155: nei Fortschritte der Physik, Bd. III, s. 28 è una formula leggermente diversa.

$$V_T = 1 + 0,001325204737\ T + 0,000002862485\ T^2 + 0,000000006618\ T^3.$$

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 384.

Tavola XXX.

Formiato di propilo $C_3H_7.CHO_2$

F	T Schumann	D_T Pierre e Puchot	$D_E : D_T$
20	—	—	—
60	+ 19,6	0,8980	0,91938
160	39,4	0,8757	0,94279
260	51,5	0,8615	0,95833
360	59,7	0,8517	0,96936
460	66,2	0,8437	0,97854
560	71,9	0,8367	0,98673
660	76,7	0,8308	0,99374
760	81,0	0,8256	1

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti graficamente dalla tavola dello Schumann. Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, s. 47.

I valori di D_T sono calcolati con interpolazioni della tavola di Pierre e Puchot che dà le densità del formiato di propilo di dieci in dieci gradi dal 0 all'ebullizione.

Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXII, pag. 287.

Il De Heen (Mémoires couronnés et par l'Académie Royale de Belgique, T. XXXI, 1880) trova:

$$V_\vartheta = 1 + 0,001\,229\,\vartheta + 0,000\,002\,870\,\vartheta^2$$

dove $\vartheta = T - 15°$.

TAVOLA XXXI.

Acetato di metilo $CH_3 . C_2 H_3 O_2$

F	T Schumann	V_T Kopp	$V_T : V\varepsilon$ Kopp	V_T Pierre	$V_T : V\varepsilon$ Pierre
20	— 11,7	1,9855831	0,906515	0,9852289	0,908179
60	+ 0,95	10,012175	0,920895	1,0012285	0,922836
160	19,1	10,258730	0,943573	1,0258437	0,945524
260	29,4	10,410743	0,957739	1,0407243	0,959239
360	37,1	10,530287	0,968551	1,0523023	0,969911
460	43,3	10,630288	0,977766	1,0619159	0,978771
560	48,6	10,718469	0,985879	1,0703448	0,9865[illegible]1
660	53,1	10,795304	0,993570	1,0776570	0,993[illegible]80
760	57,5	10,872211	1	1,0849472	1
1260	72.0	1,1138285	1,024472	1,1099822	1,023074

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti graficamente dalla tavola dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, s. 47.

I valori di V_T dalle formule seguenti:

$$V_T = 1 + 0,0012779\ T + 0,0000039471\ T^2 + 0,000000003639\ T^3$$

verificata dal Kopp fra 0° e 62°,3.

Kopp, Pogg. Ann. Bd. 72, s. 1 e 223; Rammelsberg, Bd. II, s. 349.

$$V_T = 1 + 0,001295954262\ T + 0,000002909820\ T^2 + 0,000000004257\ T^3$$

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XV, pag. 387.

TAVOLA XXXII.

Acetato di propilo $C_3 H_7 . C_2 H_3 O_2$

F	T Schumann	D_T Pierre e Puchot	$D_E : D_T$
20	+ 15,6	0,8928	0,88822
60	34,8	0,8712	0,91023
160	57,5	0,8455	0,93791
260	69,8	0,8307	0,95462
360	78,4	0,8204	0,96650
460	85,3	0,8121	0,97648
560	91,2	0,8051	0,98497
660	96,2	0,7987	0,99286
760	100,8	0,7930	1

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati graficamente dalla tavola dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, Bd. XII, s. 47.

I valori D_T sono dedotti con interpolazioni dalla tavola del Pierre e Puchot, che dà la densità di 10 in 10 gradi da zero sino al punto di ebullizione: Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXII, pag. 289-290.

Il De Heen (Mémoires couronnés et par la R. Académie de Belgique, T. XXI, 1880) trova:

$$V_\vartheta = 1 + 0,001\,194\,\vartheta + 0,000\,003\,222\,\vartheta^2$$

dove $\vartheta = T - 15°$.

TAVOLA XXXIII.

Propionato di propilo $C_3 H_7 . C_3 H_5 O_2$

F	T Schumann	D_T Pierre e	$D_E : D_T$ Puchot
20	—	—	—
60	+ 53,8	0,8480	0,90342
160	76,1	0,8233	0,93052
260	88,8	0,8084	0,94767
360	98,3	0,7970	0,96123
460	105,7	0,7876	0,97270
560	111,9	0,7796	0,98268
660	117,4	0,7724	0,99184
760	122,2	0,7661	1

Osservazioni. — I valori di T sono calcolati graficamente per mezzo della tavola dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, s. 48.

I valori di D_T sono dedotti con interpolazioni dalla tavola dei sigg. Pierre e Puchot, Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXII, pag. 289-290.

Il sig. De Heen trova la formula:

$$V = 1 + 0{,}001\,169\,5\,\vartheta + 0{,}000\,002\,281\,\vartheta^2$$

dove $\vartheta = -15 + T$ (Tome XXXI Mémoires couronnés et par l'Académie Royale de Belgique, 1880).

TAVOLA XXXIV.

Butirrato di metilo $CH_3 . C_4 H_7 O_2$

F	T Schumann	V_T Kopp	$V_T : V_E$ Kopp	V_T Pierre	$V_T : V_E$ Pierre
20	—	—	—	—	—
60	+ 39,0	1,0499667	0,911600	1,0500831	0,915199
160	58,2	1,0776564	0,935641	1,0768581	0,938535
260	70,5	1,0967350	0,952206	1,0951023	0,954436
360	79,6	1,1116013	0,965113	1,1092521	0,966768
460	86,8	1,1238496	0,975747	1,1208842	0,976906
560	92,6	1,1340446	0,984598	1,1305569	0,985337
660	97,7	1,1432609	0,992600	1,1392983	0,992955
760	102,3	1,1517833	1	1,1473811	1
1260	119,8	1,1861203	1,029812	1,1799894	1,028419

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti graficamente dalla tavola dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, pag. 48.

Quelli di V_T dalle formule seguenti:

$$V_T = 1 + 0{,}00119565\ T + 0{,}0000018103\ T^2 + 0{,}0000000098292\ T^3$$

verificata fra 6°,9 e 94,6 dal Kopp, Pogg. Ann. Bd. 720 s. 1 und 223; Fortschritte der Physik, Bd. III, s. 29; Rammelsberg, Bd. II, s. 349.

$$V_T = 1 + 0{,}001239896\ T + 0{,}00000062602\ T^2 + 0{,}000000013066\ T^3.$$

Pierre, Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XIX, pag. 213.

TAVOLA XXXV.

Butirrato di etilo $C_2 H_5 . C_4 H_7 O_2$

F	T Schumann	V_T Kopp	$V_T : V\varepsilon$ Kopp
20	—	—	—
60	+ 50,2	1,0641545	0,903539
160	73,5	1,0981988	0,932445
260	86,5	1,1187598	0,949903
360	96,1	1,1347584	0,963487
460	103,5	1,1475995	0,974390
560	109,8	1,1589001	0,983985
660	114,8	1,1681200	0,991813
760	119,9	1,1777615	1
1260	138,2	1,2144442	1,031146

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti graficamente dallo Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, s. 49

Quelli di V_T dalle formule seguenti:

$$V_T = 1 + 0,00117817\ T + 0,0000013093\ T^2 + 0,00000000956\ T^3$$

verificata da $+12^\circ$ a $+110^\circ,1$ dal Kopp, Pogg. Ann. Bd. 72, s. 1-223; Fortschritte der Physik, Bd III, s. 29; Rammelsberg, II, s. 155.

Il Pierre (Ann. de Chim. et de Phys. 3ª s. t. XIX) dà una formula che conduce a risultati assai diversi.

Una tavola delle densità di questo composto, procedente di dieci in dieci gradi da zero fino a +113 si trova nella Memoria dei sigg. Pierre e Puchot, Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXVIII, pag. 377.

TAVOLA XXXVI.

Butirrato di propilo $C_3 H_7 . C_4 H_7 O_2$

F	T Schumann	D_T Pierre e Puchot	$D_E : D_T$
20	—	—	—
60	+ 70,5	0,8160	0,90171
160	94,4	0,7907	0,93056
260	108,6	0,7750	0,94942
360	117,6	0,7648	0,96208
460	125,4	0,7561	0,97315
560	132,0	0,7486	0,98290
660	137,5	0,7420	0,99164
760	142,5	0,7358	1

Osservazioni — I valori di T sono dedotti dalla curva costruita coi dati della tavola dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie (1881) Bd. XII, s. 49.

I valori di D_T son calcolati con interpolazioni dalla tavola di Pierre e Puchot, Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXII, pag. 295.

TAVOLA XXXVII.

Butirrato di amilo $C_5 H_{11} . C_4 H_7 O_2$

F	T Schumann	D_T Pierre e Puchot	$D_E : D_T$
20	—	—	—
60	+ 99,1	0,7845	0,89738
160	126,2	0,7583	0,92839
260	141,2	0,7433	0,94712
360	151,7	0,7322	0,96148
460	160,1	0,7234	0,97318
560	167,1	0,7161	0,98310
660	172,9	0,7101	0,99141
760	178,6	0,7040	1

Osservazioni. — I valori di T son dedotti dalla curva costruita coi dati della tavola di Schumann (loco citato) pag. 49.

I valori di D_T sono calcolati con interpolazioni alla tavola di Pierre e Puchot, Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. XXII, pag. 295.

TAVOLA XXXVIII.

Valerianato di metilo $CH_3 . C_5 H_9 O_2$

F	T Schumann	V_T Kopp	$V_T : V_\varepsilon$ Kopp
20	—	—	—
60	+ 49,3	1,0601176	0,911248
160	71,2	1,0905824	0,937435
260	84,5	1,1104442	0,954508
360	93,3	1,1242013	0,966333
460	100,4	1,1356773	0,976197
560	106,7	1,1461501	0,985200
660	111,7	1,1546686	0,992522
760	116,7	1,1633679	1
1260	134,9	1,1966521	1,028610

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla curva costruita sopra i resultati delle esperienze dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, s. 50.

I valori di V_T dalla formula seguente:

$$V_T = 1 + 0,00112115\ T + 0,0000017044\ T^2 + 0,0000000058627\ T^3$$

verificata da 5°,5 fino a 104°,1 da Kopp, Pogg. Ann. Bd. 72, s. 1-223; Fortschritte der Physik, Bd. III, s. 29.

Una tavola delle densità da 0° a 117°,5 è data dal Pierre e Puchot (Memoria sopra citata, pag. 350).

Tavola XXXIX.

Valerianato di etilo $C_2 H_5 . C_5 H_9 O_2$

F	T Schumann	D_T Pierre e Puchot	$D_E : D_T$
20	—	—	—
60	+ 64,2	0,8234	0,90514
160	86,9	0,7974	0,93466
260	99,7	0,7813	0,95028
360	109,2	0,7737	0,96329
460	117,3	0,7617	0,97463
560	123,6	0,7574	0,98402
660	129,3	0,7504	0,99320
760	134,3	0,7453	1

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla curva costruita sui risultati delle esperienze dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XII, s. 50.

I valori di D_T sono calcolati con interpolazioni dalla tavola dei sigg. Pierre e Puchot. Ann. de Chim. et de Phys. 4. s. t. XXII, pag. 354.

Tavola XL.

Valerianato di propilo $C_3 H_7 . C_5 H_9 O_2$

F	F Schumann	D_T Pierre e Puchot	$D_E : D_T$
20	—	—	—
60	+ 82.4	0,8080	0,89913
160	106.3	0,7841	0,92654
260	120.3	0,7681	0,94584
360	130,3	0,7561	0,96085
460	138.2	0,7471	0,97510
560	144,9	0,7396	0,98228
660	150,8	0,7319	0,99262
760	155,9	0,7265	1

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalla curva costruita sui resultati delle esperienze dello Schumann, Ann. der Physik und Chemie, 1881, Bd. XXII, s. 50.

I valori di D_T sono calcolati con interpolazioni dalla tavola data dal Pierre e Puchot, Memoria citata, pag. 297.

TAVOLA XLI.

Acido formico CH_2O_2

F	T Landolt	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Kopp
20	+11,4	1,011144	0,909625
60	33,1	1,033878	0,929984
160	55,1	1,058239	0,951897
260	67,9	1,072152	0,964412
360	77,0	1,083144	0,974299
460	84,1	1,091454	0,981774
560	90,1	1,099204	0,988745
660	95,23	1,105443	0,994358
760	99,9	1,1117154	1
960	—	—	—
1160	—	—	—
1260	—	—	—

Osservazioni. — I valori di T corrispondenti alle tensioni 20, 60, 160, 360, 560, 760, 960, 1160 sono presi tali e quali dalla tavola che dà il Landolt, Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1868, s. 34-35, Giessen 1870 [1].

I valori di T corrispondenti alle altre tensioni sono calcolati con interpolazioni da una tabella inserita nell'opera *Physikalisch-Chemische Tabellen* del Landolt e Börnstein, Berlin 1883, pag. 25. In questa tabella sono calcolate di 5 in 5 gradi le tensioni massime dei vapori degli acidi formico, acetico, propionico, butirrico, isovalerianico.

I valori di V_T sono calcolati con la formula:

$$V_T = 1 + 0{,}00099269\ T + 0{,}00000062514\ T^2 + 0{,}000000005965\ T^3.$$

Kopp, Fortschritte der Physik, Bd. III, s. 28.

TAVOLA XLII.

Acido acetico $C_2H_4O_2$

F	T Landolt	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Kopp
20	+21,2	1,022583	0,893608
60	47,6	1,0517697	0,919113
160	73,2	1,0821388	0,945652
260	86,7	1,099305	0,960653
360	96,2	1,111967	0,971718
460	103,5	1,122055	0,980534
560	109,4	1,130459	0,987843
660	114,7	1,138203	0,994645
760	118,8	1,1443301	1
960	126,3	1,155854	1,010070
1160	132,4	1,165545	1,018538
1260	136,3	1,111895	1,024088

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalle tavole del Landolt, Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1868, s. 34-35, Giessen 1870, e dall'opera del Landolt e Börnstein, *Physikalisch-Chemische Tabellen*, Berlin 1883, pag. 25.

I valori di V_T dalla formula:

$$V_T = 1 + 0{,}00105703\ T + 0{,}00000018323\ T^2 + 0{,}0000000096435\ T^3.$$

Kopp, Fortschritte der Physik, Bd. III, s. 28.

[1] La Memoria del Landolt mi fu favorita dal gentilissimo amico mio e collega comm. prof. E. Bechi accademico della Crusca: e lo ringrazio tanto più, che in Firenze mi sarebbe stato altrimenti impossibile di leggere questo scritto importante.

Tavola XLIII.

Acido propionico $C_3 H_6 O_2$

F	T Landolt	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Kopp
20	+ 40,9	1,045844	0,889161
60	68.8	1,079006	0,917355
160	95,0	1.112481	0,945815
260	108,4	1.130725	0.961326
360	117.5	1,143620	0,972288
460	124.9	1.154429	0,981478
560	130.2	1.162363	0,988223
660	135.4	1,170295	0.9948[illegible]2
760	139.2	1.1762144	1
960	146.3	1.187497	1.009593
1160	152,0	1,196797	1,017498
1260	155.3	1.202279	1,022160

Osservazioni. — I valori di T sono dedotti dalle tavole del Landolt, Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1868, s. 34-35, Giessen 1870 e dall'opera del Landolt e Börnstein, *Physikalisch-Chemische Tabellen*, Berlin 1883, pag. 25.

I valori di V_T dalla formula:

$$V_T = 1 + 0,0011003\ T + 0,00000021816\ T^2 + 0,0000000069796\ T^3.$$

Kopp, Fortschritte der Physik, Bd. 11, s. 43.

Tavola XLIV.

Acido butirrico (normale) $C_4 H_8 O_3$

F	T Landolt	V_T Kopp	$\frac{V_T}{V_\varepsilon}$ Kopp
20	+ 49.4	1,053702	0,874230
60	82.3	1,0929245	0,906772
160	112.2	1.132108	0,939282
260	127,4	1.153608	0,957119
360	137,4	1.168411	0,969402
460	145.6	1.180964	0,979816
560	151.1	1.189605	0.986985
660	157.0	1,199075	0,994842
760	160,8	1.205291	1
960	168.4	1,217997	1,010023
1160	174.5	1.228471	1.018708
1260	177,8	1.234241	1,024019

Osservazioni. — I valori di T sono presi o dedotti dalle tavole del Landolt, vedi opere sopra citate.

Quelli di V_T sono dedotti dalla formula:

$$V_T = 1 + 0,0010461\ T + 0,00000056244\ T^2 + 0,0000000054201\ T^3$$

data dal Kopp, Fortschritte der Physik, Bd. III, s. 28.

Una tavola delle densità dell'acido butirrico, procedente di cinque in cinque gradi da zero fino a 155° è data dai sigg. Pierre e Puchot, Ann. de Chim. et de Phys. 4ª s. t. 28, pag. 373.

Tavola XLV.

Acido isovalerianico $C_5 H_{10} O_2$

F	T	V_T	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$	V_T	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$	V_T	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$	V_T	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$	V_T	$\frac{V_T}{V\varepsilon}$
	Landolt	Kopp	Kopp	Erlenmeyer Formula (I)		Erlenmeyer Formula (II)		Erlenmeyer Formula (III)		Erlenmeyer Formula (IV)	
20	+ 56,1	1,060981	0,860886	1,056872	0,872643	1,056661	0,873301	1,056951	0,871098	1,058246	0,867288
60	91,1	1,1036611	0,895517	1,097032	0,905802	1,096880	0,906541	1,097483	0,904503	1,100419	0,901852
160	122,7	1,1473907	0,930999	1,137155	0,938931	1,136914	0,939636	1,138141	0,938012	1,142721	0,936520
260	138,9	1,172240	0,951163	1,159333	0,957243	1,158936	0,957828	1,160669	0,956579	1,166057	0,955645
360	148,8	1,1883665	0,964247	1,173468	0,968914	1,172922	0,969387	1,175042	0,968424	1,180888	0,967800
460	157,8	1,203690	0,976681	1,186725	0,979860	1,185998	0,980194	1,188525	0,979536	1,194759	0,979168
560	163,6	1,2139208	0,984982	1,195475	0,987085	1,194609	0,987311	1,197430	0,986876	1,203994	0,986737
660	169,8	1,225174	0,994114	1,205014	0,994961	1,203980	0,995053	1,207142	0,994863	1,213833	0,994801
760	173,7	1,2324285	1	1,211116	1	1,209962	1	1,213354	1	1,220177	1
960	181,4	1,2471573	1,011139	1,223392	1,010136	1,221977	1,009930	1,225860	1,010307	1,232918	1,010442
1160	187,7	1,2596242	1,022066	1,233671	1,018623	1,232011	1,018222	1,236333	1,018938	1,243551	1,019156
1260	191,8	1,267944	1,028817	1,240475	1,024241	1,238641	1,023702	1,243267	1,024653	1,250573	1,024911

Osservazioni. — I valori di T sono presi o dedotti dalla tavola del Landolt, (vedi opere sopra citate).

I valori di V_T sono calcolati con le formule seguenti:

Nella terza colonna con la formula:

$$V_T = 1 + 0,0010476\ T + 0,00000024001\ T^2 + 0,0000000082466\ T^3.$$

verificata dal Kopp fra 16° e 161°: Kopp, Fortschritte der Physik, Bd. XI, s. 43; Rammelsberg, Bd. II, pag. 501.

Nelle successive colonne sono i valori di V_T calcolati con le formule trovate dai sigg. Erlenmeyer ed Hell, per l'acido isovalerianico preparato con metodi diversi.

Vedi: Fortschritte der Physik, Bd. 28, s. 510-511 e Wurtz, *Dict. de Chimie*, t. III, pag. 602.

Formula I. Dal cianuro d'isobutile.

$$V_T = 1 + 0,0009467\ T + 0,0000010276\ T^2 + 0,00000000299\ T^3.$$

Formula II. Dalla radice di valeriana:

$$V_T = 1 + 0,00093451\ T + 0,000001235\ T^2 + 0,00000000198\ T^3.$$

Formula III. Dall'alcool amilico otticamente inattivo:

$$V_T = 1 + 0,00094228\ T + 0,0000011342\ T^3 + 0,00000000295\ T^3.$$

Formula IV. Dall'alcool amilico otticamente attivo:

$$V_T = 1 + 0,00094311\ T + 0,0000016147\ T^2 + 0,000000001458\ T^3.$$

Alcuni coefficienti riportati nel dizionario del Wurtz sono per la II e III formula diversi da quelli dati nei Fortschritte. Ho accettati i coefficienti che sono nei Fortschritte, correggendo però l'errore che quivi fa negativo il coefficiente di T^3 nella IV formula.

Tavola XLVI.

Ioduro di propilo (normale) $C_3 H_7 I$

F	T Brownn	D_T Brownn	$\frac{D_\varepsilon}{D_T}$
200	+ 62,37	1,66704	0,95180
300	73,51	1,64493	0,96460
400	81,95	1,62808	0,97458
500	88,84	1,61446	0,98280
600	94,70	1,60250	0,99014
700	99,83	1,59221	0,99654
760	102,63	1,58670	1

Osservazioni. — I valori di T e di D_T sono presi dalla Memoria del sig. J. D. Brownn, Proc. Roy. Soc. XXVI, pag. 238-247 e Beiblätter zu den Ann. der Physik, Bd. I, s. 507; Fortschritte der Physik für 1877, s. 137.

Tavola XLVII.

Ioduro di isopropilo $C_3 H_7 I$

F	T Brownn	D_T Brownn	$\frac{D_E}{D_T}$
200	+ 50,50	1,64590	0,95082
300	61,33	1,62359	0,96389
400	69,70	1,60646	0,97479
500	76,44	1,59246	0,98273
600	82,11	1,58068	0,99006
700	87,13	1,57035	0,99657
760	89,89	1,56497	1

Osservazioni. — I valori di T e di D_T sono presi dalla Memoria del sig. J. D. Brownn sopra citata.

Oltre questi lavori sugli isomeri: vedi le Memorie dei sigg. Hahn, Chem. Ber. XV, pag. 1736-1738 (1878); W. Staedel, Chem. Ber. XV, pag. 2559-2572 (1882) ecc., E. Thorpe, Journal of the chem. Soc. March 1880 e di diversi altri, le quali, come meno importanti, ed anche per non rendere di troppo lunga questa Memoria, tralascieremo.

Tavola XLVIII.

		20	60	160	260	360	460	560	660	760	1260	1[illegible]
Aq ua	H_2O	96,08	96,67	97,57	98,18	98,66	99,06	99,41	99,72	100	101,16	1[illegible]
Alcool etilico.	C_2H_6O	91,98	93,66	95,67	96,85	97,72	98,42	99,01	99,53	100	101,83	1[illegible]
Idem.'	—	92,09	93,81	95,75	96,88	97,73	98,42	99,01	99,53	100	101,89	1[illegible]
Idem.	—	92,13	93,97	95,91	97,06	97,88	98,53	99,09	99,57	100	101,66	1[illegible]
Etere etilico	$C_4H_{10}O$	90,93	92,33	94,47	95,88	96,97	97,88	98,66	99,37	100	102,58	1[illegible]
Idem.	—	89,15	91,57	94,17	95,69	96,84	97,79	98,61	99,34	100	102,72	1[illegible]
Idem.	—	88,72	91,40	94,03	95,68	96,81	97,79	98,61	99,34	100	102,73	1[illegible]
Solfuro di carbonio	CS_2	90,89	92,86	95,10	96,41	97,39	98,18	98,86	99,46	100	102,13	1[illegible]
Idem.	—	90,88	92,91	95,10	96,39	97,35	98,15	98,83	99,44	100	102,27	1[illegible]
Idem.	—	90,84	93,14	95,12	96,41	97,38	98,17	98,85	99,45	100	102,22	1[illegible]
Tetracloruro di carbonio .	$C Ch_4$	90,09	92,16	94,50	95,94	97,02	97,92	98,69	99,38	100	102,52	1[illegible]
Idem.	—	89,70	91,90	94,34	95,81	96,92	97,84	98,64	99,35	100	102,65	1[illegible]
Idem.	—	89,77	91,97	94,41	95,87	96,98	97,88	98,66	99,36	100	102,60	1[illegible]
Cloroformio.	$C H Ch_3$	90,06	91,91	94,15	95,60	96,74	97,69	98,57	99,30	100	102,92	1[illegible]
Idem.	—	90,18	92,36	94,73	96,13	97,18	98,04	98,77	99,42	100	102,33	1[illegible]
Cloruro di etilo	C_2H_5Ch	90,40	92,40	94,75	96,15	97,19	98,04	98,76	99,41	100	102,38	1[illegible]
Idem.	—	90,14	92,18	94,58	96,02	97,10	97,98	98,73	99,40	100	102,39	1[illegible]
Bromuro di etilo.	C_2H_5Br	90,23	92,36	94,74	96,14	97,19	98,04	98,77	99,42	100	102,34	1[illegible]
Ioduro di etilo	C_2H_5I	88,92	91,95	94,35	95,80	96,93	97,84	98,63	99,43	100	102,69	1[illegible]
Bromuro di etilene	—	90,07	92,31	94,73	96,14	97,19	98,04	98,78	99,42	100	102,32	1[illegible]
Cloruro di silicio.	$Si Ch_4$	89,02	90,36	93,78	95,31	96,50	97,51	98,41	99,24	100	103,36	1[illegible]
Cloruro fosforoso.	$Ph Ch_3$	90,08	92,28	94,68	96,08	97,14	98,00	98,74	99,40	100	102,42	1[illegible]
Anidride solforosa	SO_2	—	—	—	—	97,13	98,00	98,75	99,42	100	102,34	1[illegible]
Idem.	—	—	—	—	—	97,24	98,10	98,83	99,45	100	102,17	1[illegible]
Idem.	—	—	—	—	—	97,35	98,13	98,82	99,45	100	102,05	
Ammoniaca.	$Az H_3$	93,45	94,74	96,28	97,24	97,97	98,58	99,11	99,59	100	101,74	1[illegible]
Benzolo	C_6H_6	89,88	91,93	94,43	95,92	96,94	97,94	98,71	99,39	100	102,41	1[illegible]
Idem.	—	89,92	91,98	94,46	95,93	97,03	97,93	98,70	99,38	100	102,48	1[illegible]
Idem.	—	85,85	87,91	90,08	91,78	93,44	95,09	96,72	98,36	100	—	
Toluene	$C_6H_5.CH_3$	89,98	91,99	94,42	95,90	97,02	97,92	98,69	99,38	100	102,40	
Idem.	—	89,77	91,92	94,36	95,85	96,90	97,90	98,68	99,38	100	102,46	
Essenza di trementina. . .	$C_{10}H_{16}$	89,02	91,41	94,02	95,65	96,73	97,70	98,54	99,30	100	102,97	
Idem.	—	89,65	92,07	94,63	96,09	97,17	98,03	98,77	99,42	100	102,29	
Idem.	—	89,93	92,17	94,59	96,02	97,08	97,96	98,77	99,39	100	102,50	
Alcool metilico.	CH_4O	91,76	93,62	95,62	96,78	97,65	98,36	98,97	99,51	100	101,99	1[illegible]
Idem.	—	90,34	92,27	94,39	95,28	97,47	98,31	98,94	99,50	100	101,97	1[illegible]
Alcool propilico (primario)	C_3H_8O	91,90	93,63	95,56	96,72	97,60	98,33	98,97	99,51	100	102,23	
Alcool isobutilico	$C_4H_{10}O$	91,46	93,23	95,25	96,46	97,40	98,17	98,85	99,45	100	102,27	
Acetone	C_3H_6O	90,00	91,95	91,31	95,81	96,90	97,83	98,64	99,35	100	102,61	1[illegible]
Idem.	—	90,06	91,99	94,37	95,84	96,97	97,89	98,68	99,37	100	102,48	1[illegible]

60	2760	3260	3760	4260	5260	6260	7260	8260	9260	10260	Per la tensione del vapore	Per la dilatazione
2.85	103,54	104,16	104,72	105,24	106,28	107,03	107,81	108,53	109,19	109,82	Regnault	Rossetti, Hirn
4.48	105,57	106,57	107,52	108,42	110,14	111,79	113,39	114,96	116,52	118,08	Regnault	Hirn
4,57	105,64	106,62	107,51	108,35	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
3,91	104,76	105,52	106,29	106,82	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
6,36	107,97	109,39	110,76	112,07	114,55	116,90	119,15	121,32	123,43	125,48	Regnault	Hirn
6,74	108,41	109,94	111,36	112,71	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
6,81	108,53	110,12	111,61	113,03	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
5.17	106,39	107,52	108,53	109,50	111,29	112,95	114,53	116,04	117,51	118,93	Regnault	Hirn
5.62	107,00	108,28	109,47	110,60	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
5.46	106,79	108,01	109,15	110,23	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
6.18	107,68	109,06	110,34	111,55	113,81	115,93	117,93	119,85	121,70	123,49	Regnault	Hirn
6,55	108,15	109,62	110,97	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
6.41	107,98	109,40	110,73	111,97	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
7,38	109,23	110,96	112,58	114,12	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
5,65	106,98	108,18	109,29	110,33	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
5,81	107,21	108,46	109,66	110,76	—	—	—	—	—	—	Regnault	Drion
5,74	107,08	108,28	109,39	110,42	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
5.67	107,02	108,24	109,37	110,43	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
6,76	108,48	110,10	111,64	113,11	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
5,60	106,91	108,10	109,24	110,22	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
8.81	111,32	113,75	116,11	118,49	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
5,95	107,41	108,75	110,00	111,20	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
5,55	106.81	107,92	108,92	109,86	—	—	—	—	—	—	Regnault	Andreeff
5,14	106,35	107,44	108,44	109,36	—	—	—	—	—	—	Regnault	Drion
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
4,26	105.28	106,21	107,03	107,79	—	—	—	—	—	—	Regnault	Andreeff
5,76	107,08	108,26	109,34	110,33	—	—	—	—	—	—	Regnault	Louguinine
6,02	107,46	108,77	109,99	111,12	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Paternò e Pisati
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Louguinine
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Hirn
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Frankenheim
4,83	105,99	107,04	108,01	108,92	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
4,67	105,72	106.66	107,51	108,29	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
6,33	107,83	109,19	110,13	111,60	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
5,90	107,23	108,12	109,49	110,48	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe

Tavola XLVIII.

		20	60	160	260	360	460	560	660	760	1260
Mercurio.	Hg	99,72	99,78	99,86	99,90	99,93	99,95	99,97	99,99	100	100,05
Formiato d'etilo	$C_2H_5.CHO_2$	90,01	92,20	94,64	96,03	97,14	98,01	98,76	99,41	100	102,36
Idem.	—	89,77	92,01	94,51	95,93	97,07	97,96	98,72	99,39	100	102,43
Acetato d'etilo	$C_2H_5.C_2H_3O_2$	89,39	91,59	94,04	95,57	96,73	97,70	98,55	99,30	100	102,89
Idem.	—	89,38	91,55	94,04	95,55	96,72	97,69	98,54	99,30	100	102,93
Idem.	—	90,11	92,26	94,64	96,06	97,11	97,99	98,73	99,40	100	102,45
Propionato d'etilo	$C_2H_5.C_3H_5O_2$	88,64	91,08	93,81	95,44	96,67	97,67	98,53	99,30	100	102,81
Idem.	—	—	91,15	93,67	95,37	96,57	97,58	98,46	99,27	100	103,00
Ossalato di metilo	$(CH_3)_2.C_2O_4$	—	92,00	94,54	96,03	97,13	98,01	98,75	99,41	100	102,30
Formiato di etilo	$C_2H_5.CHO_2$	—	91,93	94,38	95,91	97,02	97,90	98,68	99,38	100	102,47
Idem.	—	—	91,98	94,46	95,97	97,05	97,92	98,68	99,38	100	102,53
Formiato di propilo	$C_3H_7.CHO_2$	—	91,94	94,28	95,83	96,94	97,85	98,67	99,37	100	—
Formiato di metilo	$CH_3.CHO_2$	—	92,32	95,22	96,25	97,22	98,08	98,77	99,41	100	102,36
Acetato di metilo	$CH_3.C_2H_3O_2$	90,65	92,09	94,36	95,77	96,86	97,78	98,59	99,36	100	102,45
Idem.	—	90,82	92,28	94,55	95,92	96,99	97,88	98,65	99,33	100	102,31
Acetato di propilo	$C_3H_7.C_2H_3O_2$	88,82	91,02	93,79	95,46	96,66	97,65	98,50	99,29	100	—
Propionato di propilo . . .	$C_3H_7.C_3H_5O_2$	—	90,34	93,05	94,77	96,12	97,27	98,27	99,18	100	—
Butirrato di metilo	$CH_3.C_4H_7O_2$	—	91,16	93,56	95,22	96,51	97,57	98,46	99,26	100	102,98
Idem.	—	—	91,52	93,85	95,44	96,68	97,69	98,53	99,30	100	102,84
Butirrato di etilo	$C_2H_5.C_4H_7O_2$	—	90,35	93,24	94,99	96,35	97,44	98,40	99,18	100	103,11
Butirrato di propilo	$C_3H_7.C_4H_7O_2$	—	90,17	93,06	94,94	96,21	97,31	98,29	99,16	100	—
Butirrato di amilo.	$C_5H_{11}.C_4H_7O_2$	—	89,74	92,84	94,71	96,15	97,32	98,31	99,14	100	—
Valerianato di metilo . . .	$CH_3.C_5H_9O_2$	—	91,12	93,74	95,45	96,63	97,62	98,52	99,25	100	102,86
Valerianato di etilo	$C_2H_5.C_5H_9O_2$	—	90,51	93,47	95,03	96,33	97,46	98,40	99,32	100	—
Valerianato di propilo. . .	$C_3H_7.C_5H_9O_2$	—	89,91	92,65	94,58	96,09	97,51	98,23	99,26	100	—
Acido formico.	CH_2O_2	90,96	93,00	95,19	96,44	97,43	98,18	98,87	99,44	100	—
Acido acetico.	$C_2H_4O_2$	89,36	91,91	94,57	96,07	97,17	98,05	98,78	99,46	100	102,41
Acido propionico.	$C_3H_6O_2$	88,92	91,74	94,58	96,13	97,23	98,15	98,82	99,49	100	102,22
Acido butirrico.	$C_4H_8O_3$	87,42	90,68	93,93	95,71	96,94	97,98	98,70	99,48	100	102,40
Acido valerianico.	$C_5H_{10}O_2$	86,09	89,55	93,10	95,11	96,42	97,67	98,50	99,41	100	102,88
Idem.	—	86,73	90,19	93,65	95,56	96,78	97,92	98,67	99,48	100	102,49

…60	2760	3260	3760	4260	5260	6260	7260	8260	9260	10260	Per la tensione del vapore	Per la dilatazione
…0,12	100,14	100,16	100,18	100,20	—	—	—	—	—	—	Regnault	Regnault
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Pierre
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Pierre
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
…5,43	106,64	107,73	108,89	109,61	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Erlenmeyer ed Hell

Tavola XLIX.

		20	60	160	260	360	460	560	660	760	960
Acqua	H_2O	0,03919	0,03333	0,02433	0,01822	0,01344	0,00945	0,00591	0,00282	0	—
Ammoniaca	$Az H_3$	0,06548	0,05260	0,03717	0,02759	0,02032	0,01418	0,00893	0,00411	0	—
Cloruro fosforoso.	$Ph Ch_3$	0,09903	0,08607	0,05421	0,04024	0,02964	0,02084	0,01318	0,00630	0	—
Idem.	—	0,09920	0,07724	0,05324	0,03915	0,02861	0,01998	0,01255	0,00597	0	—
Cloruro di silicio	$Si Ch_4$	0,10982	0,09636	0,06224	0,04695	0,03504	0,02491	0,01590	0,00765	0	—
Solfuro di carbonio	$C S_2$	0,09107	0,07137	0,04905	0,03589	0,02611	0,01816	0,01136	0,00538	0	—
Idem.	—	0,09118	0,07090	0,04900	0,03614	0,02648	0,01854	0,01167	0,00556	0	—
Idem.	—	0,09156	0,06864	0,04876	0,03585	0,02621	0,01831	0,01151	0,00547	0	—
Tetracloruro di carbonio .	$C Ch_4$	0,09908	0,07843	0,05496	0,04062	0,02977	0,02081	0,01308	0,00622	0	—
Idem.	—	0,10298	0,08100	0,05655	0,04188	0,03077	0,02157	0,01360	0,00648	0	—
Idem.	—	0,10231	0,08028	0,05587	0,04131	0,03032	0,02123	0,01338	0,00637	0	—
Anidride solforosa	$S O_2$	—	—	—	—	0,02873	0,01998	0,01248	0,00585	0	—
Idem.	—	—	—	—	—	0,02645	0,01869	0,01185	0,00545	0	—
Idem.	—	—	—	—	—	0,02757	0,01900	0,01175	0,00549	0	—
Cloroformio	$C H Ch_3$	0,09937	0,08092	0,05847	0,04399	0,03263	0,02306	0,01425	0,00701	0	—
Idem.	—	0,09824	0,07643	0,05274	0,03866	0,02816	0,01962	0,01229	0,00584	0	—
Cloruro di etilo	$C_2 H_5 Ch$	0,09604	0,07596	0,05254	0,03853	0,02810	0,01962	0,01245	0,00588	0	—
Idem.	—	0,09859	0,07811	0,05423	0,03984	0,02904	0,02022	0,01267	0,00601	0	—
Bromuro di etilo.	$C_2 H_5 Br$	0,09768	0,07636	0,05262	0,03859	0,02813	0,01960	0,01228	0,005828	0	—
Ioduro di etilo	$C_2 H_5 I$	0,11082	0,08046	0,05647	0,04195	0,03066	0,02164	0,01364	0,00566	0	—
Bromuro di etilene	$C_2 H_4 Br_2$	0,09926	0,07692	0,05269	0,03857	0,02809	0,01955	0,01224	0,00580	0	—
Mercurio.	Hg	0,002840	0,002187	0,001376	0,000978	0,000697	0,000477	0,000295	0,000138	0	—
Acetone	$C_3 H_6 O$	0,09994	0,08053	0,05693	0,04165	0,03095	0,02165	0,01361	0,00646	0	—
Idem.	—	0,09941	0,08009	0,05634	0,04155	0,03034	0,02113	0,01324	0,006263	0	—
Alcool metilico.	$CH_3 . OH$	0,09656	0,07733	0,05609	0,04421	0,02528	0,01690	0,01056	0,00499	0	—
Idem.	—	0,08235	0,06377	0,04382	0,03221	0,02352	0,01642	0,01031	0,00490	0	—
Alcool etilico.	$C_2 H_5 . OH$	0,08020	0,06344	0,04332	0,03148	0,02282	0,01580	0,00986	0,00465	0	—
Idem.	—	0,07869	0,06031	0,04062	0,02938	0,02122	0,01465	0,00911	0,00428	0	—
Idem.	—	0,07906	0,06193	0,04250	0,03116	0,02273	0,01583	0,00992	0,00470	0	—
Alcool propilico	$C_3 H_7 . OH$	0,08099	0,06368	0,04441	0,03280	0,02397	0,01665	0,01027	0,00455	0	—
Alcool isobutilico.	$C_4 H_9 . OH$	0,08541	0,06768	0,04750	0,03536	0,02598	0,01825	0,01152	0,00552	0	—
Benzolo	$C_6 H_6$	—	0,08073	0,05571	0,04078	0,03055	0,02060	0,01287	0,00608	0	—
Idem.	—	—	0,08018	0,05545	0,04073	0,02971	0,02071	0,01307	0,00615	0	—
Idem.	—	—	0,12087	0,09919	0,08219	0,06558	0,04908	0,03282	0,01637	0	—
Toluene	$C_6 H_5 . CH_3$	0,10227	0,08084	0,05642	0,04148	0,03100	0,02104	0,01317	0,00624	0	—
Idem.	—	0,10018	0,08009	0,05576	0,04099	0,02985	0,02082	0,01306	0,00624	0	—

0	1760	2260	2760	3260	3760	4260	5260	6260	7260	8260	9260	10260	Per la tens. del vapore	Per la dilatazione
555	0,020821	0,028590	0,035123	0,041573	0,047199	0,05244	0,06282	0,07035	0,07810	0,08527	0,09195	0,09825	Regnault	Rossetti, Hirn
741	0,03097	0,04259	0,05282	0,06208	0,07026	0,07786	—	—	—	—	—	—	Regnault	Andreeff
517	0,04749	0,06627	0,08348	0,09965	0,11505	0,12992	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
418	0.04320	0.05948	0,07406	0,08748	0,10003	0,11198	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
361	0,06179	0,08813	0,11316	0,13747	0,16111	0,18489	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
134	0,03790	0,05172	0,06304	0,07520	0,08530	0,09496	0,11290	0,12955	0,14530	0,16042	0,17506	0,18935	Regnault	Hirn
268	0,04068	0,05616	0,07005	0,08280	0,09474	0,10601	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
217	0,03966	0,05459	0,06794	0,08015	0,09154	0,10226	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
521	0.04496	0,06178	0,07681	0,09058	0,10342	0,11554	0,13809	0,15929	0,17930	0,19847	0,21697	0,23494	Regnault	Hirn
652	0.04752	0,06548	0,08152	0,09616	0,10973	0,12247	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
602	0,04683	0,06411	0,07976	0,09404	0,10727	0,11968	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
345	0,04106	0,05546	0,06808	0,07918	0,08919	0,09859	—	—	—	—	—	—	Regnault	Andreeff
047	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
174	0,03793	0,05145	0.06353	0,07440	0,08434	0,09362	—	—	—	—	—	—	Regnault	Drion
925	0,05297	0,07384	0,09235	0,10963	0,12582	0,14118	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
335	0,04135	0,05649	0,06980	0,08184	0,09292	0,10326	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
377	0,04234	0,05809	0,07205	0,08461	0,09652	0,10755	—	—	—	—	—	—	Regnault	Drion
391	0,04220	0,05747	0,07084	0,08282	0,09391	0,10417	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
340	0,04145	0,05672	0,07018	0,08241	0,09371	0,10428	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
690	0,04861	0.06757	0,08485	0,10102	0,11635	0,13114	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
318	0,04100	0,05596	0,06911	0,08100	0,09246	0,10221	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
519	0,000888	0,001181	0,001421	0,001631	0,001817	0,001983	—	—	—	—	—	—	Regnault	Regnault
608	0,04630	0,06333	0,07833	0,09188	0,10435	0,11600	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
483	0,04356	0,05901	0,07233	0,08417	0,09490	0,10477	—	—	—	—	—	—	Regnault	Thorpe
969	0,03450	0,04670	0,05722	0,06658	0,07507	0,08287	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
989	0,03524	0,04833	0,05990	0,07040	0,08011	0,08919	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
829	0,03273	0,04485	0,05570	0,06572	0,07518	0,08421	0,10140	0,11786	0,13386	0,14962	0,16525	0,18079	Regnault	Hirn
660	0,02903	0,03906	0,04761	0,05516	0,06288	0,06819	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
887	0,03344	0,04569	0,05645	0,06617	0.07515	0,08350	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
233	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
266	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
414	0,04245	0,05762	0,07081	0,08259	0,09336	0,10333	—	—	—	—	—	—	Regnault	Louguinine
478	0,04409	0,06027	0,07466	0,08775	0,09987	0,11125	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
-	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Paternò e Pisati
455	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Louguinine

TAVOLA XLIX.

		20	60	160	260	360	460	560	660	760	960	1…
Essenza di trementina. . .	$C_{10}H_{16}$	0,10983	0,08588	0,05978	0,04436	0,03270	0,02303	0,01460	0,00700	0	—	
Idem.	—	0,10345	0,07929	0,05374	0,03910	0,02834	0,01965	0,01227	0,00580	0	—	
Idem.	—	0,10067	0,07826	0,05405	0,03983	0,02916	0,02040	0,01232	0,00613	0	—	
Etere etilico	$C_4H_{10}O$	0,09067	0,07666	0,05527	0,04117	0,03027	0,02118	0,01334	0,00634	0	—	
Idem.	—	0,11282	0,08597	0,05967	0,04317	0,03159	0,02210	0,01392	0,00662	0	—	
Idem.	—	0,10849	0,08430	0,05835	0,04307	0,03158	0,02211	0,01392	0,00662	0	—	
Formiato di metilo	$CH_3 . CHO_2$	—	0,07682	0,04779	0,03752	0,02782	0,01923	0,01230	0,00593	0	—	
Formiato di etilo	$C_2H_5 . CHO_2$	—	0,08019	0,05538	0,04033	0,02919	0,02082	0,01318	0,06224	0	—	
Idem.	—	—	0,08069	0,05621	0,04089	0,02980	0,02095	0,01322	0,00621	0	—	
Idem.	—	0,09992	0,07796	0,05361	0,03970	0,02857	0,01986	0,01245	0,00594	0	—	
Idem.	—	0,10228	0,07984	0,05494	0,04072	0,02931	0,02038	0,01282	0,00609	0	—	
Formiato di propilo	$C_3H_7 . CHO_2$	—	0,08062	0,05721	0,04167	0,03064	0,02146	0,01327	0,00626	0	—	
Acetato di metilo	$CH_3 . C_2H_3O_2$	0,09348	0,07910	0,05643	0,04226	0,03145	0,02223	0,01414	0,00643	0	—	
Idem.	—	0,09182	0,07716	0,05448	0,04076	0,03009	0,02123	0,01346	0,00672	0	—	
Acetato di etilo	$C_2H_5 . C_2H_3O_2$	0,10608	0,08407	0,05957	0,04433	0,03271	0,02299	0,01454	0,00696	0	—	
Idem.	—	0,10621	0,08450	0,05963	0,04451	0,03284	0,02312	0,01463	0,00700	0	—	
Acetato di propilo	$C_3H_7 . C_2H_3O_2$	0,11178	0,08977	0,06209	0,04538	0,03340	0,02352	0,01503	0,00714	0	—	
Propionato di etilo	$C_2H_5 . C_3H_5O_2$	—	0,08849	0,06330	0,04634	0,03428	0,02415	0,01536	0,00731	0	—	
Idem.	—	0,11362	0,08924	0,06187	0,04556	0,03333	0,02328	0,01465	0,00697	0	—	
Propionato di propilo . . .	$C_3H_7 . C_3H_5O_2$	—	0,09658	0,06948	0,05233	0,03877	0,02730	0,01732	0,00816	0	—	
Butirrato di metilo	$CH_3 . C_4H_7O_2$	—	0,08840	0,06436	0,04779	0,03489	0,02425	0,01540	0,00740	0	—	
Idem.	—	—	0,08480	0,06146	0,04556	0,03323	0,02309	0,01466	0,00704	0	—	
Butirrato di etilo	$C_2H_5 . C_4H_7O_2$	—	0,09646	0,06756	0,05010	0,03651	0,02561	0,01601	0,00819	0	—	
Butirrato di propilo	$C_3H_7 . C_4H_7O_2$	—	0,09829	0,06944	0,05058	0,03792	0,02685	0,01710	0,00836	0	—	
Butirrato di amilo	$C_5H_{11} . C_4H_7O_2$	—	0,10262	0,07161	0,05288	0,03852	0,02682	0,01690	0,00859	0	—	
Valerianato di metilo . . .	$CH_3 . C_5H_9O_2$	—	0,08875	0,06256	0,04455	0,03367	0,02380	0,01480	0,00748	0	—	
Valerianato di etilo	$C_2H_5 . C_5H_9O_2$	—	0,09486	0,06534	0,04972	0,03671	0,02537	0,01598	0,00680	0	—	
Valerianato di propilo . . .	$C_3H_7 . C_5H_9O_2$	—	0,10087	0,07346	0,05416	0,03915	0,02490	0,01772	0,00738	0	—	
Ossalato di metilo	$(CH_3)_2 . C_2O_4$	—	0,08003	0,05463	0,03971	0,02870	0,01990	0,01251	0,00586	0	—	
Acido formico	CH_2O_2	0,09037	0,07002	0,04810	0,03559	0,02570	0,01823	0,01125	0,00564	0	—	
Acido acetico	$C_2H_4O_2$	0,10639	0,08089	0,05435	0,03935	0,02828	0,01947	0,01216	0,00535	0	0,01007	0,0…
Acido propionico	$C_3H_6O_2$	0,11084	0,08264	0,05418	0,03867	0,02771	0,01852	0,01178	0,00512	0	0,00959	0,0…
Acido butirrico	$C_4H_8O_2$	0,12577	0,09323	0,06072	0,04288	0,03060	0,02018	0,01301	0,00516	0	0,01002	0,0…
Acido valerianico	$C_5H_{10}O_2$	0,13911	0,10448	0,06900	0,04884	0,03575	0,02332	0,01502	0,00589	0	0,01114	0,0…
Idem.	—	0,12736	0,09420	0,06107	0,04276	0,03109	0,02014	0,01291	0,00504	0	0,01014	0,0…
Idem.	—	0,12670	0,09346	0,06036	0,04217	0,03061	0,01981	0,01269	0,00495	0	0,00993	0,0…
Idem.	—	0,12891	0,09550	0,06199	0,04342	0,03158	0,02046	0,01312	0,00514	0	0,01031	0,0…
Idem.	—	0,13271	0,09815	0,06348	0,04435	0,03220	0,02083	0,01326	0,00520	0	0,01044	0,0…

D	1760	2260	2760	3260	3760	4260	5260	6260	7260	8260	9260	10260	Per la tens. del vapore	Per la dilatazione
·72	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Hirn
·89	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
·97	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Regnault	Frankenheim
·82	0,04615	0,06363	0,07966	0,09389	0,10761	0,12068	0,14546	0,16895	0,19149	0,21323	0,23433	0,25182	Regnault	Hirn
·27	0,04913	0,06813	0,08530	0,10118	0,116131	0,130273	—	—	—	—	—	—	Regnault	Pierre
·19	0,04879	0,06739	0,08406	0,09936	0,11365	0,12709	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
·59	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
·32	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
·69	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre
·61	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
·26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Pierre
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
47	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
07	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre
89	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Kopp
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
01	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Naccari	Naccari
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
81	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
42	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
61	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Kopp
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Schumann	Pierre e Puchot
98	0,04017	0,05429	0,06645	0,07726	0,08894	0,09610	—	—	—	—	—	—	Regnault	Kopp
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
09	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
02	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
82	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Kopp
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	Erlenmeyer ed Hell
70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	idem
65	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	idem
91	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Landolt	idem

Nelle tavole XLVIII e XLIX sono riassunti i resultati ottenuti mediante le quarantasette tavole precedenti. Nella XLVIII cioè, sono riferiti, per i quarantasette liquidi sopra studiati i volumi relativi, alle temperature corrispondenti, preso come 100 il volume alla temperatura corrispondente normale [1]. In questa tavola si vede che volumi uguali di diversi liquidi, presi alla temperatura normale di ebullizione non rimangono uguali a tutte le altre temperature corrispondenti più alte o più basse. Così 100 volumi di acqua, di alcool e di etere misurati al punto di ebullizione normale, si riducono rispettivamente a volumi 96 ; 92 ; 90 ; alla temperatura di ebullizione sotto la pressione di 20 millimetri di mercurio; e diventano respettivamente 109,8;118 ; 125; alla temperatura di ebullizione sotto 10260 millimetri di mercurio. Lo stesso dicasi per gli altri liquidi. Le differenze fra questi numeri sono così grandi che eccedono grandemente tutti gli errori possibili di osservazione, e possiamo affermare con sicurezza che: *volumi uguali dei diversi liquidi, misurati alla temperatura di ebullizione normale, non restano uguali alle altre temperature corrispondenti, tanto che la disuguaglianze possono raggiungere e superare il* 15 *per cento* [2].

Nella tavola XLIX sono inscritte per tutti i quarantasette liquidi sopra studiati, le variazioni dell'unità di volume dalla temperatura ordinaria di ebullizione alle diverse temperature corrispondenti. Questa tavola è un utile complemento alla prima. I liquidi vi sono ordinati per quanto è possibile per famiglie o per analogia di formula: così in basso della colonna abbiamo la serie degli acidi grassi (non completa però); sopra gli eteri; quindi gli idrocarburi e poi di seguito, ascendendo, gli alcooli monoacidi; poi i cloruri, bromuri, ioduri organici, e per ultimo ascendendo, s'incontrano quei liquidi che non potevano esser collocati in veruna delle serie precedenti.

L'esame dei numeri inscritti in questa tavola conduce evidentemente alle conseguenze che seguono:

1° *Le variazioni provate dall'unità di volume dei liquidi, dalla temperatura normale di ebullizione ad un'altra temperatura corrispondente qualunque sono in generale diverse pei diversi liquidi tanto che per alcuni stanno come i numeri* 10

(1) Van der Waals (Fortschritte der Physik, Bd XXXVI, s. 564 e, *Die Continuitat des gasförmigen* ecc. Leipzig 1881, pag. 152 della traduzione tedesca) stabilisce la legge seguente:

« Siano T_1 T_2 T_3 ecc. le temperature critiche assolute di diversi liquidi: si determini per questi una serie di temperatura t' t'' t'''

$$\frac{273+t'}{T_1}=\frac{273+t''}{T_2}=\frac{273+t'''}{T_3}=r:$$

i coefficienti di dilatazione $$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}=\frac{a+2bt+3ct^2}{1+at+bt^2+ct^3}$$

di tutti i liquidi alle temperature t', t'', t''' ecc. sono in ragione inversa delle rispettive temperature critiche assolute ».

Questa regola non potrebbe essere utilizzata per lo scopo nostro, se non quando si conosceranno meglio e per un maggior numero di composti le temperature critiche. Ma di ciò, in un'altra Memoria di prossima pubblicazione.

(2) E supererebbero il 20 per cento se si prendessero volumi uguali alla temperatura corrispondente a 20 millimetri di mercurio; e se si riconfrontassero a quella corrispondente a 10260 millimetri.

e 25,5 (*acqua ed etere alla temperatura corrispondente a* 10260^{mm}) *e per altri come* 65 *a* 111 (*ammoniaca e ioduro di etile alla pressione di* 20 *millimetri*).

2° Scelto come tipo o termine di confronto uno qualunque dei quarantasette liquidi studiati, *le variazioni dell'unità di volume alle temperature corrispondenti* (*così sopra, come al di sotto di* 760 *millimetri*) *di un altro liquido differiscono con perfetta continuità dalle corrispondenti variazioni del liquido scelto come tipo, e rimanendo in valore assoluto o sempre più grandi o sempre più piccole di quelle.*

3° Paragonando le variazioni corrispondenti negli acidi della serie grassa, si scorge che queste crescono continuamente andando dal formico al valerianico cioè crescono col crescere della complessità della formula e del conseguente peso molecolare. La stessa osservazione ha luogo per gli eteri composti, dove le variazioni crescono in generale tranne poche eccezioni, progredendo dal formiato metilico al valerianato propilico: la stessa vale per quei pochi idrocarburi per cui si hanno i dati necessarî per i calcoli, ne' quali si osserva che le variazioni sono più piccole pel benzolo $C_6\ H_6$; più grandi per l'essenza di trementina $C_{10}\ H_{16}$: qualche incertezza vi sarebbe per la serie degli alcooli; ma se si rinunzia alle determinazioni di Pierre per l'alcool metilico, le quali assegnano a questo composto una dilatabilità troppo più grande di quella che misurò poi il Kopp, l'osservazione precedente non sarebbe neppure in questo caso contradetta. Considerando i tre composti cloruro, bromuro, ioduro etilico ecc., anche qui si vede che le variazioni ai punti corrispondenti crescono insieme col peso molecolare del composto. Si aggiunga inoltre che l'ammoniaca e l'acqua, che sono fra i liquidi esaminati quelli che hanno la formula più semplice e il peso molecolare più piccolo, offrono le variazioni più piccole ai punti corrispondenti.

Noi possiamo dunque concludere in generale che: *in una serie di composti omologhi o della stessa formula, l'unità di volume di un liquido misurata ad una temperatura corrispondente qualunque si dilata o si contrae tanto più, quando vien portata ad un'altra temperatura corrispondente qualunque, per quanto più elevato ne è il peso molecolare, e più complessa la formula.*

Ma questa è una regola empirica a cui non devesi annettere troppa importanza.

4° Ho voluto studiare l'influenza della funzione organica, a cui appartiene il composto, sulla dilatazione dell'unità di volume fra due temperature corrispondenti.

Perciò sono stato costretto a ricorrere al metodo poco rigoroso delle medie, come all'unico che mi si offriva.

Nelle due tavole seguenti tavola L e tavola LI sono scritte in colonna per gli idrocarburi, alcoli, eteri, acidi, ecc., i valori medî del volume (tavola L) ed i valori medî delle variazioni di volume (tavola LI) alle temperature corrispondenti alle pressioni segnate nella 1ª colonna F.

Nella tavola L ho supposto 100 il volume alla temperatura corrispondente a 760^{mm}, e nella LI l'ho supposto uguale ad uno.

I valori medî sono ottenuti prendendo la media dei valori che la quantità che si calcola per tutti i composti della classe scritta in capo della colonna.

Seguono le tavole.

Tavola L.

Medî valori di $100 \frac{V_F - V_{760}}{V_{760}}$

F	Acqua	Ammoniaca	Alcoli	Acidi	Idrocarburi	Eteri
20mm	96,08	93,45	91,67	—	89,74	89,68
60	96,67	94,74	93,46	91,37	91,92	91,30
160	97,57	96,28	95,45	94,27	94,42	93,90
260	98,18	97,24	96,62	95,89	95,90	95,49
360	98,66	97,97	97,64	97,04	96,98	96,69
460	99,06	98,58	98,36	98,01	97,91	97,69
560	99,41	99,11	98,98	98,74	98,69	98,53
660	99,72	99,59	99,52	99,46	99,38	99,30
760	100	100	100	100	100	100
1260	101,16	101,74	101,98	—	102,50	102,66
1760	102,08	103,10	103,30	—	104,33	—
2260	102,85	104,26	104,49	—	105,89	—
2760	103,54	105,28	105,54	—	107,27	—
3260	104,16	106,21	106,48	—	108,52	—
3760	104,72	107,03	107,37	—	109,66	—
4260	105,24	107,79	108,16	—	110,73	—

Tavola LI.

Medî valori di $\frac{V_F - V_{760}}{V_{760}}$

F	Acqua	Ammoniaca	Alcoli	Acidi	Idrocarburi	Eteri
20mm	— 0,03919	— 0,06548	— 0,08332	—	— 0,10263	— 0,10315
60	— 0,03333	— 0,05260	— 0,06545	— 0,08625	— 0,08075	— 0,08696
160	— 0,02433	— 0,03717	— 0,04547	— 0,05727	— 0,05584	— 0,06097
260	— 0,01822	— 0,02759	— 0,03380	— 0,04106	— 0,04104	— 0,04510
360	— 0,01344	— 0,02032	— 0,02364	— 0,02961	— 0,03018	— 0,03312
460	— 0,00945	— 0,01418	— 0,01636	— 0,01994	— 0,02089	— 0,02310
560	— 0,00591	— 0,00893	— 0,01022	— 0,01264	— 0,01305	— 0,01467
660	— 0,00282	— 0,00411	— 0,00480	— 0,00543	— 0,00623	— 0,00698
760	0	0	0	0	0	0
1260	+ 0,01166	+ 0,01741	+ 0,01976	—	+ 0,02501	+ 0,02664
1760	+ 0,02082	+ 0,03097	+ 0,03299	—	+ 0,04327	—
2260	+ 0,02859	+ 0,04259	+ 0,04493	—	+ 0,05895	—
2760	+ 0,03542	+ 0,05282	+ 0,05538	—	+ 0,07273	—
3260	+ 0,04157	+ 0,06208	+ 0,06481	—	+ 0,08517	—
3760	+ 0,04720	+ 0,07026	+ 0,07368	—	+ 0,09662	—
4260	+ 0,05244	+ 0,07786	+ 0,08159	—	+ 0,10729	—

Per calcolare questi valori medî si è ricorso:

Per gli *idrocarburi* al benzolo, toluene, essenza di trementina.

Per gli *alcoli* alcool metilico, etilico, propilico, isobutilico.

Per gli *eteri* formiato di etile, di etile, di propile: acetato di metile, di etile, di propile: propionato di etile, di propile: butirrato di metile, di etile, di propile, di amile: valerianato di metile, di etile, di propile: ossalato di metile.

Per gli *acidi*, acido formico, acetico, propionico, butirrico, valerianico.

Da queste tavole apparirebbe che fra due stesse temperature corrispondenti; in media, *si dilatano meno gli alcoli che gli acidi. e questi meno che gli idrocarburi e gli eteri; e che negli stessi limiti, l'acqua e l'ammoniaca si dilatano meno di tutti i composti precedenti, ben inteso che queste dilatazioni si riferiscano all'unità di volume misurata al punto corrispondente più basso.*

Ma anche questa è una regola empirica alla quale non devesi annettere troppa importanza.

Quel che però di certo e di indubitabile emerge dalle considerazioni precedenti è « *che le regolarità indicate dal Kopp* alla temperatura di ebullizione sotto la pres-
« sione di 76 cent. non potendosi ugualmente bene verificare a temperature corri-
« spondenti diverse da quella, debbono riguardarsi come puramente empiriche e ap-
« prossimative. Ne segue anche come sia temerità non perdonabile, quella di chi
« con la sola scorta delle cosiddette regole di Kopp ha voluto modificare la costitu-
« zione di composti organici, già bene stabilita da considerazioni e reazioni chimiche
« sicure ecc. ecc. ».

Potrei qui con la scorta dei numeri che ho calcolati cercare con quale approssimazione si verifichino le regole di Kopp ad una temperatura corrispondente ben diversa da quella *normale* o barometrica, ma non credo nè utile nè prudente per ora il farlo.

L'opera più vantaggiosa pel progresso della scienza su questa via, è quella di accumulare il più gran numero possibile di dati sperimentali sicuri così per la tensione dei vapori come per la dilatabilità termica estendendoli fino alle alte temperature, seguendo le orme di tanti illustri precursori, del Regnault e dell'Hirn segnatamente.

Terminerò questa Memoria con una osservazione.

Dal materiale dei dati posseduti ora dalla scienza, i quali furono utilizzati in questa Memoria, si può ancora trarre profitto, ricorrendo alla formula di Clausius [1]

$$\frac{p}{RT}=\frac{1}{v-\alpha}-\frac{1}{\Theta(v+\beta)^2}$$

$$\Theta=\frac{8}{27}\frac{\theta}{\alpha+\beta}$$

dove p è la pressione, v il volume dell'unità di peso, T la temperatura assoluta; R, α, β sono costanti e θ è una funzione della temperatura che si annulla allo zero assoluto e che prende il valore 1 alla temperatura critica; funzione alla quale Clausius assegna la forma:

$$\frac{1}{\theta}=\frac{a}{T^n}-b$$

[1] Clausius, Annalen der Physik und Chemie, Bd XIV, s. 279 und s. 692 (1881). — La formula di Clausius, contenendo più costanti delle quali una all'esponente, ecc. da determinarsi sperimentalmente ecc., per ciascheduna sostanza si applica meglio per il caso mio che quella di Van der Waals:

$$\left(p+\frac{a^2}{v}\right)\left(v-b\right)=RT$$

che può scriversi anche:

$$\frac{p}{RT}=\frac{1}{v-b}-\frac{a}{RTv^2}.$$

essendo a, b, n tre costanti che per ogni sostanza hanno un valore differente determinabile sperimentalmente, da tre valori noti della tensione del vapore saturo a temperature giudiziosamente scelte, e convenientemente distanti: così pure per mezzo delle formule date da Clausius nelle Memorie sopra citate, e di tavole da lui già calcolate si può dedurre per la stessa sostanza i volumi σ ed s della unità di peso del liquido e del vapore saturo ad una qualunque temperatura (volumi specifici misurati, s'intende bene, sotto una pressione uguale alla tensione del vapore corrispondente a quella temperatura) quando si conoscano i valori di P di s e di σ pel punto critico: ma il punto critico stesso, e questi valori di P, s, σ si possono anche calcolare dietro altri dati sperimentali.

Il Clausius ha eseguiti i calcoli per l'anidride carbonica, per l'acqua e per l'etere ed ha ottenuti dei resultati molto concordanti con quelli trovati coll'esperienza [1].

Nessuna difficoltà teorica vi ha ad estendere questi calcoli a tutte quelle sostanze per le quali si posseggono dati sufficienti: si potranno così per molte altre estendere fino al punto critico le tavole che ho precedentemente calcolate. Alcuni di questi calcoli ho già eseguiti con successo: i resultati sono poi più degni di fiducia quando per la sostanza si conosce la temperatura e la pressione critica, come avviene per molti liquidi grazie ai lavori del Cagniard de la Tour, dell'Andreews, del Wolf, dell'Hannay, del Drion, del Mendeleieff, del Sajotschewscky, del Guldberg, del Pawleski ecc. Io pubblicherò i resultati che ho ottenuto in una seconda Memoria che farà seguito alla presente [2], dove insieme darò un gran numero di resultati numerici relativi a tensioni di vapori, a dilatazioni, a gradi critici, ecc. di liquidi purissimi fin qui non studiati; seppure non mi verranno meno i mezzi di ultimare queste ricerche.

Dal Gabinetto di Fisica dell' Istituto Tecnico di Firenze.

(1) Clausius calcola così il punto critico dell'acqua 332°,32 e la pressione critica 134,1 atmosfere. Il sig. Strauss (I. d. russ. phys. chem. Ges. 14, pag. 510 e Beiblatter 1883, pag. 676) dedurrebbe dalle misure analoghe da lui fatte per le mescolanze di acqua ed alcool, i numeri 370° i 195,5 atmosfere.

(2) Il Clausius in una gentilissima sua lettera del 19 aprile del corrente anno, mi scrive che egli per parte sua credeva che la sua formula possa applicarsi a tutte le sostanze: quantunque egli non l'abbia provata che per tre sole (acqua, acido carbonico ed etere) e mi sollecitava anzi ad applicarla a tutti gli altri liquidi di cui gli aveva fatta parola.

Sopra una classe di equazioni trinomie.

Memoria di DAVIDE BESSO

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

L'equazione del grado n^{mo}:

$$y^n + y - a = 0$$

che, nel caso particolare di $n=5$, è stata risolta, in una precedente Memoria, mediante serie ipergeometriche del terz'ordine, ed anche per serie ipergeometriche del prim'ordine (¹), è nel presente scritto risolta, qualunque sia n, mediante serie ipergeometriche dell'ordine $(n-2)^{mo}$.

I

1. Lemma. *Posto:*

$$H_{m,s} = (m-1)(m-2)\dots(m-s)\binom{m}{s}$$

e indicato con $(-1)^s L_{r,s}$ *il coefficiente di* x^{r-s} *nel prodotto:*

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$$

si ha:

$$L_{m-1,s}H_{m,1} - L_{m-2,s-1}H_{m,2} + L_{m-3,s-2}H_{m,3} - \dots \mp L_{m-s,1}H_{m,s} \pm H_{m,s+1} = \begin{cases} 2L_{m,s+1} \\ 0 \end{cases}$$

secondo che s è pari o dispari.

Dall'identità:

$$\binom{p+q}{h} = \binom{p}{h} + \binom{p}{h-1}\binom{q}{1} + \binom{p}{h-2}\binom{q}{2} + \dots + \binom{p}{1}\binom{q}{h-1} + \binom{q}{h}$$

si ricava:

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1) - x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1) =$$

$$= H_{m,1}x(x-1)\dots(x-m+2) + H_{m,2}x(x-1)\dots(x-m+3) + \dots + H_{m,m-2}x(x-1) + H_{m,m-1}x$$

ossia:

$$2L_{m,1}x^{m-1} + 2L_{m,3}x^{m-3} + \dots + \begin{cases} 2L_{m,m-1}x \\ 2L_{m,m-2}x^2 \end{cases} =$$

$$= H_{m,1}x^{m-1} + (H_{m,2} - L_{m-1,1}H_{m,1})x^{m-2} + (H_{m,3} - L_{m-2,1}H_{m,2} + L_{m-1,2}H_{m,1})x^{m-3} + \dots$$

$$+ (H_{m,m-1} - L_{2,1}H_{m,m-2} + L_{3,2}H_{m,m-3} - \dots \pm L_{m-1,m-2}H_{m,1})x$$

dalla quale risulta subito la proposizione enunciata.

(¹) *Sull' equazione del quinto grado.* Memorie della r. Accademia dei Lincei. Vol. XIX.

2. *Se l'equazione:*

$$\left.\begin{array}{r}\xi^{n-2}(\xi-1)\dfrac{d^{n-1}u}{d\xi^{n-1}}+\xi^{n-3}(A_1\xi-B_1)\dfrac{d^{n-2}u}{d\xi^{n-2}}+\xi^{n-4}(A_2\xi-B_2)\dfrac{d^{n-3}u}{d\xi^{n-3}}+\dots\\ +(A_{n-2}\xi-B_{n-2})\dfrac{du}{d\xi}+Cu=0\end{array}\right\}\quad(I)$$

è soddisfatta, per $\bmod \xi < 1$, *dalla:*

$$F(a_1,\ a_2,\ \dots a_{n-1},\ b_1,\ b_2,\dots b_{n-2},\xi),$$

essa sarà pure soddisfatta dalle $n-2$ *funzioni:*

$$\xi^{1-b_m}F(a_{1,m},\ a_{2,m},\ \dots a_{n-1,m},\ b_{1,m},\ b_{2,m},\dots b_{n-2,m},\xi),$$

in cui:

$$a_{s.m}=a_s+1-b_m\,,\qquad b_{s,m}=\begin{cases}b_s+1-b_m\\ 2-b_m\end{cases},$$

secondo che s *è diverso da* m *od eguale ad* m; *purchè nessuna delle* b_s+1-b_m, $2-b_m$ *sia un intero negativo o nullo* [1].

Colla sostituzione:

$$n=\xi^\lambda t\,,$$

la (I) si trasforma nella:

$$\left.\begin{array}{r}\xi^{n-2}(\xi-1)\dfrac{d^{n-1}t}{d\xi^{n-1}}+\xi^{n-3}(A'_1\xi-B'_1)\dfrac{d^{n-2}t}{d\xi^{n-2}}+\xi^{n-4}(A'_2\xi-B'_2)\dfrac{d^{n-3}t}{d\xi^{n-3}}+\dots\\ +(A'_{n-2}\xi-B'_{n-2})\dfrac{dt}{d\xi}+C't=0\end{array}\right\}\quad(I')$$

in cui:

$$A'_1=A_1+\binom{n-1}{1}\lambda\qquad\qquad A'_2=A_2+\binom{n-2}{1}\lambda A_1+\binom{n-1}{2}\binom{\lambda}{2}1.2$$

$$B'_1=B_1+\binom{n-1}{1}\lambda\qquad\qquad B'_2=B_2+\binom{n-2}{1}\lambda B_1+\binom{n-1}{2}\binom{\lambda}{2}1.2$$

$$\begin{array}{r}A'_h=A_h+\dbinom{n-h}{1}\lambda A_{h-1}+\dbinom{n-h+1}{2}\dbinom{\lambda}{2}1.2A_{h-2}+\dots\\ +\dbinom{n-2}{h-1}\dbinom{\lambda}{h-1}1.2\dots(h-1)A_1+\dbinom{n-1}{h}\dbinom{\lambda}{h}1.2\dots h\end{array}$$

$$\begin{array}{r}B'_h=B_h+\dbinom{n-h}{1}\lambda B_{h-1}+\dbinom{n-h+1}{2}\dbinom{\lambda}{2}1.2B_{h-2}+\dots\\ +\dbinom{n-2}{h-1}\dbinom{\lambda}{h-1}1.2\dots(h-1)B_1+\dbinom{n-1}{h}\dbinom{\lambda}{h}1.2\dots h\end{array}$$

$$\begin{array}{r}A'_{n-2}=A_{n-2}+1.2\lambda A_{n-3}+1.2.3\dbinom{\lambda}{2}A_{n-4}+\dots+1.2\dots(n-2)\dbinom{\lambda}{n-3}A_1+\\ +1.2\dots(n-1)\dbinom{\lambda}{n-2},\end{array}$$

[1] Cfr. la Nota del sig. Goursat: *Sur les fonctions hypergéometriques d'ordre superieur.* Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Vol. 96.

$$B'_{n-2}=B_{n-2}+1.2\lambda B_{n-3}+1.2.3\binom{\lambda}{2}B_{n-4}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{\lambda}{n-3}B_1+$$
$$+1.2\dots(n-1)\binom{\lambda}{n-2},$$

$$C'=C+\lambda A_{n-2}+1.2\binom{\lambda}{2}A_{n-3}+1.2.3\binom{\lambda}{3}A_{n-4}+\dots$$
$$+1.2..(n-2)\binom{\lambda}{n-2}A_1+1.2..(n-1)\binom{\lambda}{n-1},$$

purchè λ sia radice dell'equazione:

$$\left.\begin{array}{l}1.2\dots(n-1)\binom{\lambda}{n-1}+1.2\dots(n-2)\binom{\lambda}{n-2}B_1+\\ +1.2\dots(n-3)\binom{\lambda}{n-3}B_2+\dots+1.2\binom{\lambda}{2}B_{n-3}+\lambda B_{n-2}=0\end{array}\right\}\ (\mathrm{II})$$

Le radici di quest'equazione si ottengono facilmente osservando che, per ipotesi, si ha qualunque sia r:

$$\left.\begin{array}{l}C+rA_{n-2}+1.2\binom{r}{2}A_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{r}{n-2}A_1+\\ \quad+1.2\dots(n-1)\binom{r}{n-1}=(a_1+r)(a_2+r)\dots(a_{n-1}+r)\\ (r+1)B_{n-2}+1.2\binom{r+1}{2}B_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{r+1}{n-2}B_1+\\ \quad+1.2\dots(n-1)\binom{r+1}{n-1}=(r+1)(b_1+r)(b_2+r)\dots(b_{n-2}+r)\end{array}\right\}\ (\mathrm{III})$$

Se nella seconda di queste si sostituisce $\lambda-1$ ad r, il suo primo membro diviene identico al primo membro della (II); perciò λ ha gli $n-2$ valori:

$$1-b_1,\ 1-b_2,\dots 1-b_{n-2}.$$

Ora, se le $a'_1,\ a'_2,\dots a'_{n-1},\ b'_1,\ b'_2,\dots\ b'_{n-2}$ sono determinate dalle:

$$\left.\begin{array}{l}C'+rA'_{n-2}+1.2\binom{r}{2}A'_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{r}{n-2}A'_1+\\ \quad+1.2\dots(n-1)\binom{r}{n-1}=(a'_1+r)(a'_2+r)\dots(a'_{n-1}+r)\\ (r+1)B'_{n-2}+1.2\binom{r+1}{2}B'_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{r+1}{n-2}B'_1\\ \quad+1.2\dots(n-1)\binom{r+1}{n-1}=(r+1)(b'_1+r)(b'_2+r)\dots(b'_{n-2}+r)\end{array}\right\}\ (\mathrm{III'})$$

e se nessuna delle b' sia un intero negativo o nullo, la (I') sarà soddisfatta, per mod $\xi<1$, dalla:

$$F(a'_1,\ a'_2,\dots a'_{n-1},\ b'_1,\dots b'_{n-2},\xi).$$

Coi valori delle A′, B′ e di C′, tenuta presente l'identità rammentata al N. 1, ed avuto riguardo alla (II), le (III′) si trasformano nelle:

$$C+(\lambda+r)A_{n-2}+1.2\binom{\lambda+r}{2}A_{n-3}+\ldots+1.2\ldots(n-2)\binom{\lambda+r}{n-2}A_1+$$
$$+\binom{\lambda+r}{n-1}1.2\ldots(n-1)=(a'_1+r)(a'_2+r)\ldots(a'_{n-1}+r),$$

$$(r+\lambda+1)B_{n-2}+1.2\binom{r+\lambda+1}{2}B_{n-3}+\ldots+1.2\ldots(n-2)\binom{r+\lambda+1}{n-2}B_1+$$
$$+\binom{r+\lambda+1}{n-1}1.2\ldots(n-1)=(r+1)(b'_1+r)(b'_2+r)\ldots(b'_{n-2}+r),$$

le quali in forza delle (III) divengono:

$$(a'_1+r)(a'_2+r)\ldots(a'_{n-1}+r)=(a_1+\lambda+r)(a_2+\lambda+r)\ldots(a_{n-1}+\lambda+r)$$
$$(r+1)(b'_1+r)(b'_2+r)\ldots(b'_{n-2}+r)=(r+\lambda+1)(b_1+\lambda+r)(b_2+\lambda+r)\ldots(b_{n-2}+\lambda+r).$$

I valori delle a' e b' che si ricavano da queste equazioni, e quelli delle λ, provano il teorema enunciato.

3. *Nell' ipotesi del teorema precedente la* (I) *è soddisfatta, per* $\mathrm{mod}\,\xi>1$, *dalle* $n-1$ *funzioni*:

$$z^{a_m}F(\alpha_{1,m},\ \alpha_{2,m},\ldots\alpha_{n-1,m},\ \beta_{1,m},\ \beta_{2,m},\ldots\beta_{n-1,m},\ z)$$

in cui:

$$z=\frac{1}{\xi},\quad \alpha_{1,m}=a_m.\quad \alpha_{s+1,m}=a_m+1-b_s\qquad(s=1,2,\ldots n-2),$$

e le β *sono date dalla formola*:

$$a_m-a_s+1,$$

nella quale s *ha tutti valori della serie* $1,2,\ldots n-1$, *escluso* m; *purchè nessuno dei numeri* a_m-a_s+1 *sia un intero negativo o nullo* (¹).

Colla sostituzione:

$$\xi=\frac{1}{z},$$

tenendo presente la formola:

$$\frac{d^r u}{d\xi^r}=(-1)^r\left\{z^{2r}\frac{d^r u}{dz^r}+H_{r,1}z^{2r-1}\frac{d^{r-1}u}{dz^{r-1}}+\ldots+H_{r,r-1}z^{r+1}\frac{du}{dz}\right\}$$

in cui:

$$H_{r,s}=(r-1)(r-2)\ldots(r-s)\binom{r}{s}$$

la (I) si trasforma nella:

$$\left.\begin{aligned}&z^{n-1}(z-1)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}+z^{n-2}(A''_1z-B''_1)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}}+\\&+z^{n-3}(A''_2z-B''_2)\frac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}}+\ldots+z(A''_{n-2}z-B''_{n-2})\frac{du}{dz}+C''u=0\end{aligned}\right\}\quad(I'')$$

(¹) Cfr. la citata Nota del sig. Goursat.

i cui coefficienti sono dati dalle:

$$A''_1 = -B_1 + H_{n-1,1}, \qquad A''_2 = B_2 - B_1 H_{n-2,1} + H_{n-1,2},$$
$$B''_1 = -A_1 + H_{n-1,1}, \qquad B''_2 = A_2 - A_1 H_{n-2,1} + H_{n-1,2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A''_{n-2} = (-1)^n (B_{n-2} - B_{n-3} H_{2,1} + B_{n-4} H_{3,2} - \ldots \pm H_{n-1,n-2}),$$
$$B''_{n-2} = (-1)^n (A_{n-2} - A_{n-3} H_{2,1} + A_{n-4} H_{3,2} - \ldots \pm H_{n-1,n-2}),$$
$$C'' = (-1)^n C.$$

E trasformando la (I″) colla sostituzione:

$$y = z^\mu v,$$

essa diviene:

$$\left.\begin{aligned} z^{n-2}(z-1)\frac{d^{n-1}v}{dz^{n-1}} + z^{n-3}(A'''_1 z - B'''_1)\frac{d^{n-2}v}{dz^{n-2}} + \\ + z^{n-4}(A'''_2 z - B'''_2)\frac{d^{n-3}v}{dz^{n-3}} + \ldots + (A'''_{n-2} z - B'''_{n-2})\frac{dv}{dz} + C'''v = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}''')$$

nella quale:

$$A'''_1 = A''_1 + \binom{n-1}{1}\mu, \qquad A'''_2 = A''_2 + \binom{n-2}{1}\mu A''_1 + \binom{n-1}{2}\mu(\mu-1),$$
$$B'''_1 = B''_1 + \binom{n-1}{1}\mu, \qquad B'''_2 = B''_2 + \binom{n-2}{1}\mu B''_1 + \binom{n-1}{2}\mu(\mu-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A'''_{n-2} = A''_{n-2} + 1.2\binom{\mu}{1}A''_{n-3} + 1.2.3\binom{\mu}{2}A''_{n-4} + \ldots + 1.2\ldots(n-2)\binom{\mu}{n-3}A''_1 +$$
$$+ 1.2\ldots(n-1)\binom{\mu}{n-2},$$
$$B'''_{n-2} = B''_{n-2} + 1.2\binom{\mu}{1}B''_{n-3} + 1.2.3\binom{\mu}{2}B''_{n-4} + \ldots + 1.2\ldots(n-2)\binom{\mu}{n-3}B''_1 +$$
$$+ 1.2\ldots(n-1)\binom{\mu}{n-1},$$
$$C''' = \mu A''_{n-2} + 1.2\binom{\mu}{2}A''_{n-3} + 1.2.3\binom{\mu}{3}A''_{n-4} + \ldots + 1.2\ldots(n-2)\binom{\mu}{n-2}A''$$
$$+ 1.2\ldots(n-1)\binom{\mu}{n-1},$$

purchè μ sia radice dell'equazione:

$$\left.\begin{aligned} 1.2\ldots(n-1)\binom{\mu}{n-1} + 1.2\ldots(n-2\binom{\mu}{n-2}B''_1 + \\ + 1.2\ldots(n-3)\binom{\mu}{n-3}B''_2 + \ldots + 1.2\binom{\mu}{2}B''_{n-3} + \mu B''_{n-2} - C'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}')$$

Questa, fatti gli sviluppi, sostituiti alle B'' ed a C'' i loro valori, ed avuto riguardo al lemma dimostrato al N. 1, diviene:

$$\mu^{n-1} + \left(L_{n-1,1} - A_1\right)\mu^{n-2} + \left(L_{n-1,2} - A_1 L_{n-2,1} + A_2\right)\mu^{n-3} +$$
$$+ \left(L_{n-1,3} - A_1 L_{n-2,2} + A_2 L_{n-3,1} - A_3\right)\mu^{n-4} + \ldots +$$
$$+ \left(L_{n-1,n-2} - A_1 L_{n-2,n-3} + A_2 L_{n-3,n-4} - \ldots + (-1)^{n-1} A_{n-3} L_{2,1} - (-1)^{n-1} A_{n-2}\right)\mu +$$
$$+ C(-1)^{n-1} = 0$$

il primo membro della quale è identico al primo membro della prima delle (III)

quando questa sia moltiplicata per $(-1)^{n-1}$ e vi si ponga $-\mu$ al posto di r; perciò si avrà:

$$(\mu-a_1)(\mu-a_2)\dots(\mu-a_{n-1})=0$$

da cui gli $n-1$ valori di μ:

$$a_1,\ a_2,\dots a_{n-1}\,.$$

A ciascuno di questi valori corrisponde un'equazione (I‴) la quale ammette, per mod $z<1$, la soluzione:

$$F(a''_1,\ a''_2,\dots a''_{n-1},\ b''_1,\ b''_2,\dots b''_{n-2},z)$$

in cui le a'' sono date dalla:

$$\left.\begin{aligned}
&C'''+rA'''_{n-2}+1.2\binom{r}{2}A'''_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{r}{n-2}A'''_1+\\
&\quad+1.2\dots(n-1)\binom{r}{n-1}=(a''_1+r)(a''_2+r)\dots(a''_{n-1}+r)\\
&\text{e le } b'' \text{ dalla:}\\
&(r+1)B'''_{n-2}+1.2\binom{r+1}{2}B'''_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{r+1}{n-2}B'''_1+\\
&\quad+1.2\dots(n-1)\binom{r+1}{n-1}=(r+1)(b''_1+r)(b''_2+r)\dots(b''_{n-2}+r)
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{III}'')$$

purchè nessuna delle b'' sia un intero negativo o nullo.

Coi valori delle A''', B''' e di C''', e in forza della (II′), le (III″) si trasformano facilmente nelle:

$$(\mu+r)A''_{n-2}+1.2\binom{\mu+r}{2}A''_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{\mu+r}{n-2}A''_1+$$
$$+1.2\dots(n-1)\binom{\mu+r}{n-1}=(a''_1+r)(a''_2+r)\dots(a''_{n-1}+r)$$

$$(\mu+r+1)B''_{n-2}+1.2\binom{\mu+r+1}{2}B''_{n-3}+\dots+1.2\dots(n-2)\binom{\mu+r+1}{n-2}B''_1+$$
$$+1.2\dots(n-1)\binom{\mu+r+1}{n-1}=(r+1)(b''_1+r)(b''_2+r)\dots(b''_{n-2}+r)$$

e queste, mediante i valori delle A'', B'' e di C'', e la:

$$1.2\dots m\binom{\mu+r}{m}+1.2\dots(m-1)\binom{\mu+r}{m-1}H_{m-1}+\dots+1.2\binom{\mu+r}{2}H_{m,m-2}+$$
$$+\binom{\mu+r}{1}H_{m,m-1}=1.2\dots m\binom{\mu+r+m-1}{m},$$

si trasformano nelle:

$$(\mu+r)B_{n-2}-1.2\binom{\mu+r+1}{2}B_{n-3}+1.2.3\binom{\mu+r+2}{3}B_{n-4}-\dots$$
$$\mp1.2\dots(n-2)\binom{\mu+r+n-3}{n-2}B_1\pm1.2\dots(n-1)\binom{\mu+r+n-2}{n-1}=$$
$$=(a''_1+r)(a''_2+r)\dots(a''_{n-1}+r)(-1)^n,$$

$$(\mu+r+1)A_{n-2}-1.2\binom{\mu+r+2}{2}A_{n-3}+1.2.3\binom{\mu+r+3}{3}A_{n-4}-\dots$$
$$\mp1.2\dots(n-2)\binom{\mu+r+n-2}{n-2}A_1\pm1.2\dots(n-1)\binom{\mu+r+n-1}{n-1}-C=$$
$$=(-1)^n(r+1)(b''_1+r)(b''_2+r)\dots(b''_{n-2}+r)\,.$$

Se nella prima di queste si pone $r = -\mu - r'$, e, nella seconda, $r = -\mu - r' - 1$, esse diverranno, in forza delle (III):

$$(r'+\mu-a''_1)(r'+\mu-a''_2)\dots(r'+\mu-a''_{n-1}) = r'(r'+b_1-1)(r'+b_2-1)\dots(r'+b_{n-2}-1)$$

$$(r'+\mu)(r'+\mu+1-b''_1)(r'+\mu+1-b''_2)\dots(r'+\mu+1-b''_{n-2}) =$$
$$= (r'+a_1)(r'+a_2)\dots(r'+a_{n-1}).$$

I valori delle a'', b'' che si ricavano da queste equazioni, e quelli delle μ, rendono manifesta la proposizione enunciata.

II

4. Per ogni radice della:

$$y^n + y - \frac{n-1}{n} x = 0 \tag{1}$$

si ha:

$$y' = \frac{1}{n} \frac{y}{x-y},$$

e in conseguenza:

$$y^h y' = x^h y' - \frac{1}{n}(x^{h-1} y + x^{h-2} y^2 + \dots + xy^{h-1} + y^h) \tag{2}$$

$$(nx^{n-1}+1) y' = y^{n-1} + xy^{n-2} + x^2 y^{n-3} + \dots + x^{n-3} y^2 + x^{n-2} y + \frac{n-1}{n}. \tag{3}$$

Ora, posto:

$$P_{n-r}(e) = e_1 y^{n-r} + e_2 xy^{n-r-1} + e_3 x^2 y^{n-r-2} + \dots + e_{n-r-1} x^{n-r-2} y^2,$$

in cui le e significano costanti, si troverà, mediante la (2):

$$P'_{n-r}(e) = P_{n-r-1}(e') + I_r(e) x^{n-r-1} y' - \frac{1}{n} I_r(e) x^{n-r-2} y \tag{4}$$

nella quale:

$$I_r(e) = e_1(n-r) + e_2(n-r-1) + e_3(n-r-2) + \dots + 3e_{n-r-2} + 2e_{n-r-1},$$

e le e' sono date dalle:

$$e'_1 = e_2 - \frac{n-r}{n} e_1, \qquad e'_2 = e'_1 + (e_3 - e_2) + \left(e_3 - \frac{n-r-1}{n} e_2\right),$$

$$e'_3 = e'_2 + 2(e_4 - e_3) + \left(e_4 - e_3 \frac{n-r-2}{n}\right), \quad e'_4 = e'_3 + 3(e_5 - e_4) + \left(e_5 - e_4 \frac{n-r-3}{n}\right),$$

. . . .

Da queste risulta che, se le e costituiscono una serie di quantità positive eguali o crescenti, le e' costituiranno una serie di quantità positive crescenti; perciò, e in forza della (4), la derivata s^{ma} del polimonio $P_{n-r}(e)$ conterrà il termine y^{n-r-s}; e, in conseguenza, derivando $n-3$ volte la (3), che si può mettere nella forma:

$$(nx^{n-1}+1) y' - x^{n-2} y = P_{n-1}(1) + \frac{n-1}{n},$$

si otterrà:

$$\left((nx^{n-1}+1)\,y'\right)^{(n-3)}-(x^{n-2}\,y)^{(n-3)}-\mathrm{I}_1\left(x^{n-2}\,y'-\frac{1}{n}\,x^{n-3}\,y\right)^{(n-4)}-$$
$$-\mathrm{I}_2\left(x^{n-3}y'-\frac{1}{n}x^{n-4}\,y\right)^{(n-5)}-\ldots-\mathrm{I}_{n-4}\left(x^3\,y'-\frac{1}{n}\,x^2\,y\right)'-\mathrm{I}_{n-3}\left(x^2\,y'-\frac{1}{n}\,xy\right)=\mathrm{E}y^2,$$

nella quale la costante E è diversa da zero. Ed è chiaro che, colla derivazione di questa, risulterà un'equazione della forma:

$$(nx^{n-1}+1)\,y^{(n-1)}+\mathrm{G}_1\,x^{n-2}\,y^{(n-2)}+\mathrm{G}_2\,x^{n-3}\,y^{(n-3)}+\ldots+\mathrm{G}_{n-2}\,xy'+\mathrm{G}_{n-1}\,y=0 \qquad (5)$$

in cui le G significano costanti.

5. Colla serie di Lagrange si trova che, posto:

$$\xi=-\,nx^{n-1},$$

quella radice della (1) che s'annulla con x è data, per mod $\xi\leq 1$, dalla:

$$y_0=\frac{n-1}{n}x\left\{1+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\,\xi+\frac{1}{2}\binom{2n}{1}\frac{(n-1)^{2n-2}}{n^{2n}}\,\xi^2+\frac{1}{3}\binom{3n}{2}\frac{(n-1)^{3n-3}}{n^{3n}}\,\xi^3+\ldots\right\}$$

che si dimostra facilmente essere identica alla:

$$y_0=\frac{n-1}{n}\,x\mathrm{F}\,(a_1,\ a_2,\ldots a_{n-1},\ b_1,\ b_2,\ldots b_{n-2},\xi)$$

in cui:

$$a_1=\frac{1}{n},\ a_2=\frac{2}{n},\ \ldots\ a_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ b_1=\frac{2}{n-1},\ b_2=\frac{3}{n-1},\ \ldots\ b_{n-3}=\frac{n-2}{n-1},\ b_{n-2}=\frac{n}{n-1}.$$

Dunque la:

$$f_2=\mathrm{F}\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots\frac{n-1}{n};\frac{2}{n-1},\frac{3}{n-1},\ldots\frac{n-2}{n-1},\frac{n}{n-1},\xi\right) \qquad (6)$$

deve soddisfare all'equazione che si ricava dalla (5) colla sostituzione:

$$y=xu\,.$$

Operando questa, e la sostituzione:

$$\xi=-\,nx^{n-1},$$

la (5) si trasforma nella:

$$\left.\begin{aligned}\xi^{n-2}(\xi-1)\frac{d^{n-1}u}{d\xi^{n-1}}+\xi^{n-3}(\mathrm{A}_1\,\xi-\mathrm{B}_1)\,\frac{d^{n-2}u}{d\xi^{n-2}}+\xi^{n-4}\,(\mathrm{A}_2\,\xi-\mathrm{B}_2)\,\frac{d^{n-3}u}{d\xi^{n-3}}+\ldots\\+(\mathrm{A}_{n-2}\,\xi-\mathrm{B}_{n-2})\frac{du}{d\xi}+\mathrm{C}u=0\end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

epperò dovranno essere soddisfatte le:

$$\mathrm{C}+r\mathrm{A}_{n-2}+1.2\binom{r}{2}\mathrm{A}_{n-3}+1.2.3\binom{r}{3}\mathrm{A}_{n-4}+\ldots+1.2\ldots(n-2)\binom{r}{n-2}\mathrm{A}_1+$$
$$+1.2\ldots(n-1)\binom{r}{n-1}=\left(r+\frac{1}{n}\right)\left(r+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(r+\frac{n-1}{n}\right),$$

$$\mathrm{B}_{n-2}+r\mathrm{B}_{n-3}+1.2\binom{r}{2}\mathrm{B}_{n-4}+\ldots+1\,2\ldots(n-3)\binom{r}{n-3}\mathrm{B}_1+$$
$$+1.2\ldots(n-2)\binom{r}{n-2}=\left(r+\frac{2}{n-1}\right)\left(r+\frac{3}{n-1}\right)\ldots\left(r+\frac{n-2}{n-1}\right)\left(r+\frac{n}{n-1}\right),$$

mediante le quali si possono trovare i valori delle A e B e di C.

6. Ma la cognizione di questi valori non è necessaria pel nostro scopo. Risulta infatti da quanto è stato dimostrato al N. 2, che, posto:

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= \mathrm{F}\left(-\frac{1}{n(n-1)}, \frac{n-2}{n(n-1)}, \frac{2n-3}{n(n-1)}, \ldots \frac{n^2-3n+1}{n(n-1)}; \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots \frac{n-3}{n-1}, \frac{n-2}{n-1}; \xi\right)\\
f_2 &= \mathrm{F}\left(\frac{n-1}{n(n-1)}, \frac{2n-2}{n(n-1)}, \frac{3n-3}{n(n-1)}, \ldots \frac{n^2-2n+1}{n(n-1)}; \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-1}, \ldots \frac{n-2}{n-1}, \frac{n}{n-1}; \xi\right)\\
f_3 &= \mathrm{F}\left(\frac{2n-1}{n(n-1)}, \frac{3n-2}{n(n-1)}, \frac{4n-3}{n(n-1)}, \ldots \frac{n^2-n+1}{n(n-1)}; \frac{3}{n-1}, \frac{4}{n-1}, \ldots \frac{n-2}{n-1}, \frac{n}{n-1}, \frac{n+1}{n-1}; \xi\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n-1} &= \mathrm{F}\left(\frac{n^2-2n-1}{n(n-1)}, \frac{n^2-n-2}{n(n-1)}, \ldots \frac{2n^2-5n+1}{n(n-1)}; \frac{n}{n-1}, \frac{n+1}{n-1}, \ldots \frac{2n-3}{n-1}; \xi\right)
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

la (5′), la quale, per $\operatorname{mod}\xi < 1$, è soddisfatta dalla f_2 data dalla (6), ammette le altre $n-2$ soluzioni:

$$\xi^{-\frac{1}{n-1}} f_1, \quad \xi^{\frac{1}{n-1}} f_3, \quad \xi^{\frac{2}{n-1}} f_4, \ldots \xi^{\frac{n-4}{n-1}} f_{n-2}, \quad \xi^{\frac{n-3}{n-1}} f_{n-1};$$

e che, in conseguenza, la (5) sarà soddisfatta, per $\operatorname{mod}\xi < 1$, dalle $n-1$ funzioni:

$$f_1, \quad \xi^{\frac{1}{n-1}} f_2, \quad \xi^{\frac{2}{n-1}} f_3, \ldots\ldots \xi^{\frac{n-2}{n-1}} f_{n-1},$$

ed è chiaro che queste costituiscono un sistema di integrali fondamentali.

E, in forza del teorema dimostrato al N. 3, posto:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{F}_1 &= \mathrm{F}\left(-\frac{1}{n(n-1)}, \frac{n-1}{n(n-1)}, \frac{2n-1}{n(n-1)}, \ldots \frac{n^2-2n-1}{n(n-1)}; \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}; \frac{1}{\xi}\right)\\
\mathrm{F}_2 &= \mathrm{F}\left(\frac{n-2}{n(n-1)}, \frac{2n-2}{n(n-1)}, \frac{3n-2}{n(n-1)}, \ldots \frac{n^2-n-2}{n(n-1)}; \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}; \frac{1}{\xi}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{F}_{n-1} &= \mathrm{F}\left(\frac{n^2-3n+1}{n(n-1)}, \frac{n^2-2n+1}{n(n-1)}, \ldots \frac{2n^2-5n+1}{n(n-1)}; \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots \frac{2n-2}{n}; \frac{1}{\xi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

la (5′) sarà soddisfatta, per $\operatorname{mod}\xi > 1$, dalle $n-1$ funzioni:

$$\xi^{-\frac{1}{n}} \mathrm{F}_1, \quad \xi^{-\frac{2}{n}} \mathrm{F}_2, \ldots\ldots \xi^{-\frac{n-1}{n}} \mathrm{F}_{n-1},$$

e quindi la (5) dalle:

$$\xi^{\frac{1}{n(n-1)}} \mathrm{F}_1, \quad \xi^{-\frac{n-2}{n(n-1)}} \mathrm{F}_2, \quad \xi^{-\frac{2n-3}{n(n-1)}} \mathrm{F}_3, \ldots\ldots \xi^{-\frac{n^2-3n+1}{n(n-1)}} \mathrm{F}_{n-1},$$

le quali costituiscono un sistema di integrali fondamentali.

È da osservare che le $2(n-1)$ serie date dalle (7) (8) sono ancora convergenti per $\operatorname{mod}\xi = 1$, poichè per ciascuna di esse si ha:

$$\Sigma b - \Sigma a = \frac{1}{2}.$$

7. Risulta da quanto precede che, posto:

$$\xi = -nx^{n-1},$$

le radici della:

$$y^n + y - \frac{n-1}{n} x = 0,$$

per mod $\xi < 1$, avranno la forma:

$$y_h = c_{0,h} f_1 + c_{1,h} x f_2 + c_{2,h} x^2 f_3 + \dots + c_{n-2,h} x^{n-2} f_{n-1},$$

in cui le f sono date dalle (7) e le c significano costanti.

E poichè, per ciascuna radice, il primo ed il secondo membro sono funzioni continue, finchè mod ξ non supera l'unità, la stessa forma sussisterà per mod $\xi = 1$.

Per determinare le costanti si osservi che, quando x tende a zero, una delle radici, e sia y_0, tende a zero, e le altre hanno per limiti le radici $(n-1)^{me}$ dell'unità negativa. Indicando queste con $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_{n-1}$, e rammentando che la y_0 è quella radice data dalla serie di Lagrange, si avrà:

$$c_{0,0} = 0, \qquad c_{1,0} = \frac{n-1}{n}, \quad c_{2,0} = c_{3,0} = \dots = c_{n-2,0} = 0,$$

$$c_{0,h} = \delta_h \qquad (h = 1, 2, \dots n-1).$$

Osservando poi che ciascuna f ha la forma $1 + x^{n-1}\theta$, in cui θ non tende all'infinito quando x tende a zero, è chiaro che si avrà:

$$c_{1,h} = \lim\left(\frac{y_h - \delta_h}{x}\right)_{x=0} = -\frac{1}{n}$$

$$c_{r,h} = \lim\left(\frac{y_h - \delta_h - c_{1,h}x - c_{2,h}x^2 - \dots - c_{r-1,h}x^{r-1}}{x^r}\right)_{x=0}$$

$$= \lim\left(\frac{y - \delta_h - c_{1,h}\frac{n}{n-1}(y^n+y) - c_{2,h}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 (y^n+y)^2 - \dots - c_{r-1,h}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{r-1}(y^n+y)^{r-1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^r (y^n+y)^r}\right)_{y=\delta_h}.$$

Il limite di questo quoziente è eguale al limite del quoziente delle derivate r^{me} dei suoi due termini; perciò, posto:

$$M_{r,s} = \frac{\delta^r{}_h}{1.2\dots r}\left(\frac{n}{n-1}\right)^s \left[D_r\left((y^n+y)^s\right)\right]_{y=\delta_h}$$

$$= (-1)^s\left(\frac{n}{n-1}\right)^s \delta^s{}_h \left\{\binom{ns}{r} - \binom{s}{1}\binom{n(s-1)+1}{r} + \binom{s}{2}\binom{n(s-2)+2}{r} - \right.$$

$$\left. - \binom{s}{3}\binom{n(s-3)+3}{r} + \dots \pm \binom{s}{s-1}\binom{n+s-1}{r}\right\} \qquad (r > s)$$

si troverà:

$$c_{r,h} = \frac{(-1)^{r-1}}{n^r}\delta^{-r}\left(c_{1,h}M_{r,1} + c_{2,h}M_{r,2} + \dots + c_{r-1,h}M_{r,r-1}\right) \qquad (r = 2, 3, \dots n-1)$$

mediante la quale si ottiene successivamente:

$$c_{2,h} = -\frac{1}{2n}\delta_h^{-1}$$

$$c_{3,h} = -\frac{2}{1.2.3}\frac{n+1}{n^2}\delta_h^{-2}$$

$$c_{4,h} = -\frac{3}{1.2.3.4}\frac{(n+2)(2n+1)}{n^4}\delta_h^{-3}$$

$$c_{5,h} = -\frac{4}{1.2.3.4.5}\frac{(n+3)(2n+2)(3n+1)}{n^4}\delta_h^{-4}$$

$$c_{6,h} = -\frac{5}{1.2.3.4.5.6}\frac{(n+4)(2n+3)(3n+2)(4n+1)}{n^5}\delta_h^{-5}$$

8. Per mod $\xi \geq 1$ le radici della (1) sono date dalla formola:

$$y_h = l_{0,h}\xi^{\frac{1}{n(n-1)}}F_1 + l_{1,h}\xi^{-\frac{n-2}{n(n-1)}}F_2 + l_{2,h}\xi^{-\frac{2n-3}{n(n-1)}}F_3 + \dots + l_{n-2,h}\xi^{-\frac{n^2-3n+1}{n(n-1)}}F_{n-1}$$

in cui le l significano costanti e le F sono date dalle (8).

Posto:

$$\tau = \left(\frac{n-1}{n}x\right)^{-\frac{n-1}{n}}, \quad y = \omega\tau^{-\frac{1}{n-1}},$$

la (1) diviene:

$$\omega^n + \tau\omega - 1 = 0,$$

dalla quale si rileva che, quando τ tende a zero, cioè quando ξ tende all'infinito, le ω hanno per limiti le radici n^{me} dell'unità. Ora dalla formola di y_h risulta:

$$\omega_h = d_{0,h}F_1 + d_{1,h}\tau F_2 + d_{2,h}\tau^2 F_3 + \dots + d_{n-2,h}\tau^{n-2}F_{n-1},$$

ove è da osservare che, per ciascuna F, il quoziente $\frac{F-1}{\tau^n}$ ha un limite finito quando τ tende a zero; quindi, con metodo analogo a quello del N° precedente, e indicando con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{n-1}$ le radici n^{me} dell'unità, si troverà:

$$d_{0,h} = \varepsilon_h, \qquad d_{1,h} = -\frac{1}{n}\varepsilon_h^2,$$

$$d_{r,h} = \frac{(-1)^r}{n^r}\left\{r\varepsilon_h^{r+1} + d_{1,h}\varepsilon_h^{r-1}N_{r,1} + d_{2,h}\varepsilon_h^{r-2}N_{r,2} + \dots + d_{r-1,h}\varepsilon_h N_{r,r-1}\right\},$$

nella quale:

$$N_{r,s} = -\frac{1}{1.2\dots r}\varepsilon^s{}_h\left[D_r\left(\omega^{r-s}(1-\omega^n)^s\right)\right]_{\omega=\varepsilon_h}$$

$$= \binom{s}{1}\binom{n+r-s}{r} - \binom{s}{2}\binom{2n+r-s}{r} + \binom{s}{3}\binom{3n+r-s}{r} - \dots$$

$$\pm \binom{s}{s-1}\binom{n(s-1)+r-s}{r} \mp \binom{ns+r-s}{r}.$$

Mediante queste formole si ottiene successivamente:

$$d_{2,h} = -\frac{1}{1.2}\frac{n-3}{n^2}\varepsilon_h{}^3$$

$$d_{3,h} = -\frac{1}{1.2.3}\frac{(n-4)(2n-4)}{n^3}\varepsilon_h{}^4$$

$$d_{4,h} = -\frac{1}{1.2.3.4}\frac{(n-5)(2n-5)(3n-5)}{n^4}\varepsilon_h{}^5$$

$$d_{5,h} = -\frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{(n-6)(2n-6)(3n-6)(4n-6)}{n^5}\varepsilon_h{}^6$$

$$d_{6,h} = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6}\frac{(n-7)(2n-7)(3n-7)(4n-7)(5n-7)}{n^6}\varepsilon_h{}^7$$

Le proprietà fisiche degli idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ dei petrolî [1].

Memoria dei professori ADOLFO BARTOLI ed ENRICO STRACCIATI

approvata con relazione al Presidente
nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

Le proprietà fisiche dei petrolî sono state sin qui argomento di molti studî, dei quali lo scopo principale se non unico era quello di trovare un carattere facile per stabilirne l'origine diversa e la diversa proporzione degli idrocarburi che li costituiscono e il diverso pregio o valore pratico in cui dovevano tenersi. Inoltre questi studî sono stati più che altro portati sopra le frazioni che distillano dal petrolio entro limiti di temperatura assai estesi, come dieci gradi e più ancora, entro i quali limiti non si possono ottenere che mescolanze di molti idrocarburi. Di tal guisa sono state studiate le densità (Mendeleeff, Bolley, Beilstein e Kurbatow, Pagliani), le dilatabilità pel calore (Sainte Claire Deville), il calore di combustione (idem), gli indici di rifrazione per le frazioni che passavano di 10 in 10 gradi (Skalweit), la temperatura di accensione, ecc.

Ma per le proprietà fisiche dei molti idrocarburi del petrolio bene isolati l'uno dall'altro si hanno pochissimi dati.

Pelouze e Cahours in un rimarchevole lavoro sui petrolî americani [2] ne isolarono e studiarono chimicamente ben tredici idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ della serie del metano, dei quali il primo era l'idruro di butile $C_4 H_{10}$ e l'ultimo era l'idruro di palmitilo $C_{16} H_{34}$ aventi ciascuno un punto fisso di ebullizione, la densità del vapore e la composizione centesimale corrispondente alla formula, ecc.

Altre ricerche sui petrolî hanno fatto riconoscere oltre la presenza degli idrocarburi normali e non normali della formula $C_n H_{2n+2}$ altri idrocarburi della serie grassa, ed anche (ma in piccola quantità) della serie aromatica.

Noi abbiamo intrapreso questo lavoro allo scopo di studiare le principali proprietà fisiche degli idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ che si potevano bene isolare in quantità sufficiente dal petrolio; mettendo in atto un divisamento da uno di noi espresso [3] già da vario tempo, di determinare cioè le « più importanti proprietà fisiche sopra lo stesso campione del liquido organico ».

[1] Cioè: densità, dilatabilità, volumi molecolari alla ebullizione, costanti capillari, coefficienti d'attrito, indici di rifrazione, calori specifici, proprietà elettriche ecc. studiate sulla stessa parte di liquido.

[2] J. Pelouze et A. Cahours, *Recherches sur les pétroles d'Amérique*. Ann. de Chimie et de Physique, série 4e, t. I, pag. 1 (1864).

[3] Bartoli, *Relazione fra la coesione specifica* ecc. Nuovo Cimento, serie 3a, t. VI, pag. 141 (1879).

La prima parte e la più lunga di questo lavoro ha dovuto essere tutta chimica. Ci siamo procurati varî quintali di petrolio americano grezzo (di Pensilvania) e una quantità poco meno considerevole di olî leggeri del petrolio, della stessa provenienza.

Si cominciò dapprima con distillazioni grossolane fatte con grande caldaja di rame munita di un largo tubo di rettificazione in rame, procedenti di venti in venti gradi circa; separazione che fu ripetuta varie volte nella stessa caldaja: poscia i diversi prodotti così grossolanamente frazionati furono tenuti per molto tempo in contatto con un volume uguale di acido solforico concentrato, varie volte rinnovato, col quale di frequente venivano agitati. Separati gli idrocarburi dall'acido solforico sottostante, vennero a piccole porzioni rimescolati con acido nitrico fumante, separati di nuovo, poi lavati con grande quantità di acqua e poi con soda, e finalmente furono di nuovo sottoposti alla distillazione frazionata, impiegandovi dei rettificatori di Henniger e Leben a sette bolle per le frazioni che bollivano sotto ai settanta gradi, con cinque bolle per le frazioni che bollivano fino a 150° circa, a tre bolle per temperature sino a 220° circa e ad una bolla sola per più alte temperature.

Alle temperature inferiori ai 180° distillammo entro recipienti di vetro scaldati a bagno maria o a bagno d'aria; per più alte temperature in palloni di rame a collo largo e lungo riscaldati a bagno di aria e a bagno di grafite: il tubo di Henniger e Leben vi era inserito per mezzo di un tappo di pomice che si lutava perfettamente all'esterno.

Dopo otto o dieci rettificazioni procedenti per ciascun campione fra limiti sempre più ristretti si eseguirono le ultime due o più (quando ce ne fu bisogno) sopra il sodio.

Si ottennero così dei liquidi limpidissimi, affatto incolori aventi (quelli più volatili) un grato odore etereo.

Il punto di ebullizione per molti di essi (per quelli più volatili era costante) per quelli meno volatili si notavano oscillazioni anche di due o tre gradi [1].

Le temperature lette sui termometri erano corrette della parte non immersa; la correzione dello zero, in specie per i liquidi che bollono sopra 100° veniva fatta determinando lo zero del termometro appena finita la distillazione. I termometri adoprati nelle distillazioni erano del Baudin n.ⁱ 9166 a 9741 ben calibrati; non fu fatto il loro confronto col termometro ad aria per le alte temperature perchè nessuno degli sperimentatori precedenti che hanno studiate le proprietà chimiche dei petroli ha fatto questo confronto; ed a noi il punto di ebullizione serviva solo per regolare la separazione dei vari idrocarburi.

Le misure di densità furono fatte con una bilancia Rueprecht sensibile al milligrammo con la portata di due chilogrammi, servendoci di una pesiera da noi accuratamente studiata.

Per le pesate occorrenti nelle esperienze calorimetriche si ricorreva ad un'altra bilancia di Deleuil della portata di 10 chilogrammi con la sensibilità di 4 milligrammi.

[1] Non ci dissimuliamo però, che per quanto cercassimo di ben separare con frazionate distillazioni questi idrocarburi impiegandovi un tempo ed una pazienza straordinariamente lunga (dal 1882 ad ora) alcuni di questi possono contenere qualche piccola quantità degli idrocarburi che hanno il punto di ebullizione più prossimo.

Le costanti capillari furono misurate impiegando un catetometro di Perreaux e per i diametri un microscopio di Merz (modello grande) a cui si adattava una vite micrometrica di passo studiato col millimetro diviso in 100 parti costruito dall'officina Ginevrina (Plainpalais).

Per gli indici di rifrazione usammo un cerchio di 30 centimetri di diametro sul quale si apprezzavano bene col nonio e i microscopî i 30″ ed anche meno; ed un prisma tutto di un pezzo costruito dal Merz così perfettamente, che vuoto non deviava affatto i raggi.

I calori specifici furono misurati con calorimetri in tutto uguali a quelli descritti dall'illustre Berthelot nella sua *Meccanica chimica* (T. I, pag. 139 a 276) ed una stufa non gran fatto diversa da quella di Regnault (della quale abbiamo dato un cenno nella nostra Memoria sul cal. spec. della mellite) [1]. I termometri calorimetrici erano di Baudin a $1/50$ di grado e confrontati con una normale ad $1/10$ di grado costruito dal fu Geissler nel 1875 e da noi *paragonato col termometro ad aria.*

Così pure il barometro che serviva per calcolare la temperatura entro la stufa Regnault, era un Fortin a grande diametro, per un mese paragonato col barometro dell'Osservatorio di Firenze mercè la gentilezza dell'egregio collega ed amico cav. prof. C. Pittei; alle altezze barometriche debitamente ridotte a zero dovevamo aggiungere $0,^{mm}48$ perchè il nostro barometro andasse d'accordo con quello del R. Osservatorio centrale di Roma [2].

Prima di accingerci a studiare le proprietà fisiche degli idrocarburi da noi separati, ne misurammo la densità del vapore, e il peso specifico allo stato liquido, i quali combinavano discretamente con quelli trovati da Pelouze e Cahours, le differenze essendo ora in un senso ora in un altro.

Questi resultati sono consegnati nelle tavole seguenti.

Densità, dilatazione e volumi molecolari all'ebullizione. — La densità è stata misurata a tre diverse temperature, cioè a 0°, a circa 15° ed a circa 30°, impiegando una boccetta di Regnault, cilindrica assai lunga e di piccolo diametro, munita di tratti nella parte capillare e di tappo smerigliato.

Dapprima fu determinato il coefficiente di dilatazione del vetro della boccetta di Regnault che doveva adoperarsi deducendolo dal peso del mercurio che la riempiva a zero ed a 100° e dal coefficiente di dilatazione del mercurio.

Ammesso per coefficiente medio di dilatazione del mercurio fra 0° e 100° il numero 0,00018153 risultò per coefficiente di dilatazione cubica del vetro della boccetta il numero 0,00002717 [3].

[1] Bartoli e Stracciati, Nuovo Cimento, serie 3ª, t. XV, pag. 5, e Gazzetta chimica, t. XIV.

[2] Nelle nostre determinazioni di calorico specifico degli idrocarburi non abbiamo creduto che fosse il caso di ridurre le temperature a *gradi normali*, facendo cioè le correzioni dovute alla latitudine e alla altitudine, quali sono indicate nel tomo I dei *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*, Gaut-Vill. 1881, perchè più gravi ci sembrano gli errori che provengono dal non essere ancora determinato con sicurezza come varii il calorico specifico dell'acqua da 0° a 30° che sono i limiti delle esperienze calorimetriche.

[3] Il coefficiente 0,000,181,53 è quello ammesso dal Regnault pel mercurio; il Broch ricalcolando le esperienze di Regnault ha trovato 0,000182161 (*Travaux et Mémoires du Bureau international des poids*, ecc. t. II, 1883). Il numero da noi trovato pel coefficiente di dilatazione del vetro coincide presso a poco con quello 0,00002761 che dà il Recknagel pel vetro ordinario fra 0° e 100°, ed è vicino a quello 0,00002648 che dà il Regnault.

Si determinò poi con ogni cura il peso dell'acqua stillata che riempiva la boccetta a zero, e da questo si calcolò il peso nel vuoto dell'acqua al maximum di densità che avrebbe riempito la boccetta se questa avesse conservato lo stesso volume che aveva a zero: si trovò il numero 33^{gr},95150 che è la costante della boccetta, o il numero per cui bisogna dividere i pesi (ridotti al vuoto e corretti per la dilatazione del vetro) degli altri liquidi che riempiono la boccetta, per avere la loro densità (¹).

Dopo determinate le densità a queste tre diverse temperature (cioè 0°, circa 15° e circa 30°) ci siamo serviti dei valori trovati per calcolare i due coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o\,(1 - \alpha t - \beta t^2)$$

la quale ammettiamo rappresenti in quel ristretto intervallo di temperatura, la densità D_t dei vari liquidi studiati in funzione della densità a 0°, D_o e della temperatura t.

Determinati quei coefficienti α e β, ce ne siamo serviti per calcolare la densità pei vari liquidi di 5° in 5°; e dalla diversità a 0° e a 30° abbiamo poi dedotto il coefficiente medio di dilatazione fra 0° e 30°.

I dati sperimentali relativi ai vari liquidi, i coefficienti α e β, le densità calcolate ecc. si trovano riuniti per ciascun liquido nelle tavole seguenti.

Idruro di àmilo $C_5\,H_{12}$ (dagli olii leggeri). Bolle + 30°.

Peso nel vuoto dell'idruro di amilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 21,7403
a + 15°,72 » 21,2593
a + 29°,92 » 20,7714

calcolando le densità corrispondenti si ottiene (²):

densità a 0° = 0,640251
» a + 15°,72 = 0,625806
» a + 29°,92 = 0,611219

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o\,(1 - \alpha t - \beta t^2)$$

$$\alpha = 0{,}001\ 346\ 373$$

$$\beta = 0{,}000\ 005\ 653\ 208$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperatura	Densità
0°	0,640251
+ 5°	0,635852
+ 10°	0,631269
+ 15°	0,626507
+ 20°	0,621563
+ 25°	0,616439
+ 30°	0,611133
+ 35°	0,605647

(¹) Dopo finite tutte le misure di densità si rimisurò la costante della boccetta e trovammo ancora lo stesso numero 33,95150.

(²) Le densità sono quelle relative all'acqua a 4° cioè al massimo di densità.

Idruro di caproilo $C_6 H_{14}$ (dagli olii leggeri). Bolle + 68°.

Peso nel vuoto dell'idruro di caproilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 23,5990
a + 15°,12 » 23,1938
a + 30°,12 » 22,7191

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,694990
» a + 15°,12 = 0,682774
» a + 30°,12 = 0,668529

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_0 \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0,001 \ 060 \ 109$$
$$\beta = 0,000 \ 006 \ 771 \ 339$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperatura	Densità
0°	0,694990
+ 5°	0,691189
+ 10°	0,687152
+ 15°	0,682880
+ 20°	0,678372
+ 25°	0,673630
+ 30°	0,668652
+ 35°	0,663438

Idruro di enantilo $C_7 H_{16}$ (dagli olii leggeri). Bolle 92° a 94°.

Peso nel vuoto dell'idruro di enantilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 24,8838
a + 15°,52 » 24,4468
a + 30°,12 » 24,0339

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,732827
« a + 15°,52 = 0,719654
« a + 30°,12 = 0,707217

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_0 \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0,001 \ 156 \ 064$$
$$\beta = 0,000 \ 000 \ 136 \ 491$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperatura	Densità
0°	0,732827
+ 5°	0,728589
+ 10°	0,724345
+ 15°	0,720097
+ 20°	0,715843
+ 25°	0,711585
+ 30°	0,707322
+ 35°	0,703053

Idruro di enantilo $C_7 H_{16}$ (dal petrolio grezzo) Bolle 92° a 94°.

Peso nel vuoto dell'idruro di enantilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 24,7998
a + 15°,62 » 24,3599
a + 31°,52 » 23,9009

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,730353
» a + 15°,62 = 0,717092
» a + 31°,52 = 0,703277

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_0 \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$

$$\alpha = 0,001\ 149\ 001$$

$$\beta = 0,000\ 000\ 861\ 598$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,730353
+ 5°	0,726142
+ 10°	0,721899
+ 15°	0,717624
+ 20°	0,713318
+ 25°	0,708981
+ 30°	0,704613
+ 35°	0,700215

Idruro di caprilo $C_8 H_{18}$. Bolle 116° a 118°.

Peso nel vuoto dell'idruro di caprilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 25,3417
a + 14°,82 » 24,9468
a + 30°,72 » 24,5148

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,746312
» a + 14°,82 = 0,734385
» a + 30°,72 = 0,721357

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_0 \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$

$$\alpha = 0,001\ 068\ 842$$

$$\beta = 0,000\ 000\ 641\ 196$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,746312
+ 5°	0,742312
+ 10°	0,738288
+ 15°	0,734239
+ 20°	0,730167
+ 25°	0,726071
+ 30°	0,721966
+ 35°	0,712807

Idruro di pelargilo $C_9 H_{20}$. Bolle 136° a 138°.

Peso nel vuoto dell'idruro di pelargilo che riempie la boccetta di Regnault.

a 0° grammi 25,8866
a + 15°,02 » 25,4927
a + 29°,72 » 25,0988

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,762360
» a + 15°,02 = 0,750453
» a + 20°,72 = 0,738561

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0,001\ 029\ 104$$
$$\beta = 0,000\ 000\ 715\ 620$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,762360
+ 5°	0,758423
+ 10°	0,754460
+ 15°	0,750469
+ 20°	0,746451
+ 25°	0,742405
+ 30°	0,738332
+ 35°	0,734232

Idruro di rutilo $C_{10} H_{22}$. Bolle 158° a 162°.

Peso nel vuoto dell'idruro di rutilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 26,1846
a + 15°,52 » 25,8106
a + 30°,32 » 25,4227

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,771136
» a + 15°,52 = 0,759801
» a + 30°,32 = 0,748083

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0,000\ 906\ 298$$
$$\beta = 0,000\ 002\ 629\ 383$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,771136
+ 5°	0,767591
+ 10°	0,763944
+ 15°	0,760196
+ 20°	0,756347
+ 25°	0,752397
+ 30°	0,748345
+ 35°	0,744192

Idruro di undecilo $C_{11} H_{24}$. Bolle 180° a 182°.

Peso nel vuoto dell'idruro di undecilo contenuto nella boccetta di Regnault:

a 0° grammi 26,5425
a + 14°,92 » 26,1956
a + 29°,62 » 25,8246

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,781676
» a + 14°,92 = 0,771144
» a + 29°,62 = 0,759921

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o \, (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0{,}000\ 865\ 812$$
$$\beta = 0{,}000\ 002\ 491\ 556$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,781676
+ 5°	0,778244
+ 10°	0,774714
+ 15°	0,771086
+ 20°	0,767361
+ 25°	0,763539
+ 30°	0,759620
+ 35°	0,755603

Idruro di Laurilo $C_{12} H_{26}$. Bolle 198° a 200°.

Peso nel vuoto dell'idruro di laurilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 26,8765
a + 15°,32 » 26,5085
a + 31°,32 » 26,1106

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,791512
» a + 15°,32 = 0,780348
» a + 31°,32 = 0,768303

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o \, (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0{,}000\ 905\ 877$$
$$\beta = 0{,}000\ 000\ 971\ 361$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,791512
+ 5°	0,787908
+ 10°	0,784265
+ 15°	0,780584
+ 20°	0,776864
+ 25°	0,773106
+ 30°	0,769310
+ 35°	0,765475

Idruro di cocinilo $C_{13}H_{28}$. Bolle 218° a 220°.

Peso nel vuoto dell'idruro di cocinilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 27,2224
a + 15°,72 » 26,8685
a + 30°,62 » 26,4995

calcolando le densità corrispondenti si trova:

densità a 0° = 0,801699
» a + 15°,72 = 0,790938
» a + 30°,62 = 0,779759

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0{,}000\ 811\ 813$$
$$\beta = 0{,}000\ 002\ 676\ 929$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si trova:

Temperature	Densità
0°	0,801699
+ 5°	0,798391
+ 10°	0,794976
+ 15°	0,791454
+ 20°	0,787824
+ 25°	0,784087
+ 30°	0,780243
+ 35°	0,776291

Idruro di miristilo $C_{14}H_{30}$. Bolle 236° a 240°.

Peso nel vuoto dell'idruro di miristilo contenuto nella boccetta di Regnault:

a 0° grammi 27,6054
a + 15°,32 » 27,2584
a + 30°,72 » 26,8885

calcolando le densità corrispondenti si trova:

densità a 0° = 0,812978
» a + 15°,32 = 0,802426
» a + 30°,72 = 0,791206

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_o \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0{,}000\ 822\ 841$$
$$\beta = 0{,}000\ 001\ 592\ 986$$

Temperature	Densità
0°	0,812978
+ 5°	0,809602
+ 10°	0,806159
+ 15°	0,802653
+ 20°	0,799081
+ 25°	0,795445
+ 30°	0,791744
+ 35°	0,787979

Idruro di benilo $C_{15} H_{32}$. Bolle 248° a 252°.

Peso nel vuoto dell'idruro di benilo che riempie la boccetta di Regnault:

a 0° grammi 27,9253
a + 15°,52 » 27,5894
a + 30°,32 » 27,2394

calcolando le densità corrispondenti si ottiene:

densità a 0° = 0,822399
» a + 15°,52 = 0,812166
» a + 30°,32 = 0,801537

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_0 \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0,000\ 765\ 179$$
$$\beta = 0,000\ 002\ 356\ 519$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,822399
+ 5°	0,819205
+ 10°	0,815913
+ 15°	0,812524
+ 20°	0,809039
+ 25°	0,805456
+ 30°	0,801777
+ 35°	0,797997

Idruro di palmitilo $C_{16} H_{34}$. Bolle 278° a 282°.

Peso nel vuoto dell'idruro di palmitilo contenuto nella boccetta di Regnault:

a 0° grammi 28,1403
a + 14°,92 » 27,8374
a + 30°,22 » 27,4944

calcolando le densità corrispondenti si trova:

densità a 0° = 0,828731
» a + 14°,92 = 0,819478
» a + 30°,22 = 0,809044

da cui si deduce pei coefficienti α e β della formula:

$$D_t = D_0 \ (1 - \alpha t - \beta t^2)$$
$$\alpha = 0,000\ 711\ 498$$
$$\beta = 0,000\ 002\ 468\ 680$$

per mezzo dei quali calcolando le densità di 5° in 5° si ottiene:

Temperature	Densità
0°	0,828731
+ 5°	0,825732
+ 10°	0,822630
+ 15°	0,819426
+ 20°	0,816120
+ 25°	0,812711
+ 30°	0,809201
+ 35°	0,805588

Servendoci dei valori delle densità a 0° e a 30° abbiamo calcolato il coefficiente medio di dilatazione dei vari idrocarburi fra 0° e 30°.

Nella tavola seguente sono riuniti i valori trovati:

Nome dell' idrocarburo	Formula	Coefficiente medio di dilatazione fra 0° e 30°
Idruro di amilo	$C_5 H_{12}$	0,0015890
» » caproilo	$C_6 H_{14}$	0,0013130
» » enantilo	$C_7 H_{16}$	0,0012019
» » enantilo	$C_7 H_{16}$	0,0012177
» » caprilo	$C_8 H_{18}$	0,0011240
» » pelargilo	$C_9 H_{20}$	0,0010848
» » rutilo	$C_{10}H_{22}$	0,0010151
» » undecilo	$C_{11}H_{24}$	0,00096785
» » laurilo.	$C_{12}H_{26}$	0,00096198
» » cocinilo	$C_{13}H_{28}$	0,00091664
» » miristilo.	$C_{14}H_{30}$	0,00089397
» » benilo.	$C_{15}H_{32}$	0,00085734
» » palmitilo.	$C_{16} H_{34}$	0,00080450

Si vede di qui come questi coefficienti decrescano con regolarità col crescere del peso molecolare dell'idrocarburo.

Abbiamo anche determinato con la stessa boccetta di cui si conosceva il coefficiente di dilatazione, la densità dei diversi idrocarburi alla temperatura di ebullizione. La boccetta contenente il liquido veniva riscaldata lentamente fino al punto di ebullizione, per mezzo di un bagno di petrolio, che bolle a 400°, e contenente circa tre litri di liquido; nel bagno era un agitatore e un termometro Baudin che andava da 0° a 300°, e si manteneva per qualche tempo il bagno alla temperatura di ebullizione dell'idrocarburo (s'intende che alle indicazioni del termometro si faceva sempre la correzione per la parte della colonna non immersa, e quella dello spostamento dello zero, che si verificava dopo ciascheduna esperienza).

Per gli idrocarburi che bollivano ad alta temperatura non credemmo prudente di arrivare fino al punto di ebullizione e ne determinammo la densità qualche grado al di sotto: poi da questa densità e dalla dilatazione del liquido fra 0° e questa temperatura calcolammo la densità alla temperatura di ebullizione.

Nella tavola seguente sono scritti i coefficienti medii di dilatazione fra 0° e la temperatura di ebullizione misurata col termometro a mercurio, dedotti dalle densità a 0° ed alla ebullizione.

Idrocarburi del petrolio di Pensilvania	Coefficiente di dilatazione medio fra 0° e la ebullizione
C_5H_{12}	0,0015890
C_6H_{14}	0,00140556
C_7H_{16} (dagli olii volatili del petrolio)	0,00141922
C_7H_{16} (dal petrolio di America)	0,00139875
C_8H_{18}	0,00121160
C_9H_{20}	0,00126808
$C_{10}H_{22}$	0,00118594
$C_{11}H_{24}$	0,00116581
$C_{12}H_{26}$	0,00113730
$C_{13}H_{28}$	0,00108455
$C_{14}H_{30}$	0,00110872
$C_{15}H_{32}$	0,00108811
$C_{16}H_{34}$	0,00103782

Da questa tavola si vede che anche i coefficienti di dilatazione medi fra 0° e l'ebullizione decrescono col crescere del peso molecolare.

Nella tavola seguente sono scritti i *volumi molecolari* alla temperatura di ebullizione.

Nome del liquido	Formula	P Peso molecolare	t temperatura di ebullizione	D densità osservata alla temperatura di ebullizione	$\frac{P}{D}$	Δ incremento di volume portato da CH_2	Volume mol. calc. colla regola di Kopp (1)
Idruro di amilo	C_5H_{12}	72	+ 30°	0,611133 a + 30°	117,814		121
» di caproilo. . . .	C_6H_{14}	86	+ 68°	0,634359 a + 68	135,570	17,756	143
» di enantilo (dagli olii leggeri)	C_7H_{16}	100	+92° a + 94°	0,647381 a + 93	154,468	18,898	165
» di enantilo (dal petrolio)	C_7H_{16}	100	92 a 94	0,646282 a 93	154,731	19,161	165
» di caprilo	C_8H_{18}	114	116 a 118	0,653652 a 117	174,405	19,674	187
» di pelargilo . . .	C_9H_{20}	128	136 a 138	0,649261 a 137	197,147	22,742	209
» di rutilo	$C_{10}H_{22}$	142	158 a 162	0,647529 a 160	219,296	22,149	231
» di undecilo. . . .	$C_{11}H_{24}$	156	180 a 182	0,644800 a 181	241,935	22,639	253
» di laurilo	$C_{12}H_{26}$	170	198 a 200	0.644206 a 199	263,890	21,955	275
» di cocinilo	$C_{13}H_{28}$	184	218 a 220	0,646906 a 219	284,431	20,541	297
» di miristilo . . .	$C_{14}H_{30}$	198	236 a 240	0,641268 a 238	308,763	24,332	319
» di benilo.	$C_{15}H_{32}$	212	258 a 262	0,638504 a 260	332,026	23,263	341
» di palmitilo . . .	$C_{16}H_{34}$	226	278 a 282	0,639652 a 280	353,317	21,291	363

Da questa tavola si vede che i volumi molecolari sono ben lungi dal soddisfare alla formula di Kopp $V = 11a + 5{,}5b$, e che inoltre l'aumento di volume corrispondente a CH_2 non è costante.

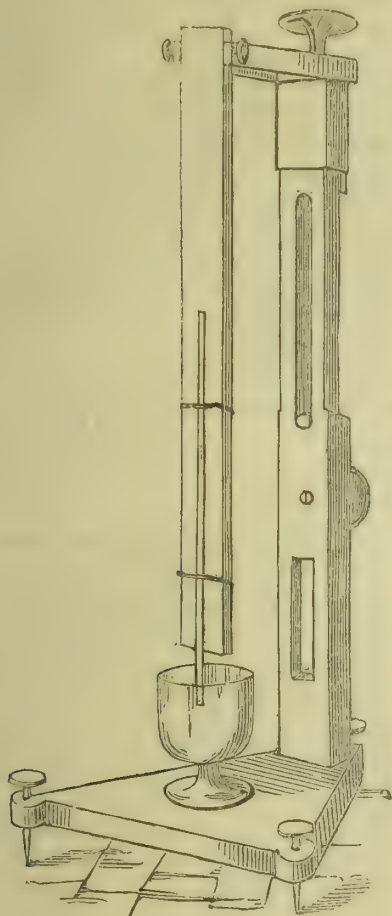
Le differenze sono poi tali da non potersi attribuire ad errori di osservazione.

Costanti capillari. — Le costanti capillari furono misurate col metodo di Quincke (2).

(1) Cioè con la formula: $V = 11a + 5{,}5b$, essendo a il numero degli atomi di carbonio, e b il numero di atomi d'idrogeno di cui è costituita la molecola dell'idrocarburo.

(2) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 139, pag. 80 (anno 1870) e Bd. 160, pag. 337 e pag. 560.

L'apparecchio adoperato era stato costruito quattro anni fa in questo Gabinetto dal meccanico sig. Turchini secondo le indicazioni di uno di noi (Bartoli). Tre viti calanti (Vedi tav. I, fig. 1) sostengono un disco orizzontale sul quale s'innalza verticalmente un'asta di ottone in una scanalatura della quale scorre un'altra asta pure di ottone che può fissarsi con una vite di pressione. La parte superiore dell'asta mobile entra nella scanalatura di un' altra asta simile a quella fissa ed alla quale possono comunicarsi piccoli movimenti verticali per mezzo di una vite. Questa ultima asta porta due bracci orizzontali i quali sostengono una lastra di vetro da specchio per mezzo di due viti di pressione che agiscono su due piccoli incavi praticati nella grossezza della lastra stessa.

(Fig. 1)

Si può così facilmente rendere la lastra verticale ed alzarla od abbassarla secondo che occorre.

Il liquido di cui vuol misurarsi l'altezza capillare è contenuto in un bicchierino di vetro posato sul disco orizzontale dell'apparecchio, e il tubo capillare è mantenuto verticale contro la lastra da specchio per mezzo di due anelli di gomma elastica. La lastra da specchio è divisa in millimetri e potrebbe senz'altro servire a misurare l'innalzamento del liquido nel tubo ma nondimeno abbiamo preferito servirci del catetometro.

I tubi capillari da adoperare si ottenevano volta volta tirando un tubo di vetro, ben fusibile a pareti piuttosto grosse, scaldato con una lampada, e adoperando subito la parte mediana che è la più cilindrica. Accanto al bicchierino che contiene il liquido si sospendeva un termometro il quale serviva per indicarne la temperatura.

Il diametro del tubo era misurato al microscopio, servendoci per ciò di un eccellente microscopio di Merz (quello di maggior prezzo ch'egli costruisce) e impiegando una buona vite micrometrica adattata alla piattaforma del microscopio stesso.

Per avere il diametro della sezione del tubo corrispondente al livello del liquido, dopo misurato l'innalzamento del liquido, senza muovere il tubo si premeva con un dito contro la lastra di vetro perchè non avesse a scorrere, e con una buona lima da orafi si incideva il vetro nel punto opportuno; così il tubo si rompeva nel punto voluto e ordinariamente si riusciva ad ottenere una sezione ben piana e perpendicolare all'asse del tubo. Non si teneva conto di quelle esperienze nelle quali ciò non accadeva, come pure di quelle in cui la sezione del tubo non fosse stata sufficientemente circolare.

Tagliato così il tubo, se ne staccava un pezzetto della lunghezza di circa un centimetro e s'introduceva attraverso un disco di sughero che si fissava per mezzo

di cera su una lastrina di vetro tenuta fissa da due molle sul telaio rettangolare del microscopio, che è mobile parallelamente ai suoi lati. Muovendo opportunamente quel telaio si poteva dare al tubo una posizione tale che uno dei fili del reticolo del microscopio riuscisse tangente alla sezione del tubo che dovevasi misurare: ottenuto ciò si spostava per mezzo della vite micrometrica il telaio e quindi il tubo finchè quel filo del reticolo divenisse tangente alla sezione del tubo dalla parte opposta: lo spostamento della vite micrometrica misurava il diametro del tubo. Si misuravano così, quattro od anche sei diametri del tubo, facienti fra loro angoli uguali e si prendeva la media dei diametri misurati, quando questi erano poco differenti.

Questo metodo di Quincke per misurare le altezze capillari è molto esatto e di facile applicazione, ed è per questo che lo abbiamo preferito.

Riportiamo qui sotto i risultati di due serie di esperienze sull'acqua stillata, eseguite, in questo Gabinetto, seguendo quel metodo di Quincke, dal sig. Principe Galitzine di Pietroburgo e dal sig. Adolfo Mochi di Firenze.

Nelle tavole seguenti:

h indice l'innalzamento del liquido nel tubo capillare,

r il raggio del tubo,

d la densità del liquido alla temperatura della esperienza.

Nella tavola seguente sono scritti i risultati delle esperienze del sig. Galitzine.

Temperatura	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r\cdot\frac{d}{2}$
Fu di circa 22° in tutte le esperienze	99,10	0,1570	15,567	7,767
	111,06	0,1394	15,488	7,729
	143,04	0,1083	15,495	7,733
	157,20	0,0988	15,535	7,744
	241,90	0,0649	15,701	7,826
	183,82	0,0853	15,682	7,825
	138,78	0,1137	15,784	7,876
	154,82	0,1002	15,516	7,735
	143,68	0,1095	15,737	7,852
		Media	15,6117	7,7875

Nella tav. seguente sono scritti i resultati ottenuti collo stesso metodo dal sig. Mochi.

Temperatura	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r\cdot\frac{d}{2}$
+ 26°	65,70	0,230	15,35	7,651
26	74,11	0,209	15,14	7,545
27	111,80	0,135	15,10	7,524
26	69,99	0,219	15,34	7,645
26	110,35	0,138	15,23	7,590
27	89,96	0,169	15,21	7,579
27	108,14	0,142	15,36	7,653
27	130,26	0,118	15,37	7,658
27	88,32	0,172	15,20	7,574
		Media	15,2556	7,6021

Riportiamo nelle tavole seguenti i risultati delle determinazioni fatte con i varî idrocarburi.

Indichiamo al solito con t la temperatura, con h l'innalzamento del liquido nel tubo, con r il raggio del tubo e con d_t la densità del liquido alla temperatura t dell'osservazione.

Idruro di amilo (dagli olii leggeri). Bolle a 30°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+10°,5	31,0	0,165	5,20
10,5	33,0	0,154	5,09
12,2	30,8	0,174	5,37
12,2	12,8	0,394	5,09
		Media	5,188

onde:

$$d_{11^\circ} = 0{,}6303$$

$$\alpha = \left(h + \frac{r}{3}\right) r \,.\, \frac{d}{2} = 1{,}635$$

Idruro di caproilo

(dagli olii leggeri). Bolle a 68°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+10°,8	19,66	0,312	6,16
10,8	17,36	0,344	6,01
11,2	14,60	0,396	5,81
11,2	21,60	0,271	5,77
		Media	5,938

$d_{11^\circ} = 0{,}6863$

$\alpha \;\; = 2{,}038$

Idruro di enantilo

(dagli olii leggeri). Bolle fra 92° e 94°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+12°,12	22,42	0,306	6,89
12,12	20,04	0,340	6,85
12,22	22,14	0,288	6,41
12,22	21,05	0,303	6,41
		Media	6,640

$d_{12^\circ} = 0{,}7226$

$\alpha \;\; = 2{,}399$

Idruro di enantilo

(dal petrolio grezzo). Bolle fra 92° e 94°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+12°,02	19,66	0,330	6,52
12,02	20,77	0,324	6,76
10,72	21,22	0,309	6,59
		Media	6,627

$d_{12^\circ} = 0{,}7202$

$\alpha \;\; = 2{,}387$

Idruro di caprilo

Bolle fra +116° e +118°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+11°,02	17,10	0,411	7,08
11,02	18,77	0,353	6,67
11,12	20,70	0,308	6,40
		Media	6,717

$d_{11^\circ} = 0{,}7375$

$\alpha \;\; = 2{,}477$

Idruro di pelargilo

Bolle fra +136° e +138°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+11°,92	21,26	0,319	6,82
15,02	16,50	0,398	6,63
15,02	21,82	0,298	6,54
15,12	24,30	0,279	6,80
15,12	27,00	0,245	6,65
11,82	25,70	0,268	6,91
11,92	24,92	0,278	6,95
		Media	6,757

$d_{14^\circ}=0,7513$

$\alpha\ =2,538$

Idruro di rutilo

Bolle fra +158° e +162°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+10°,72	24,98	0,278	6,97
13,62	37,66	0,179	6,75
13,62	30,44	0,226	6,90
13,72	32,22	0,215	6,94
13,72	29,30	0,232	6,83
10,82	17,80	0,391	7,03
		Media	6,904

$d_{13^\circ}=0,7617$

$\alpha\ =2,629$

Idruro di undecilo

Bolle fra +180° e +182°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+13°,92	29,84	0,223	6,97
13,92	30,08	0,231	6,97
13,92	23,96	0,290	6,99
14,02	35,76	0,193	6,93
		Media	6,965

$d_{14^\circ}=0,7718$

$\alpha\ =2,688$

Idruro di laurilo

Bolle fra +198° e +200°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+10°,92	41,44	0,172	7,14
11,02	32,00	0,223	7,15
14,12	28,04	0,253	7,13
14,12	32,32	0,216	7,01
14,22	30,50	0,232	7,10
		Media	7,106

$d_{12^\circ,8}=0,7826$

$\alpha=2,781$

Idruro di cocinilo

Bolle fra 218° e 220°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+12°,32	47,78	0,151	7,24
12,32	37,90	0,189	7,17
15,22	34,92	0,205	7,19
15,22	24,66	0,287	7,12
15,22	28,42	0,254	7,23
		Media	7,190

$d_{14^\circ}=0,7922$

$\alpha\ =2,848$

Idruro di miristilo

Bolle fra +236° e +240°

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
+12°,12	32,80	0,222	7,30
13,92	28,08	0,256	7,22
13,92	28,86	0,250	7,24
13,92	45,96	0,158	7,27
12,02	31,75	0,232	7,38
12,02	32,49	0,218	7,10
		Media	7,252

$d_{13^\circ}=0,8040$

$\alpha\ =2,915$

Idruro di benilo
Bolle fra $+258°$ e $+262°$

t	h'	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
$+12°,42$	49,96	0,148	7,40
12,42	26,12	0,281	7,39
12,62	33,93	0,216	7,38
14,52	30,58	0,239	7,32
14,52	33,38	0,220	7,34
		Media	7,366

$d_{13°,3} = 0,8137$
$\alpha = 2,997$

Idruro di palmitilo
Bolle fra $+278°$ e $+282°$

t	h	r	$\left(h+\frac{r}{3}\right)r$
$+13°,12$	53,54	0,139	7,45
13,22	32,70	0,226	7,41
13,32	34,50	0,213	7,36
15,02	34,24	0,216	7,41
15,02	38,50	0,387	7,45
		Media	7,416([1])

$d_{14°} = 0,8200$
$\alpha = 3,041$

Da queste tavole si vede subito che le due costanti capillari a^2 ed α, misurate alla temperatura ordinaria, crescono in questi idrocarburi col crescere del peso molecolare. Questo fatto contraddice ed annulla la regola 7ª che il Wilhelmy avea data come generale ([2]).

Coefficiente di attrito. — Fu misurato con un apparecchio di vetro simile a quello che si trova descritto in tutti i trattati ([3]). Si misurava cioè il tempo che impiegava a fluire un dato volume di liquido, sotto una pressione nota e costante, per un tubo capillare orizzontale, di cui l'estremo aperto era curvato un poco in basso in modo da essere immerso nel liquido che sgorgava.

Il tempo si misurava con un eccellente cronometro di Breguet a punteggio; regolato per quarti di secondo: si aveva gran cura che la temperatura rimanesse costante e si misurava con un termometro campione diviso in decimi di grado.

Avendo nelle stesse condizioni fatto fluire l'acqua per lo stesso apparecchio, abbiamo potuto determinare il rapporto fra il coefficiente di attrito dei vari idrocarburi e quello dell'acqua alla stessa temperatura preso come unità; ossia quello che i signori Pribram e Handl chiamano viscosità specifica (specifische Zähgikeit) ([4]).

Per passare poi da questo numero al coefficiente di attrito si sono moltiplicati i numeri della quarta colonna per 0, 000096454 che si deduce dalla formula ([5]):

$$\eta_t = \frac{0,0001816}{1+0,0336793t+0,0002209936t^2}$$

facendovi $t = 22°,8$.

([1]) Il Quincke (Pogg. Ann. CXXXV, s. 621-646) trova per la paraffina fusa, alla temperatura di fusione $a^2 = 8,14$.

([2]) Wilhelmy, *Ueber die Abhängigkeit der Capillaritäts Coefficienten der Flussigkeiten von ihrer Zusammensetzung*. Ann. di Poggendorff, vol. 121, pag. 44, anno 1864; vedi anche Bartoli, Nuovo Cimento, serie 3ª, t. VI, pag. 144.

([3]) Compara Wüllner, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. I, S. 329 (Leipzig, 1874).

([4]) R. Pribram e Al. Handl, *Ueber die specifische Zähgikeit der Flüssigkeiten und ihre Beziehung zur chemischen Constitution* (Beiblätter, Bd. III, S. 329).

([5]) Compara Wüllner, loc. cit.

Nome del liquido	Formula	D Peso specifico alla temperatura della esperienza	Viscosità specifica	η coefficiente di attrito assoluto
Acqua		0,99764	1 a 22°,8	0,000096454 a 22°,8
Idruro di amilo.	$C_5 H_{12}$	0,620	0,2663 a 21	0,00002657 a 21
» di caproilo . . .	$C_6 H_{14}$	0,6745	0,34742 a 23,8	0,000033510 a 23,8
» di enantilo (dagli olii leggeri)	$C_7 H_{16}$	0,7124	0,47437 a 24,1	0,000045755 a 24,1
» di enantilo (dal petrolio)	$C_7 H_{16}$	0,7095	0,47137 a 24,3	0,000045466 a 24,3
» di caprilo. . . .	$C_8 H_{18}$	0,7284	0,55600 a 22,2	0,000053628 a 22,2
» di pelargilo . . .	$C_9 H_{20}$	0,7446	0,65408 a 22,3	0,000063089 a 22,3
» di rutilo.	$C_{10}H_{22}$	0,7545	0,81887 a 22,3	0,000078983 a 22,3
» di undecilo . . .	$C_{11}H_{24}$	0,7653	1,00084 a 22,7	0,000096534 a 22,7
» di laurilo	$C_{12}H_{26}$	0,7744	1,2402 a 23,3	0,00012817 a 23,3
» di cocinilo . . .	$C_{13}H_{28}$	0,7854	1,6380 a 23,3	0,00015798 a 23,3
» di miristilo . . .	$C_{14}H_{30}$	0,7977	2,2524 a 21,9	0,00021725 a 21,9
» di benilo	$C_{15}H_{32}$	0,8076	2,9738 a 22,0	0,00028683 a 22,0
» di palmitilo. . .	$C_{16}H_{34}$	0,8147	3,7948 a 22,2	0,00036602 a 22,2

Si vede da questa tavola come i coefficienti di attrito alla temperatura di 22° - 23° crescano rapidamente nei vari idrocarburi col crescere della complessità della formula (').

Indici di rifrazione. — Gl' indici di rifrazione furono misurati col metodo della deviazione minima. Come spettrometro ci siamo serviti di un grande apparecchio di Jamin per lo studio della riflessione metallica, costruito dal Duboscq: il cerchio graduato aveva 30 centimetri di diametro.

Un cannocchiale munito di reticolo, portato da un sostegno mobile attorno all' asse verticale che passa pel centro del cerchio graduato, può farsi ruotare mantenendolo sempre parallelo ad un raggio del cerchio stesso. Il sostegno sul quale è fissato il cannocchiale porta un nonio che scorre sulla graduazione del cerchio e permette di apprezzare benissimo i 30″ ed anche frazioni minori; una vite di richiamo serve per comunicare i piccoli movimenti.

La piattaforma centrale che deve sostenere il prisma è mobile allo stesso modo del cannocchiale. All' apparecchio è poi unito un collimatore fisso, coll'asse parallelo ad un raggio del cerchio graduato; porta una fenditura verticale davanti alla quale si pone la sorgente di luce che nel caso nostro era una lampada ad alcool salato.

Il prisma adoprato era un bel prisma tutto in vetro costruito dal Merz.

Si determinò dapprima l' angolo rifrangente del prisma; l' apparecchio serviva allora come un goniometro di Babinet.

La misura dell' angolo del prisma fu ripetuta 10 volte e nei calcoli successivi fu accettato come valore dell' angolo rifrangente del prisma la media dei valori trovati cioè 60° 3′ 42″.

(') Analoga osservazione aveva fatta il Rellstabb per la serie degli alcooli: compara Wullner, loc. cit. pag. 331.

Il prisma vuoto interposto fra il collimatore e l'oculare non deviava affatto i raggi luminosi, quindi non doveva farsi nessuna correzione ai valori trovati per la deviazione minima.

Chiamando A l'angolo rifrangente del prisma, δ la deviazione minima ed n l'indice assoluto di rifrazione si ha:

$$n = \frac{\operatorname{sen} \frac{A + \delta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} \times 1{,}0002947$$

essendo 1,000 294 7 l'indice di rifrazione dell'aria pel raggio D.

Determinammo prima l'indice di rifrazione dell'acqua stillata e trovammo a $+16^\circ{,}42$ $n = 1{,}333{,}451$.

La deviazione minima per ciascun liquido fu misurata tre o quattro volte e fu presa la media dei valori trovati i quali non differirono mai più di 1' ed ordinariamente differivano solo di 30''.

Riuniamo nella tavola seguente i resultati delle determinazioni fatte.

Nome del liquido	Formula	Temp.	Deviazione minima	n indice di rifrazione pel raggio D	$\frac{n-1}{d}$	$\frac{(n-1)}{d}$ calcolato [1]
Idruro di amilo.	$C_5 H_{12}$	16°,52	25°33'38''	1,358302	0,573279	0,57176
» di caproilo . . .	$C_6 H_{14}$	16,62	27,42, 8	1,385469	0,565686	0,56834
» di enantilo (dagli olii leggeri)	$C_7 H_{16}$	15,92	29, 9,20	1,403621	0,561119	0,56588
» di enantilo (dal petrolio)	$C_7 H_{16}$	15,92	29, 4	1,402521	0,561528	0,56588
» di caprilo	$C_8 H_{18}$	15,92	29,50	1,412018	0,561536	0,56402
» di pelargilo . . .	$C_9 H_{20}$	16,62	30,32,30	1,420733	0,561601	0,56258
» di rutilo.	$C_{10}H_{22}$	16,92	30,57	1,425736	0,561087	0,56141
» di undecilo . . .	$C_{11}H_{24}$	17,02	31,24,40	1,431360	0,560513	0,56046
» di laurilo	$C_{12}H_{26}$	16,52	31,51,20	1,436760	0,560341	0,55966
» di cocinilo . . .	$C_{13}H_{28}$	16,82	32,18,40	1,442272	0,559744	0,55899
» di miristilo . . .	$C_{14}H_{30}$	15,92	32,47,52	1,448094	0,558724	0,55840
» di benilo	$C_{15}H_{32}$	16,22	33,13, 8	1,453189	0,558338	0,55789
» di palmitilo. . .	$C_{16}H_{34}$	16,32	33,32, 8	1,456975	0,558272	0,55746

Calorico specifico. — Il calorico specifico dei nove idrocarburi meno volatili lo abbiamo determinato adoprandoli come liquido calorimetrico e deducendolo dal riscaldamento in essi prodotto da una massa di platino scaldata a 100° che vi si lasciava cadere.

(1) Calcolato colla formula:

$$c = \frac{5{,}0984\, n_c + 1{,}3062\, n_h}{P}$$

dove n_c è il numero degli atomi di carbonio, n_h il numero di atomi di idrogeno, P il peso molecolare della sostanza:

è 5,0984 ed 1,3062

i poteri refrangenti molecolari del carbonio e dell'idrogeno pel raggio D.

Il calorimetro e l'agitatore erano di platino e si sceglieva di una capacità proporzionata alla quantità di liquido di cui potevamo disporre. Il calorimetro era circondato, come fa il Berthelot, da un vaso di placchè coll'argento all' interno, e da una scatola di zinco a doppia parete, contenente 20 litri di acqua, rivestita all' esterno di feltro.

La massa di platino che si gettava nel calorimetro era costituita da 24 sferettine del diametro di circa 6 millimetri: erano scaldate in una stufa simile a quella di Regnault, stufa che adopriamo da due anni e che già abbiamo sommariamente descritta (¹).

Il caloricospecifico di quelle palline di platino, rispetto all'acqua, era stato determinato precedentemente, cogli stessi apparecchi e nello stesso intervallo di temperatura, e fu trovato uguale a 0,032158, (media di centinaja di esperienze concordanti).

I termometri adoprati furono due cioè il Baudin n. 9157 diviso in $^1/_{50}$ di grado ed uno di Geissler pure diviso in cinquantesimi di grado. Questi due termometri erano stati confrontati con uno normale di Geissler già confrontato col termometro ad aria.

Per difendere il termometro dall'urto delle palline che cadendo nel calorimetro avrebbero potuto spezzarlo, si era circondato il bulbo con una rete di filo di platino.

Per determinare l'equivalente in acqua del calorimetro, dell'agitatore di platino e così pure della rete di platino che proteggeva il termometro, abbiamo preso per calorico specifico di questo metallo il numero 0,03150 da noi ottenuto determinando il calorico specifico medio fra 10° e 35° della stessa lastra di platino colla quale vennero costruiti a Londra tutti i vasi calorimetrici posseduti da questo Gabinetto (²) (calorimetri, boccette di Berthelot, agitatori).

L' equivalente in acqua della parte immersa dei termometri poteva pure determinarsi con esattezza avendo il costruttore (a nostra richiesta) indicato il peso del mercurio, del bulbo, e dell' asta del termometro ed avendoci mandato un campione del vetro adoperato per la costruzione dei termometri, del quale noi abbiamo determinato il calorico specifico medio fra 10° e 35°.

Nelle tavole seguenti:

N rappresenta il numero d'ordine del registro generale delle esperienze calorimetriche eseguite in questo Gabinetto,

P il peso ridotto al vuoto del liquido contenuto nel calorimetro,

p l'equivalente in acqua del calorimetro, della parte immersa del termometro e dell'agitatore, e della rete che protegge il termometro,

T_i la temperatura iniziale del calorimetro,

T_f la temperatura finale del calorimetro corretta per la colonna del termometro non immersa,

(¹) Bartoli e Stracciati, *Sul càlorico specifico della mellite.* Nuovo Cimento, serie 3ª, t. XV e Gazzetta chimica, t. XIV.

(²) I vasi calorimetrici e così pure le boccette sono tutti di un pezzo cioè senza saldature di sorta; per cui, occorrendo vi si può anche tenere il mercurio. — Furono procurati da Londra dal chiarissimo nostro collega prof. Dall'Eco; è questa, crediamo, la prima volta che si sono ottenuti vasi così grandi, ve ne è uno di un litro, tutti di uno stesso pezzo: quelli che fa il Golaz sono saldati ad oro. E ringraziamo vivamente il prof. Dall' eco (Firenze Viale Principe Eugenio 5) per i belli e ben costruiti apparecchi che ci ha forniti, a prezzi veramente oltre ogni credere convenientissimi.

la correzione dovuta al raffreddamento del calorimetro prodotto dal raggiamento ecc. durante la esperienza,

π il peso ridotto al vuoto delle palline di platino di cui il calorico specifico era 0,032158,

Θ la temperatura iniziale delle palline di platino,

c il calorico specifico del liquido medio fra T_i e T_f.

Il calorico specifico c si calcola colla formula:

$$c = \frac{0{,}032158\pi(\Theta - T_f - t) - p\,(T_f - T_i + t)}{P\,(T_f - T_i + t)}.$$

I due termometri adoprati sono distinti colle lettere D ed L; D è il Baudin n. 9157 diviso in $^1/_{50}$ di grado, L è di Geissler pure diviso in $^1/_{50}$ di grado.

Idruro di palmitilo $C_{16}H_{34}$. Bolle fra 278° o 282°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
894	D	79,4000	4,090	15°,480	18°,941	0°,032	58,6154	99°,80	0,49782
895	L	81,2641	3,358	16,952	20,338	0,032	58,6154	99,77	0,49750
896	L	81,6004	3,358	18,876	22,195	0,027	58,6154	99,71	0,49380
								Media	0,496374

Idruro di benilo $C_{15}H_{32}$. Bolle fra 258° e 262°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
891	L	80,1129	3,358	18°,056	21°,541	0°,036	58,6154	99°,82	0,49526
892	L	79,4449	3,358	18,932	22,279	0,035	58,6154	99,85	0,50168
893	D	81,3021	4,090	14,964	18,361	0,030	58,6154	99,81	0,50051
								Media	0,499150

Idruro di miristilo $C_{14}H_{30}$. Bolle fra 236° e 240°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
888	L	77,3627	3,358	17°,908	21°,399	0°,033	58,6154	99°,79	0,49836
889	D	81,2536	4,090	13,776	17,237	0,034	58,6154	99,87	0,49792
890	D	78,8624	4,090	15,264	18,730	0,033	58,6154	99,87	0,50218
								Media	0,499487

Idruro di cocinilo $C_{13}H_{28}$. Bolle fra 218° e 220°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
885	D	90,1410	3,104	15°,480	18°,645	0°,032	58,6154	99°,76	0,49605
886	L	87,3863	2,372	16,972	20,206	0,032	58,6154	99,76	0,49806
887	L	87,5782	2,372	17,788	20,958	0,035	58,6154	99,77	0,50194
								Media	0,49868

Idruro di laurilo $C_{12}H_{26}$. Bolle fra 198° e 200°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
882	D	85,9408	3,104	15°,796	19°,025	0°,032	58,6154	99°,70	0,50628
883	L	85,3501	2,372	17,052	20,262	0,033	58,6154	99,70	0,51222
884	D	82,7143	3,104	14,028	17,481	0,028	58,6154	99,79	0,50113
								Media	0,506544

Idruro di undecilo $C_{11}H_{24}$. Bolle fra 180° e 182°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
878	D	82,6322	3,104	13°,652	17°,112	0°,031	58,6154	99°,73	0,50208
879	D	82,6322	3,104	14,576	18,013	0,032	58,6154	99,73	0,49957
880	D	82,7274	3,104	14,916	18,305	0,031	58,6154	99,73	0,50475
881	D	83,7664	3,104	15,616	18,933	0,027	58,6154	99,71	0,50633
								Media	0,503183

Idruro di rutilo $C_{10}H_{22}$. Bolle fra 158° e 162°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
874	D	83,3931	3,104	14°.480	17°,881	0°,031	58,6154	99°,63	0,50097
875	D	82,5720	3,104	15,132	18,493	0,035	58,6154	99,63	0,50757
876	D	85,0154	3,104	15,076	18,357	0,029	58,6154	99,64	0,50776
877	D	82,8144	3,104	15,120	18,485	0,028	58,6154	99,66	0,50687
								Media	0,505793

Idruro di pelargilo C_9H_{20}. Bolle fra 136° e 138°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
870	D	81,8969	3,104	14°,792	18°,234	0°,032	58,6154	99°,73	0,50181
871	D	81,3351	3,104	14,896	18,330	0,031	58,6154	99,71	0,50592
872	D	80,8475	3,104	13,016	16,592	0,029	58,6154	99,65	0,49794
873	D	80,6619	3,104	13,748	17,288	0,031	58,6154	99,64	0,50022
								Media	0,501474

Idruro di caprilo C_8H_{18}. Bolle fra 116° e 118°

N	Termometro	P	p	T_i	T_f	t	π	Θ	c
867	D	64,2961	3,104	14°,308	18°,523	0°,034	58,6154	99°,83	0,51248
868	D	63,2981	3,104	14,628	18,887	0,034	58,6154	99,83	0,51667
869	D	62,6060	3,104	12,096	16,582	0,036	58,6154	99,79	0,50416
								Media	0,511103

Il calorico specifico degli altri idrocarburi non fu potuto determinare con questo metodo, perchè sono troppo volatili.

Ricorremmo perciò al metodo della boccetta di Berthelot [1], il quale in sostanza non differisce dal metodo usato dal Kopp.

Le boccette da noi adoperate sono due, tutte di un pezzo, costruite colla stessa lastra di platino di cui sono formati i vasi calorimetrici, gli agitatori ecc.

Il liquido volatile veniva chiuso nella boccetta con un tappo di eccellente sovero, a perfetta tenuta, traversato da un termometro normale Baudin a quinti oppure a decimi di grado.

Il calorimetro poi era uno dei calorimetri alla Berthelot, da noi più sopra descritto.

Nell'impiegare questo metodo si adoperarono tutte quelle norme indicate nel libro del Berthelot: i calcoli del calorico specifico si fanno nel modo stesso che nel metodo di Kopp.

Le esperienze erano condotte nel modo seguente: pesata l'acqua del calorimetro ed assicuratici che la sua temperatura rimaneva affatto costante, si scaldava la boccetta contenente il liquido agitandola continuamente perchè il liquido si mescolasse, e prendesse più facilmente una temperatura uniforme; raggiunta la temperatura conveniente si leggevano i termometri del calorimetro e della boccetta, e si portava rapidamente la boccetta entro il calorimetro.

La temperatura del calorimetro saliva ordinariamente per 4' dopo il qual tempo la temperatura del liquido della boccetta superava di circa 0°,2 quella del calorimetro: notata allora la temperatura della boccetta, si toglieva dal calorimetro e si

[1] Berthelot, *Mécanique chimique*. Paris 1879, tom. I, pag. 276.

continuava per altri 8 o 10 primi ad osservare la temperatura del calorimetro per determinare la perdita di calore dovuta al raffreddamento durante la esperienza.

Nelle tavole seguenti:

N rappresenta il numero d'ordine del registro generale delle esperienze calorimetriche eseguite in questo Gabinetto,

P il peso dell'acqua contenuta nel calorimetro ridotto al vuoto,

p l'equivalente in acqua del calorimetro e della parte immersa dell'agitatore e del termometro,

P' il peso, ridotto al vuoto, del liquido contenuto nella boccetta,

p' l'equivalente in acqua della boccetta e della parte immersa del termometro in essa contenuto,

T_i la temperatura iniziale del calorimetro,

T_f la temperatura finale del calorimetro corretta per la colonna del termometro non immersa,

t la correzione pel raffreddamento del calorimetro dovuto al raggiamento ecc. durante la esperienza,

T'_i la temperatura iniziale del liquido contenuto nella boccetta, corretta per la colonna del termometro non immersa,

T'_f la temperatura finale del liquido della boccetta, corretta per la colonna del termometro non immersa,

c il calorico specifico del liquido, medio fra T'_f e T'_i.

Il calorico specifico c si calcola colla formula:

$$\frac{(P+p)(T_f-T_i+t)-p'(T'_i-T'_f)}{P'(T'_i-T'_f)}$$

Idruro di enantilo C_7H_{16} (dal petrolio). Bolle fra +92° e +94°

N	Term.	P	p	P'	p'	T_i	T_f	t	T'_i	T'_f	c
909	D	162,4112	4,638	22,6540	1,753	18°,282	18°,282	0°,026	55°,96	18°,56	0,48658
910	D	162,5513	4,638	22,5540	1,753	15,596	18,030	0,026	50,76	18,36	0,48510
911	D	163,7126	4,638	22,3775	1,753	15,692	18,110	0,026	50,96	18,36	0,48867
912	D	162,3912	4,638	22,2775	1,753	15,548	17,940	0,024	50,16	18,10	0,48738
										Media	0,486933

Idruro di enantilo, C_7H_{16}, (dagli olii leggieri). Bolle fra +92° e +94°

N	Term.	P	p	P'	p'	T_i	T_f	t	T'_i	T'_f	c
901	D	584,7049	5,184	55,0594	2,077	14°,812	16°,448	0°,019	50°,32	16°,688	0,48948
902	D	584,1841	5,184	54,8893	2,077	14,740	16,356	0,024	50,12	16,596	0,48743
903	D	584,4645	5,184	54,7190	2,077	14,792	16,372	0,008	50,32	16,612	0,48743
904	D	584,5247	5,184	54,5487	2,077	14,872	16,596	0,016	50,52	16,836	0,49907
										Media	0,484103

Idruro di càproilo C_6H_{14}. Bolle a +68°

N	Term.	P	p	P′	p	T_i	T_f	t	T'_i	T'_f	c
897	D	584.2823	5.184	56.8995	2.077	14°,974	15°.938	0°	34°,72	16°.178	0,50210
898	D	584.8232	5,184	56,4571	2,077	15,004	16,046	0,021	36,42	16,286	0,50910
899	D	583,7737	5,184	56,0165	2,077	15,114	16,198	0,008	37,52	16,438	0,50752
900	D	585,6857	5,184	55,5356	2,077	15,076	16.078	0,015	36,52	16,318	0,49821
										Media	0,504233

Per l'idruro C_5H_{12} che bolle a 30° non si sono ancora potute fare misure calorimetriche esatte, ci riserbiamo di farle quando potremo avere stabilmente la temperatura di zero gradi.

Proprietà elettriche. — Tutti gli idrocarburi estratti dai petroli e purificati con gli acidi solforico e nitrico prima, e poscia distillati sul sodio non conducono affatto.

Noi abbiamo sperimentato con due metodi diversi: il primo è quello già da uno di noi indicato in una Memoria precedente ([1]) per provare che il solfuro di carbonio, il benzolo ecc. non conducono affatto la corrente.

Il metodo è il seguente: due sottili fili di platino verticali, distanti fra loro un centimetro s'immergono per un centimetro circa nel liquido che è contenuto in un tubettino di vetro in modo da rimanere ben distanti dalle pareti: i due fili di platino bene isolati perchè tenuti solo in alto da due lunghissime bacchettine di ebanite si potevano far comunicare col circuito di cui fa parte un galvanometro sensibilissimo ed una fortissima pila.

Il galvanometro adoprato è stato un galvanometro alla Dubois Reymond per lo studio delle correnti fisiologiche; col telajo coperto di varie diecine di migliaia di giri, col sistema dei due aghi reso quasi perfettamente astatico, e di tale sensibilità da deviare assai col solo toccare contemporaneamente i due serrafili con le mani: la pila era di 400 elementi zinco carbone nell'acido cromico, equivalente in forza elettromotrice ad oltre 800 Daniell.

Ora in tali condizioni non si osservò mai la più piccola deviazione galvanometrica sperimentando coi vari idrocarburi del petrolio, così a freddo come vicino alla temperatura di ebullizione, quantunque questa per alcuni fosse molto alta, più alta di quella alla quale il vetro conduce.

La disposizione dell'esperienza, elettrodi, distanti dalle pareti del vetro, filiformi e per conseguenza di piccolissima superficie, ci garantivano da deviazioni dovute alla conducibilità del vetro ed alla carica elettrostatica degli elettrodi; per tali esperienze occorrono pochi centimetri cubici di liquido, due o tre al più.

Il secondo metodo era il seguente: L'idrocarburo si versava in una specie di grande cilindro di vetro, dove s'immergeva una lastrina di ottone piegata a cilindro

([1]) Bartoli, *Sull'elettrolisi dell'acqua e dell'acido borico*, ecc. Gazzetta chimica, tom. XIII (gennaio 1882) e Beiblätter zu den Annalen der Physik, Bd. VII, S. 308.

e quasi aderente alle pareti, in perfetta comunicazione col suolo per mezzo dei condotti del gaz e dei condotti dell'acqua; al centro del cilindro corrispondeva il centro di una sfera metallica tutta immersa nel liquido, sospesa per un sottile filo metallico perfettamente isolato ed in comunicazione colla lemniscata di un elettrometro Thomson (sistema Branly), le cui due paja di settori erano in comunicazione con i poli di una pila bene isolata, composta di pochi elementi Daniell: le oscillazioni della lemniscata erano smorzate facendo immergere una lastrina di vetro nell'acido solforico.

Si caricava il sistema formato dal filino e dalla lemniscata, tenendole un istante in comunicazione con un polo della pila sopradescritta, di cui l'altro polo era in buona comunicazione col suolo, e poscia di tempo in tempo si leggevano al cannocchiale le deviazioni dell'elettrometro, che andavano lentamente decrescendo: tal decrescimento è da attribuirsi alla carica che prendono le molecole liquide in contatto della sfera elettrizzata, le quali in virtù della costituzione dei liquidi sono incessantemente rinnovate. E ci parve la dissipazione della carica (con lo stesso potenziale) più grande cogli idrocarburi più mobili, e più piccola con quelli più viscosi: ma su questo argomento ritorneremo in altra occasione.

Avremmo anche voluto paragonare i poteri induttivi specifici di tutti questi idrocarburi, dei quali avevamo già misurato l'indice di rifrazione, ed avevamo già in ordine gli apparecchi per tali misure, ma ce lo hanno impedito, per ora, altre occupazioni, ed anche la piccola quantità di alcuni di questi liquidi che abbiamo a nostra disposizione.

Solo riporteremo qui come saggio i numeri che furono ottenuti con tre idrocarburi dei quali avevamo maggior copia; avvertendo che impiegammo questi idrocarburi, non così bene separati come per tutte le altre misure, ma pure sufficientemente separati.

Il metodo fu non dissimile da quello adoprato dal Silow [1]: si adoperava una pila, un galvanometro ed un commutatore rapido: il liquido coibente si trovava interposto fra la superficie interna e quella esterna di due cilindri metallici aventi lo stesso asse, alti 20 centimetri e col diametro di 15 e 17 centimetri rispettivamente.

Abbiamo ottenuto i numeri seguenti:

			Potere induttore specifico.
Idruro di caproilo (grezzo)	$C_6 H_{14}$	(Bolle 66° — 70°)	; 1,811 a + 8°,1
Idruro di rutilo	$C_{10}H_{22}$	(Bolle 156°—164°)	; 1,950 a + 6°,2
Idruro di palmitilo	$C_{16}H_{34}$	(Bolle 275°—285°)	; 2,134 a + 12°,4

Gl'indici di rifrazione di questi stessi idrocarburi, pel raggio D, sono rispettivamente 1,3855; 1,4257; 1,4570 alla temperatura di 16° — 17°.

Si vede di qui che, almeno in via approssimativa, questi numeri soddisfano alla regola di Maxwell.

Riserbandoci ad altra Nota a dare le proprietà magnetiche ed ottico-magnetiche e qualche altra proprietà fisica dei petroli, termineremo questa Memoria col riassumere brevemente i fatti principali da noi osservati.

[1] Gli idrocarburi adoperati in questa esperienza, nella quale occorrevano quantità piuttosto grandi di liquido, non erano così bene separati come quelli su cui abbiamo studiato le proprietà in questo lavoro. Erano gli idrocarburi che furono separati, tre anni or sono, in questo Gabinetto dall'egregio sig. dottore Paolo Guasti, per preparare i derivati di sostituzione clorurati.

Negli idrocarburi, $C_n H_{2n+2}$ dei petroli, al crescere del peso molecolare:

1° *i coefficienti medi di dilatazione fra 0° e 30°, e fra 0° e la temperatura di ebullizione decrescono regolarmente;*

2° *i volumi molecolari alla temperatura di ebullizione aifferiscono da quelli calcolati colla regola di Kopp; e per l'aumento di* CH_2 *non corrisponde un aumento costante nel volume molecolare: e le differenze sono maggiori degli errori di osservazione;*

3° *le costanti di capillarità* a^2 *ed* α *misurate alla temperatura ordinaria vanno continuamente crescendo: questo fatto contraddice ed annulla la regola 7ª che il Wilhelmy aveva dato come generale;*

4° *i coefficienti di attrito, alla temperatura di 22° a 23° crescono, rapidamente e con molta regolarità;*

5° *l'indice di rifrazione, misurato pel raggio* D, *cresce regolarmente;*

6° *il calorico specifico rimane sensibilmente costante.*

I vari idrocarburi $C_n H_{2n+2}$ estratti dai petroli:

7° *non conducono affatto la corrente elettrica;*

8° *hanno poteri induttori specifici che seguono la regola di Maxwell.*

Terminiamo questo lavoro col riassumere nella tavola seguente i valori da noi trovati per le costanti fisiche dei diversi idrocarburi dei petrolii di Pensilvania, misurate sempre *sulla stessa porzione di liquido.*

Nome della sostanza	Formula	Temperatura di ebullizione	Densità a zero	Coefficienti della formula $D_t = D_0 (1 - \alpha t - \beta t^2)$		Coeff. medio di dilatazione fra 0° e 30°	Coefficiente di dilataz. medi fra 0° e la temp di ebullizione
				α	β		
Idruro di amilo	$C_5 H_{12}$	+ 30°	0,640251	0,001346373	0,000005653208	0,0015890	0,0015890
» di caproilo	$C_6 H_{14}$	+ 68°	0,694990	0,001060109	0,000006771339	0,0013130	0,00140556
» di enantilo	$C_7 H_{16}$	+92° a +94°	0,732827	0,001156064	0,000000136491	0,0012019	0,00141922
» (dal petrolio grezzo)	$C_7 H_{16}$	92° a 94°	0,730353	0,001149001	0,000000861598	0,0012177	0,00139875
» di caprilo	$C_8 H_{18}$	116° a 118°	0,746312	0,001068842	0,000000641196	0,0011240	0,00121160
» di pelargilo	$C_9 H_{20}$	136° a 138°	0,762360	0,001029104	0,000000715620	0,0010848	0,00126808
» di rutilo.	$C_{10}H_{22}$	158° a 162°	0,771136	0,000906298	0,000002629383	0,0010151	0,00118594
» di undecilo	$C_{11}H_{24}$	180° a 182°	0,781676	0,000865812	0,000002491556	0,00096785	0,00116581
» di laurilo	$C_{12}H_{26}$	198° a 200°	0,791512	0,000905877	0,000000971361	0,00096198	0,00113730
» di cocinilo.	$C_{13}H_{28}$	218° a 220°	0,801699	0,000811813	0,000002676929	0,00091664	0,00108455
» di miristilo.	$C_{14}H_{30}$	236° a 240°	0,812978	0,000822841	0,000001592986	0,00089397	0,00110872
» di benilo	$C_{15}H_{32}$	258° a 262°	0,822399	0,000765179	0,000002356519	0,00085734	0,00108811
» di palmitilo.	$C_{16}H_{34}$	278° a 282°	0,828731	0,000711498	0,000002468680	0,00080450	0,00103782

In un altro lavoro di prossima pubblicazione saranno determinate le costanti magnetiche ed

Volume molecolare alla temperatura di ebullizione	Costanti capillari			c Calorico specifico		n indice assoluto di rifrazione pel raggio D fra 16° e 17°	Viscosità specifica	η coefficiente di attrito	Potere induttore specifico
	a^2	α	alla temperatura	medio	fra				
117,814	5,188	1,635	+ 11°	—	—	1,358302	0,2663	0,00002657 a 21°	—
135,570	5,938	2,038	+ 11°	0,504233	16° e 37°	1,385469	0,34742	0,000033510 a 23°,7	1,811 ad 8°,1
154,468	6,640	2,399	+ 12°	0,484183	17° e 50°	1,403621	0,47737	0,000045755 a 24°	—
154,731	6,627	2,387	+ 12°	0,486933	18° e 51°	1,402521	0,47137	0,000045466 a 24°,4	—
174,405	6,717	2,477	+ 11°	0,511103	12° e 19°	1,412018	0,55600	0,000053628 a 22°,2	—
197,147	6,757	2,538	+ 11°	0,501474	13° e 18°	1,420733	0,65408	0,000063089 a 22°,3	—
219,296	6,904	2,629	+ 13°	0,505793	14° e 18°	1,425736	0,81887	0,000078983 a 22°,3	1,950 a 6°,2
241,935	6,965	2,688	+ 14°	0,503183	14° e 19°	1,431360	1,00084	0,000096534 a 22°,7	—
263,890	7,106	2,781	+ 12°,8	0,506544	14° e 20°	1,436760	1,2402	0,00012817 a 23°,3	—
284,431	7.190	2,848	+ 14°	0,498684	15° e 21°	1,442272	1,6380	0,00015798 a 23°,3	—
308,763	7,252	2,915	+ 13°	0,499487	14° e 21°	1,448094	2,2524	0,00021725 a 21°,9	—
332,026	7,366	2,997	+ 13°,3	0,499150	15° e 22°	1,453189	2,9738	0,00028683 a 22°	—
353,317	7,416	3,041	+ 14°,0	0,496374	15° e 22°	1,456975	3,7948	0,00036602 a 22°,2	2,134 a 12°,4

ottico-magnetiche degli stessi idrocarburi.

INDICE DEL VOLUME XIX.° SERIE 3.ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.